И. Н. БРОНШТЕЙН
К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

И. Н. БРОНШТЕЙН
К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.11
Б68
УДК 51

Авторы из ГДР, принимавшие участие в подготовке справочника:

P. BECKMANN, M. BELGER, H. BENKER, M. DEWEß, H. ERFURTH, H. GENTEMANN, S. GOTTWALD, P. GÖTHNER, G. GROSCHE, H. HILBIG, R. HOFMANN, H. KÄSTNER, W. PURKERT, J. von SCHEIDT, TH. VETTERMANN, V. WÜNSCH, E. ZEIDLER

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. **Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.** – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

Предыдущее, 12-е издание (1980 г.) вышло с коренной переработкой, произведенной большим коллективом авторов из ГДР, под редакцией Г. Гроше и В. Циглера. В настоящее издание внесены многочисленные исправления.

Для студентов, инженеров, научных работников, преподавателей.

Илья Николаевич Бронштейн
Константин Адольфович Семендяев

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

для инженеров и учащихся втузов

Редактор *А. И. Штерн*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технические редакторы *В. Н. Кондакова, С. Я. Шкляр*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ 12490

Сдано в набор 27.08.85. Подписано к печати 27.05.86. Формат 70 × 100/16. Бумага книжно-журнальная для офсетной печати. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. п. л. 44,2. Усл. кр.-отт. 88,4. Уч.-изд. л. 72,22. Тираж 250000 экз. Заказ 60. Цена 4 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Б $\frac{1702000000 - 106}{053(02)\text{-}86}$ 47-86

СОДЕРЖАНИЕ

2.2. КОМБИНАТОРИКА

2.3. КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

2.4. АЛГЕБРА

2.5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

2.6. ГЕОМЕТРИЯ

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

4.1. МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ

4.2. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.4. РЯДЫ ФУРЬЕ, ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5.1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

6.3. ТИПИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

7.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

ОТ РЕДАКЦИИ

Справочник И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева по математике для инженеров и студентов втузов прочно завоевал популярность не только в нашей стране, но и за рубежом. Одиннадцатое издание вышло в свет в 1967 г. Дальнейшее издание справочника было приостановлено, так как он уже не отвечал современным требованиям.

Переработка справочника была осуществлена по инициативе издательства «Teubner» с согласия авторов большим коллективом специалистов в ГДР (где до этого справочник выдержал 16 изданий). Было принято обоюдное решение выпустить этот переработанный вариант совместным изданием:

в ГДР – издательством «Teubner» – на немецком языке;

в СССР – Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» – на русском языке.

В результате переработки справочник не только обогатился новыми сведениями по тем разделам математики, которые были представлены ранее, но и был дополнен новыми разделами: «Вариационное исчисление и оптимальное управление» (гл. 3.2), «Математическая логика и теория множеств» (гл. 4.1), «Вычислительная математика» (гл. 7.1), и основными сведениями по вычислительной технике (гл. 7.2).

При этом был сохранен общий методический стиль справочника, позволяющий и получить фактическую справку по отысканию формул или табличных данных, и ознакомиться с основными понятиями (или восстановить их в памяти); для лучшего усвоения понятий приводится большое количество примеров.

В связи со столь основательным пересмотром справочника в ГДР весь текст был заново переведен с немецкого языка.

При подготовке русского издания была произведена некоторая переработка, с тем чтобы по возможности учесть требования программ отечественных вузов. Эта переработка в основном связана с изменением обозначений и терминологии, которые у нас и в ГДР не всегда совпадают. Некоторые разделы для русского издания были переписаны заново – это первые разделы из глав, посвященных алгебре (гл. 2.4), математической логике и теории множеств (гл. 4.1). Менее значительной переделке подверглись разделы, посвященные комплексным переменным (гл. 3.4), вариационному исчислению и оптимальному управлению (гл. 3.2), вычислительной математике (гл. 7.1).

В таком виде справочник вышел в 1980 и в 1981 г.

В настоящем, 13-м (или 2-м переработанном) издании в справочник внесены многочисленные исправления.

Редакция благодарит всех читателей, приславших свои замечания и исправления. С сожалением отмечаем, что таких писем было немного. Основные исправления были внесены по результатам рецензирования и дополнительного редактирования предыдущего издания.

Мы повторяем свою просьбу к читателям присылать замечания в адрес редакции: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, Редакция математических справочников.

1. ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

1.1. ТАБЛИЦЫ

1.1.1. ТАБЛИЦЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.1.1. Некоторые часто встречающиеся постоянные.

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,141593	0,49715	$1:\pi$	0,318310	$\bar{1}$,50285
2π	6,283185	0,79818	$1:2\pi$	0,159155	$\bar{1}$,20182
3π	9,424778	0,97427	$1:3\pi$	0,106103	$\bar{1}$,02573
4π	12,566371	1,09921	$1:4\pi$	0,079577	$\bar{2}$,90079
$\pi:2$	1,570796	0,19612	$2:\pi$	0,636620	$\bar{1}$,80388
$\pi:3$	1,047198	0,02003	$3:\pi$	0,954930	$\bar{1}$,97997
$\pi:4$	0,785398	$\bar{1}$,89509	$4:\pi$	1,273240	0,10491
$\pi:6$	0,523599	$\bar{1}$,71900	$6:\pi$	1,909859	0,28100
$\pi:180\ (=1^\circ)$	0,017453	$\bar{2}$,24188	$180^\circ:\pi$	57°,295780	1,75812
$\pi:10800\ (=1')$	0,000291	$\bar{4}$,46373	$10800':\pi$	3437′,7468	3,53627
$\pi:648000\ (=1'')$	0,000005	$\bar{6}$,68557	$648000'':\pi$	206264″,81	5,31443
π^2	9,869604	0,99430	$1:\pi^2$	0,101321	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,564190	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,398942	$\bar{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	$\bar{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,682784	$\bar{1}$,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,620350	$\bar{1}$,79264
e	2,718282	0,43429	$1:e$	0,367879	$\bar{1}$,56571
e^2	7,389056	0,86859	$1:e^2$	0,135335	$\bar{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,606531	$\bar{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,716532	$\bar{1}$,85524
$e^{\pi:2}$	4,810477	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,207880	$\bar{1}$,31781
e^{π}	23,140693	1,36438	$e^{-\pi}$	0,043214	$\bar{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,491656	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,001867	$\bar{3}$,27125
C*)	0,577216	$\bar{1}$,76134	$\ln\pi$	1,144730	0,05870
$M=\lg e$	0,434294	$\bar{1}$,63778	$1:M=\ln 10$	2,302585	0,36222
g**)	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

*) C – постоянная Эйлера.

**) g – ускорение свободного падения (м/с^2); здесь дано округленное значение g на уровне моря на широте 45–50°.

Интерполяция. Большинство помещенных ниже таблиц дает значения функций с четырьмя значащими цифрами для трехзначных аргументов. Когда аргумент задан с большей точностью и, следовательно, искомое значение функции не может быть найдено непосредственно в таблицах, необходимо прибегать к интерполяции. Наиболее простой является линейная интерполяция, при которой допускают, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Если заданное значение x лежит между приведенными в таблице значениями x_0 и $x_1 = x_0 + h$, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$, то принимают

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta.$$

Интерполяционная поправка $\frac{x - x_0}{h}\Delta$ легко вычисляется с помощью таблицы пропорциональных частей 1.1.1.17.

Примеры. 1) Найти $1{,}6754^2$. В таблицах находим: $1{,}67^2 = 2{,}789$ и $1{,}68^2 = 2{,}822$; тогда $\Delta = 33$*). Из таблицы пропорциональных частей получаем: $0{,}5 \cdot 33 = 16{,}5$; $0{,}04 \cdot 33 = 1{,}3$; $\frac{x - x_0}{h}\Delta = 16{,}5 + 1{,}3 \approx 18$; $1{,}6754^2 = 2{,}807$.

2) Найти tg 79°24′. В таблицах находим: tg 79°20′ = 5,309 и tg 79°30′ = 5,396; тогда $\Delta = 87$; $0{,}4 \cdot 87 \approx 35$; tg 79°24′ = 5,344.

Погрешность линейной интерполяции не превышает единицы последней значащей цифры, если только две соседние разности Δ_0 и Δ_1 **) различаются не больше чем на 4 единицы (последнего знака). Если это условие не выполнено, необходимо пользоваться более сложными интерполяционными формулами. В большинстве случаев достаточной является *квадратичная интерполяция* по Бесселю:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

$$k = \frac{x - x_0}{h};$$

$$k_1 = \frac{k(1 - k)}{4};$$

k_1 находится из табл. 1.1.1.18.

Пример. Требуется найти tg 85°33′. По таблице находим ($h = 10'$): $k = 0{,}3$, $k_1 = 0{,}052$; поправка равна $0{,}3 \cdot 491 - 0{,}052 \cdot 75 \approx 143$; tg 85°33′ = 12,849.

1.1.1.2. Квадраты, кубы, корни.

Объяснения к таблице. Таблица позволяет находить квадраты, кубы, квадратные и кубические корни с четырьмя значащими цифрами. Для аргументов n, заключенных между 1 и 10, величины n^2, n^3 находятся непосредственно из таблицы, если значение аргумента дано с тремя значащими цифрами. Например, $1{,}79^2 = 3{,}204$. Если же значение аргумента задано более чем тремя значащими цифрами, необходимо прибегнуть к интерполяции. Для этой таблицы погрешность линейной интерполяции нигде не превышает единицы последнего знака.

Для нахождения n^2, n^3 при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при увеличении n в 10^k раз n^2 увеличивается в 10^{2k} раз, n^3 – в 10^{3k} раз, т. е. перенос запятых у n на k разрядов вправо вызывает перенос запятых у n^2 на $2k$ разрядов вправо. При этом по мере надобности к взятому из таблиц числу приписываются нули справа или слева. Например, $0{,}179^2 = 0{,}03204$; $179^3 = 5\,735\,000$*).

Корни квадратные для n, заключенных между 1 и 100, могут быть найдены непосредственно из таблицы (с применением линейной интерполяции), а для любых n – по следующим правилам.

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по две цифры. 2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей грань одну или две значащие цифры, значение корня находят в таблице соответственно в графе $\sqrt{n}$ или $\sqrt{10n}$. 3) В найденном значении корня запятую ставят, исходя из того, что каждая грань подкоренного числа, стоящая до запятой, дает для корня одну цифру до запятой, а для чисел, меньших 1, каждая состоящая из нулей грань после запятой дает для корня один нуль после запятой.

Примеры. 1) $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$; 2) $\sqrt{23'90{,}00} = 48{,}89$; 3) $\sqrt{0{,}00'02'39} = 0{,}01546$; 4) $\sqrt{0{,}00'3} = 0{,}05477$. (В последнем примере под знаком корня на конце нужно мысленно добавить один нуль, т. е. дополнить последнюю грань, и корень следует искать в графе $\sqrt{10n}$.)

Корни кубические для n, заключенных между 1 и 1000, могут быть найдены непосредственно из таблицы (с применением линейной интерполяции), а для любых n – по следующим правилам.

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по три цифры. 2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей грань одну, две или три значащие цифры, значение корня находят в таблице соответственно в графе $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ или $\sqrt[3]{100n}$. 3) В найденном значении корня запятую ставят по тому же правилу, что и для квадратных корней.

Примеры. 1) $\sqrt[3]{23{,}9} = 2{,}880$**); 2) $\sqrt[3]{239'000} = 62{,}06$; 3) $\sqrt[3]{0{,}000'002'39} = 0{,}01337$; 4) $\sqrt[3]{0{,}000'3} = 0{,}06694$; 5) $\sqrt[3]{0{,}03} = 0{,}3107$. (В последних двух примерах под знаком корня на конце нужно мысленно добавить соответственно два нуля и один нуль, т. е. дополнить соответствующую грань.)

---

*) Разность Δ и поправку обычно выражают в единицах разряда последней значащей цифры, не выписывая нулей и запятой впереди.

**) Здесь подразумеваются обозначения: $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_{-1} = x_0 - h$, $y_k = f(x_k)$ $(k = -1, 0, 1, 2)$, $\Delta_0 = y_1 - y_0$, $\Delta_1 = y_2 - y_1$, $\Delta_{-1} = y_0 - y_{-1}$.

*) Лучше записать $179^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, избегая употребления нулей для замены неизвестных цифр (точно: $179^3 = 5\,735\,339$).

**) Нуль на конце нужно сохранить, так как здесь он является значащей цифрой и характеризует точность полученного значения корня.

Квадраты, кубы, квадратные и кубические корни

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3.049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2,525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1.373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16,65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	3,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199.2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8.662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,462	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7,54	56,85	428,7	2,746	8,683	1,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,009	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

1.1.1.3. Степени целых чисел от 1 до 100.

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	750 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424

Продолжение

n	n^2	n^3	n^4	n^5
35	1 225	42875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

1.1.1.4. Обратные величины.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431

Продолжение

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Объяснения к таблице обратных величин. В таблице 1.1.1.4 даны с четырьмя знаками значения величин $10000:n$ для трехзначных аргументов, заключенных между 1 и 10. Каждое число в таблице помещено в строке, соответствующей первым двум значащим цифрам аргумента (указанным в столбце n), и в столбце, соответствующем третьей цифре аргумента. Например, $10000:2{,}26 = 4425$. Если аргумент дан с четырьмя знаками, то необходимо прибегнуть к линейной интерполяции. Следует обратить внимание на то, что здесь интерполяционные поправки не прибавляются, а вычитаются.

Помещенные в таблице числа можно рассматривать как десятичные знаки, следующие за запятой в дроби $1:n$; например, $1:2{,}26 = 0{,}4425$. Для нахождения $1:n$ при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при умножении n на 10^k величина $1:n$ умножается на 10^{-k}, т. е. перенос запятой у n на k разрядов вправо вызывает перенос запятой у $1:n$ на k разрядов влево и наоборот. Например, $1:22{,}6 = 0{,}04425$ и $1:0{,}0226 = 44{,}25$.

1.1.1.5. Факториалы и обратные им величины.
Факториалы.

n	n!	n	n!
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

Величины, обратные факториалам*)

n	$1:n!$	n	$1:n!$	n	$1:n!$
1	1,000000	11	$0{,}0^{7}25052$	21	$0{,}0^{19}19573$
2	0,500000	12	$0{,}0^{8}20877$	22	$0{,}0^{21}88968$
3	0,166667	13	$0{,}0^{9}16059$	23	$0{,}0^{22}38682$
4	0,041667	14	$0{,}0^{10}11471$	24	$0{,}0^{23}16117$
5	$0{,}0^{2}83333$	15	$0{,}0^{12}76472$	25	$0{,}0^{25}64470$
6	$0{,}0^{2}13889$	16	$0{,}0^{13}47795$	26	$0{,}0^{26}24796$
7	$0{,}0^{3}19841$	17	$0{,}0^{14}28115$	27	$0{,}0^{28}91837$
8	$0{,}0^{4}24802$	18	$0{,}0^{15}15619$	28	$0{,}0^{29}32799$
9	$0{,}0^{5}27557$	19	$0{,}0^{17}82206$	29	$0{,}0^{30}11310$
10	$0{,}0^{6}27557$	20	$0{,}0^{18}41103$	30	$0{,}0^{32}37700$

*) Для $1:n!$ применена сокращенная запись нулей после запятой. Так, для $1:8!$ вместо 0,000024802 написано $0{,}0^{4}24802$.

1.1.1.6. Некоторые степени чисел 2, 3 и 5.

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

1.1.1.7. Десятичные логарифмы.

Объяснения к таблицам логарифмов и антилогарифмов. Таблица 1.1.1.7 служит для нахождения десятичных логарифмов чисел. Сначала для данного числа находится *характеристика* его логарифма, а затем *мантисса* из таблицы. Для трехзначных чисел мантисса находится на пересечении строки, в начале которой (графа N) стоят две первые цифры данного числа, и столбца, соответствующего третьей цифре нашего числа. Если заданное число имеет больше трех значащих цифр, необходимо применить линейную интерполяцию. При этом интерполяционная поправка находится только на четвертую значащую цифру числа; поправку на пятую цифру имеет смысл делать только тогда, когда первая значащая цифра данного числа равна 1 или 2.

Пример. $\lg 254{,}3 = 2{,}4053$ (к 4048 нужно прибавить $0{,}3 \cdot 17 = 5{,}1$).

Для нахождения числа по его десятичному логарифму служит таблица 1.1.1.8 (таблица антилогарифмов)*). Аргументом в этой таблице является мантисса заданного логарифма. На пересечении строки, которая определяется первыми двумя цифрами мантиссы (графа m), и столбца, соответствующего третьей цифре мантиссы, в таблице антилогарифмов находится цифровой состав искомого числа. На четвертую цифру мантиссы должна быть внесена интерполяционная поправка. Характеристика логарифма позволяет поставить в полученном результате запятую.

Примеры. $\lg x = 1{,}2763$; $x = 18{,}89$ (к найденному в таблице значению 1888 прибавляется $0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$; в полученном результате отделяются запятой два знака, так как характеристика равна единице). Если $\lg x = 2{,}2763$, то $x = 0{,}01889$. Эти результаты могут быть записаны также следующим образом: $10^{1{,}2763} = 18{,}89$; $10^{-1{,}7237} = 0{,}01889$ (так как $\bar{2}{,}2763 = -1{,}7237$).

*) Число y, десятичный логарифм которого равен x, называют *антилогарифмом* x. Согласно определению логарифма, эта функция совпадает с показательной функцией $y = 10^x$.

Десятичные логарифмы

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9523	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

1.1.1.8. Антилогарифмы.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

Продолжение

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

1.1.1.9. Натуральные значения тригонометрических функций.
Угловой радиус разделен на шесть частей: шаг 10′.)

СИНУСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0223	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2519	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОСИНУСЫ

СИНУСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8936	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОСИНУСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	75
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОТАНГЕНСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	40
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,394	1,402	1,411	1,419	1,428	35
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	33
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	30
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	1,963	27
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	25
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	20
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	15
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	10
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	8
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	7
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	5
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы

КОТАНГЕНСЫ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (ШАГ 0,1 °)

СИНУСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0436	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87
3	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86
4	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85
5	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84
6	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83
7	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82
8	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81
9	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80
10	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1957	0,1874	0,1891	0,1908	79
11	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78
12	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77
13	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76
14	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75
15	0,2588	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74
16	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73
17	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72
18	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71
19	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70
20	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69
21	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68
22	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67
23	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66
24	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65
25	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64
26	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63
27	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62
28	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61
29	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60
30	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59
31	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58
32	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57
33	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56
34	0,5592	0,5606	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55
35	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54
36	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53
37	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52
38	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,6225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51
39	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6247	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50
40	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49
41	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48
42	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47
43	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46
44	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОСИНУСЫ

СИНУСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
46	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43
47	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42
48	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41
49	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40
50	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39
51	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38
52	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37
53	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,8049	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36
54	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35
55	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34
56	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33
57	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32
58	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31
59	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30
60	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29
61	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28
62	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27
63	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8972	0,8980	0,8988	26
64	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25
65	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24
66	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23
67	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22
68	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21
69	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20
70	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19
71	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,9483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18
72	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17
73	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16
74	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15
75	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14
76	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13
77	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12
78	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11
79	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10
80	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9
81	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9888	0,9900	0,9903	8
82	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7
83	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6
84	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5
85	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОСИНУСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0344	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0367	0,0384	0,0402	0,0419	0,0437	0,0454	0,0472	0,0489	0,0507	0,0524	87
3	0,0524	0,0542	0,0559	0,0577	0,0594	0,0612	0,0629	0,0647	0,0664	0,0682	0,0699	86
4	0,0699	0,0717	0,0734	0,0752	0,0769	0,0787	0,0805	0,0822	0,0840	0,0857	0,0875	85
5	0,0875	0,0892	0,0910	0,0928	0,0945	0,0963	0,0981	0,0998	0,1016	0,1033	0,1051	84
6	0,1051	0,1069	0,1086	0,1104	0,1122	0,1139	0,1157	0,1175	0,1192	0,1210	0,1228	83
7	0,1228	0,1246	0,1263	0,1281	0,1299	0,1317	0,1334	0,1352	0,1370	0,1388	0,1405	82
8	0,1405	0,1423	0,1441	0,1459	0,1477	0,1495	0,1512	0,1530	0,1548	0,1566	0,1584	81
9	0,1584	0,1602	0,1620	0,1638	0,1655	0,1673	0,1691	0,1709	0,1727	0,1745	0,1763	80
10	0,1763	0,1781	0,1799	0,1817	0,1835	0,1853	0,1871	0,1890	0,1908	0,1926	0,1944	79
11	0,1944	0,1962	0,1980	0,1998	0,2016	0,2035	0,2053	0,2071	0,2089	0,2107	0,2126	78
12	0,2126	0,2144	0,2162	0,2180	0,2199	0,2217	0,2235	0,2254	0,2272	0,2290	0,2309	77
13	0,2309	0,2327	0,2345	0,2364	0,2382	0,2401	0,2419	0,2438	0,2456	0,2475	0,2493	76
14	0,2493	0,2512	0,2530	0,2549	0,2568	0,2586	0,2605	0,2623	0,2642	0,2661	0,2679	75
15	0,2679	0,2698	0,2717	0,2736	0,2754	0,2773	0,2792	0,2811	0,2830	0,2849	0,2867	74
16	0,2867	0,2886	0,2905	0,2924	0,2943	0,2962	0,2981	0,3000	0,3010	0,3038	0,3057	73
17	0,3057	0,3076	0,3096	0,3115	0,3134	0,3153	0,3172	0,3191	0,3211	0,3230	0,3249	72
18	0,3249	0,3269	0,3288	0,3307	0,3327	0,3346	0,3365	0,3385	0,3404	0,3424	0,3443	71
19	0,3443	0,3463	0,3482	0,3502	0,3522	0,3541	0,3561	0,3581	0,3600	0,3620	0,3640	70
20	0,3640	0,3659	0,3679	0,3699	0,3719	0,3739	0,3759	0,3779	0,3799	0,3819	0,3839	69
21	0,3839	0,3859	0,3879	0,3899	0,3919	0,3939	0,3959	0,3979	0,4000	0,4020	0,4040	68
22	0,4040	0,4061	0,4081	0,4101	0,4122	0,4142	0,4163	0,4183	0,4204	0,4224	0,4245	67
23	0,4245	0,4265	0,4286	0,4307	0,4327	0,4348	0,4369	0,4390	0,4411	0,4431	0,4452	66
24	0,4452	0,4473	0,4494	0,4515	0,4536	0,4557	0,4578	0,4599	0,4621	0,4642	0,4663	65
25	0,4663	0,4684	0,4706	0,4727	0,4748	0,4770	0,4791	0,4813	0,4834	0,4856	0,4877	64
26	0,4877	0,4899	0,4921	0,4942	0,4964	0,4986	0,5008	0,5029	0,5051	0,5073	0,5095	63
27	0,5095	0,5117	0,5139	0,5161	0,5184	0,5206	0,5228	0,5250	0,5272	0,5295	0,5317	62
28	0,5317	0,5340	0,5362	0,5384	0,5407	0,5430	0,5452	0,5475	0,5498	0,5520	0,5543	61
29	0,5543	0,5566	0,5589	0,5612	0,5635	0,5658	0,5681	0,5704	0,5727	0,5750	0,5774	60
30	0,5774	0,5797	0,5820	0,5844	0,5867	0,5890	0,5914	0,5938	0,5961	0,5985	0,6009	59
31	0,6009	0,6032	0,6056	0,6080	0,6104	0,6128	0,6152	0,6176	0,6200	0,6224	0,6249	58
32	0,6249	0,6273	0,6297	0,6322	0,6346	0,6371	0,6395	0,6420	0,6445	0,6469	0,6494	57
33	0,6494	0,6519	0,6544	0,6569	0,6594	0,6619	0,6644	0,6669	0,6694	0,6720	0,6745	56
34	0,6745	0,6771	0,6796	0,6822	0,6847	0,6873	0,6899	0,6924	0,6950	0,6976	0,7002	55
35	0,7002	0,7028	0,7054	0,7080	0,7107	0,7133	0,7159	0,7186	0,7212	0,7239	0,7265	54
36	0,7265	0,7292	0,7319	0,7346	0,7373	0,7400	0,7427	0,7454	0,7481	0,7508	0,7536	53
37	0,7536	0,7563	0,7590	0,7618	0,7646	0,7673	0,7701	0,7729	0,7757	0,7785	0,7813	52
38	0,7813	0,7841	0,7869	0,7898	0,7926	0,7954	0,7983	0,8012	0,8040	0,8069	0,8098	51
39	0,8098	0,8127	0,8156	0,8185	0,8214	0,8243	0,8273	0,8302	0,8332	0,8361	0,8391	50
40	0,8391	0,8421	0,8451	0,8481	0,8511	0,8541	0,8571	0,8601	0,8632	0,8662	0,8693	49
41	0,8693	0,8724	0,8754	0,8785	0,8816	0,8847	0,8878	0,8910	0,8941	0,8972	0,9004	48
42	0,9004	0,9036	0,9067	0,9099	0,9131	0,9163	0,9195	0,9228	0,9260	0,9293	0,9325	47
43	0,9325	0,9358	0,9391	0,9424	0,9457	0,9490	0,9523	0,9556	0,9590	0,9623	0,9657	46
44	0,9657	0,9691	0,9725	0,9759	0,9793	0,9827	0,9861	0,9896	0,9930	0,9965	1,0000	45
45	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОТАНГЕНСЫ

ТАНГЕНСЫ

Градусы	Градусы											
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
45	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44
46	1,0355	1,0392	1,0428	1,0464	1,0501	1,0538	1,0575	1,0612	1,0649	1,0686	1,0724	43
47	1,0724	1,0761	1,0799	1,0637	1,0875	1,0913	1,0951	1,0990	1,1028	1,1067	1,1106	42
48	1,1106	1,1145	1,1184	1,1224	1,1263	1,1303	1,1343	1,1383	1,1423	1,1463	1,1504	41
49	1,1504	1,1544	1,1585	1,1626	1,1667	1,1708	1,1750	1,1792	1,1833	1,1875	1,1918	40
50	1,1918	1,1960	1,2002	1,2045	1,2088	1,2131	1,2174	1,2218	1,2261	1,2305	1,2349	39
51	1,2349	1,2393	1,2437	1,2483	1,2527	1,2572	1,2617	1,2662	1,2708	1,2753	1,2799	38
52	1,2799	1,2846	1,2892	1,2938	1,2985	1,3032	1,3079	1,3127	1,3175	1,3222	1,3270	37
53	1,3270	1,3319	1,3367	1,3416	1,3465	1,3514	1,3564	1,3613	1,3663	1,3713	1,3764	36
54	1,3764	1,3814	1,3865	1,3916	1,3968	1,4019	1,4071	1,4124	1,4176	1,4229	1,4281	35
55	1,4281	1,4335	1,4388	1,4442	1,4496	1,4550	1,4605	1,4659	1,4715	1,4770	1,4826	34
56	1,4826	1,4882	1,4938	1,4994	1,5051	1,5108	1,5166	1,5224	1,5282	1,5340	1,5399	33
57	1,5399	1,5458	1,5517	1,5577	1,5637	1,5697	1,5757	1,5818	1,5880	1,5941	1,6003	32
58	1,6003	1,6066	1,6128	1,6191	1,6255	1,6319	1,6383	1,6447	1,6512	1,6577	1,6643	31
59	1,6643	1,6709	1,6725	1,6842	1,6909	1,6977	1,7045	1,7113	1,7182	1,7251	1,7321	30
60	1,7321	1,7391	1,7461	1,7532	1,7603	1,7675	1,7747	1,7820	1,7893	1,7966	1,8040	29
61	1,8040	1,8115	1,8190	1,8265	1,8341	1,8418	1,8495	1,8572	1,8650	1,8728	1,8807	28
62	1,8807	1,8887	1,8967	1,9047	1,9128	1,9210	1,9292	1,9375	1,9458	1,9542	1,9626	27
63	1,9626	1,9711	1,9797	1,9883	1,9970	2,0057	2,0145	2,0233	2,0323	2,0413	2,0503	26
64	2,0503	2,0594	2,0686	2,0778	2,0872	2,0965	2,1060	2,1155	2,1251	2,1348	2,1445	25
65	2,1445	2,1543	2,1642	2,1742	2,1842	2,1943	2,2045	2,2148	2,2251	2,2355	2,2460	24
66	2,2460	2,2566	2,2673	2,2781	2,2889	2,2998	2,3109	2,3220	2,3332	2,3445	2,3559	23
67	2,3555	2,3673	2,3798	2,3906	2,4023	2,4142	2,4262	2,4383	2,4504	2,4627	2,4751	22
68	2,4751	2,4876	2,5002	2,5129	2,5257	2,5386	2,5517	2,5649	2,5782	2,5916	2,6051	21
69	2,6051	2,6187	2,6325	2,6464	2,6605	2,6746	2,6889	2,7034	2,7179	2,7326	2,7475	20
70	2,7475	2,7625	2,7776	2,7927	2,8083	2,8239	2,8397	2,8556	2,8716	2,8878	2,9042	19
71	2,9042	2,9208	2,9375	2,9544	2,9714	2,9887	3,0061	3,0237	3,0415	3,0595	3,0777	18
72	3,0777	3,0961	3,1146	3,1334	3,1524	3,1716	3,1910	3,2106	3,2305	3,2506	3,2709	17
73	3,2709	3,2914	3,3122	3,3332	3,3544	3,3759	3,3977	3,4197	3,4420	3,4646	3,4874	16
74	3,4874	3,5105	3,5329	3,5576	3,5816	3,6059	3,6305	3,6554	3,6806	3,7062	3,7321	15
75	3,7321	3,7583	3,7848	3,8118	3,8391	3,8667	3,8947	3,9232	3.9520	3,9812	4,0108	14
76	4,0108	4,0408	4,0713	4,1022	4,1335	4,1653	4,1976	4,2303	4,2635	4,2972	4,3315	13
77	4,3315	4,3662	4,4015	4,4373	4,4737	4,5107	4,5483	4,5864	4,6252	4,6646	4,7046	12
78	4,7046	4,7453	4,7867	4,8288	4,8716	4,9152	4,9594	5,0045	5,0504	5,0970	5,1446	11
79	3,1446	5,1929	5,2422	5,2924	5,3435	5,3955	5,4486	5,5026	5,5578	5,6140	5,6713	10
80	5,6713	5,7297	5,7894	5,8502	5,9124	5,9758	6,0405	6,1066	6,1742	6,2432	6,3138	9
81	6,3138	6,3859	6,4596	6,5350	6,6122	6,6912	6,7720	6,8548	6,9395	7,0264	7,1154	8
82	7,1154	7,2066	7,3002	7,3962	7,4947	7,5958	7,6996	7,8062	7,9158	8,0285	8,1443	7
83	8,1443	8,2636	8,3863	8,5126	8,6427	8,7769	8,9152	9,0579	9,2052	9,3572	9,5144	6
84	9,5144	9,6768	9,8448	10,0187	10,1988	10,3854	10,5789	10,7797	10,9882	11,2048	11,4301	5
85	11,4301	11,6645	11,9087	12,1632	12,4288	12,7062	12,9962	13,2996	13,6174	13,9507	14,3007	4
86	14,3007	14,6685	15,0557	15,4638	15,8945	16,3499	16,8319	17,3432	17,8863	18,4645	19,0811	3
87	19,0811	19,7403	20,4465	21,2049	22,0217	22,9038	23,8593	24,8978	26,0307	27,2715	28,6363	2
88	28,6363	30,1446	31,8205	33,6935	35,8006	38,1885	40,9174	44,0661	47,7395	52,0807	57,2900	1
89	57,2900	63,6567	71,6151	81,8470	95,4895	114,5887	143,2371	190,9842	296,4777	572,9572	∞	0
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	Градусы
	Градусы											

КОТАНГЕНСЫ

1.1.1.10. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции (для x от 0 до 1,6).

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4539	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3,3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	−0,0092	−108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	−0,0192	−52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292	−34,233

Кратные значения π и π/2 для вычисления тригонометрических функций при $x > 1{,}6$

n	$n\cdot\pi/2$	$n\cdot\pi$	n	$n\cdot\pi/2$	$n\cdot\pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Примеры. 1) $\sin 7{,}5 = \sin(5\pi/2 - 0{,}35398) = \cos 0{,}35398 = 0{,}9380$ (линейная интерполяция). 2) $\sin 29 = \sin(9\pi + 0{,}72567) = -\sin 0{,}72567 = -0{,}6637$ (линейная интерполяция).

1.1.1.11. Показательные функции (для x от 1,6 до 10,0)*).

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	1,95	7,0287	0,1423	2,30	9,9742	0,10026
1,61	5,0028	0,1999	1,96	7,0993	0,1409	2,31	10,074	0,09926
1,62	5,0531	0,1979	1,97	7,1707	0,1395	2,32	10,176	0,09827
1,63	5,1039	0,1959	1,98	7,2427	0,1381	2,33	10,278	0,09730
1,64	5,1552	0,1940	1,99	7,3155	0,1367	2,34	10,381	0,09633
1,65	5,2070	0,1920	2,00	7,3891	0,1353	2,35	10,486	0,09537
1,66	5,2593	0,1901	2,01	7,4633	0,1340	2,36	10,591	0,09442
1,67	5,3122	0,1882	2,02	7,5383	0,1327	2,37	10,697	0,09348
1,68	5,3656	0,1864	2,03	7,6141	0,1313	2,38	10,805	0,09255
1,69	5,4195	0,1845	2,04	7,6906	0,1300	2,39	10,913	0,09163
1,70	5,4739	0,1827	2,05	7,7679	0,1287	2,40	11,023	0,09072
1,71	5,5290	0,1809	2,06	7,8460	0,1275	2,41	11,134	0,08982
1,72	5,5845	0,1791	2,07	7,9248	0,1262	2,42	11,246	0,08892
1,73	5,6407	0,1773	2,08	8,0045	0,1249	2,43	11,359	0,08804
1,74	5,6973	0,1755	2,09	8,0849	0,1237	2,44	11,473	0,08716
1,75	5,7546	0,1738	2,10	8,1662	0,1225	2,45	11,588	0,08629
1,76	5,8124	0,1720	2,11	8,2482	0,1212	2,46	11,705	0,08543
1,77	5,8709	0,1703	2,12	8,3311	0,1200	2,47	11,822	0,08458
1,78	5,9299	0,1686	2,13	8,4149	0,1188	2,48	11,941	0,08374
1,79	5,9895	0,1670	2,14	8,4994	0,1177	2,49	12,061	0,08291
1,80	6,0496	0,1653	2,15	8,5849	0,1165	2,50	12,182	0,08208
1,81	6,1104	0,1637	2,16	8,6711	0,1153	2,51	12,305	0,08127
1,82	6,1719	0,1620	2,17	8,7583	0,1142	2,52	12,429	0,08046
1,83	6,2339	0,1604	2,18	8,8463	0,1130	2,53	12,554	0,07966
1,84	6,2965	0,1588	2,19	8,9352	0,1119	2,54	12,680	0,07887
1,85	6,3598	0,1572	2,20	9,0250	0,1108	2,55	12,807	0,07808
1,86	6,4237	0,1557	2,21	9,1157	0,1097	2,56	12,936	0,07730
1,87	6,4883	0,1541	2,22	9,2073	0,1086	2,57	13,066	0,07654
1,88	6,5535	0,1526	2,23	9,2999	0,1075	2,58	13,197	0,07577
1,89	6,6194	0,1511	2,24	9,3933	0,1065	2,59	13,330	0,07502
1,90	6,6859	0,1496	2,25	9,4877	0,1054	2,60	13,464	0,07427
1,91	6,7531	0,1481	2,26	9,5831	0,1044	2,61	13,599	0,07353
1,92	6,8210	0,1466	2,27	9,6794	0,1033	2,62	13,736	0,07280
1,93	6,8895	0,1451	2,28	9,7767	0,1023	2,63	13,874	0,07208
1,94	6,9588	0,1437	2,29	9,8749	0,1013	2,64	14,013	0,07136

*) Для вычисления гиперболических функций при $x > 1{,}6$ можно пользоваться следующими формулами: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} 2x$.

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,65	14,154	0,07065	3,25	25,790	0,03877	3,85	46,993	0,02128
2,66	14,296	0,06995	3,26	26,050	0,03839	3,86	47,465	0,02107
2,67	14,440	0,06925	3,27	26,311	0,03801	3,87	47,942	0,02086
2,68	14,585	0,06856	3,28	26,576	0,03763	3,88	48,424	0,02065
2,69	14,732	0,06788	3,29	26,843	0,03725	3,89	48,911	0,02045
2,70	14,880	0,06721	3,30	27,113	0,03688	3,90	409,402	0,02024
2,71	15,029	0,06654	3,31	27,385	0,03652	3,91	49,899	0,02004
2,72	15,180	0,06588	3,32	27,660	0,03615	3,92	50,400	0,01984
2,73	15,333	0,06522	3,33	27,938	0,03579	3,93	50,907	0,01964
2,74	15,487	0,06457	3,34	28,219	0,03544	3,94	51,419	0,01945
2,75	15,643	0,06393	3,35	28,503	0,03508	3,95	51,935	0,01925
2,76	15,800	0,06329	3,36	28,789	0,03474	3,96	52,457	0,01906
2,77	15,959	0,06266	3,37	29,079	0,03439	3,97	52,985	0,01887
2,78	16,119	0,06204	3,38	29,371	0,03405	3,98	53,517	0,01869
2,79	16,281	0,06142	3,39	29,666	0,03371	3,99	54,055	0,01850
2,80	16,445	0,06081	3,40	29,964	0,03337	4,0	54,598	0,01832
2,81	16,610	0,06020	3,41	30,265	0,03304	4,1	60,340	0,01657
2,82	16,777	0,05961	3,42	30,569	0,03271	4,2	66,686	0,01500
2,83	16,945	0,05901	3,43	30,877	0,03239	4,3	73,700	0,01357
2,84	17,116	0,05843	3,44	31,187	0,03206	4,4	81,451	0,01228
2,85	17,288	0,05784	3,45	31,500	0,03175	4,5	90,017	0,01111
2,86	17,462	0,05727	3,46	31,817	0,03143	4,6	99,484	0,01005
2,87	17,637	0,05670	3,47	32,137	0,03112	4,7	109,95	0,00910
2,88	17,814	0,05613	3,48	32,460	0,03081	4,8	121,51	0,00823
2,89	17,993	0,05558	3,49	32,786	0,03050	4,9	134,29	0,00745
2,90	18,174	0,05502	3,50	33,115	0,03020	5,0	148,41	0,00674
2,91	18,357	0,05448	3,51	33,448	0,02990	5,1	164,02	0,00610
2,92	18,541	0,05393	3,52	33,784	0,02960	5,2	181,27	0,00552
2,93	18,728	0,05340	3,53	34,124	0,02930	5,3	200,34	0,00499
2,94	18,916	0,05287	3,54	34,467	0,02901	5,4	221,41	0,00452
2,95	19,106	0,05234	3,55	34,813	0,02872	5,5	244,69	0,00409
2,96	19,298	0,05182	3,56	35,163	0,02844	5,6	270,43	0,00370
2,97	19,492	0,05130	3,57	35,517	0,02816	5,7	298,87	0,00335
2,98	19,688	0,05079	3,58	35,874	0,02788	5,8	330,30	0,00303
2,99	19,886	0,05029	3,59	36,234	0,02760	5,9	365,04	0,00274
3,00	20,086	0,04979	3,60	36,598	0,02732	6,0	403,43	0,002479
3,01	20,287	0,04929	3,61	36,966	0,02705	6,1	445,86	0,002243
3,02	20,491	0,04880	3,62	37,338	0,02678	6,2	492,75	0,002029
3,03	20,697	0,04832	3,63	37,713	0,02652	6,3	544,57	0,001836
3,04	20,905	0,04783	3,64	38,092	0,02625	6,4	601,85	0,001662
3,05	21,115	0,04736	3,65	38,475	0,02599	6,5	665,14	0,001503
3,06	21,328	0,04689	3,66	38,861	0,02573	6,6	735,10	0,001360
3,07	21,542	0,04642	3,67	39,252	0,02548	6,7	812,41	0,001231
3,08	21,758	0,04596	3,68	39,646	0,02522	6,8	897,85	0,001114
3,09	21,977	0,04550	3,69	40,045	0,02497	6,9	992,27	0,001008
3,10	22,198	0,04505	3,70	40,447	0,02472	7,0	1096,6	0,000912
3,11	22,421	0,04460	3,71	40,854	0,02448	7,1	1212,0	0,000825
3,12	22,646	0,04416	3,72	41,264	0,02423	7,2	1339,4	0,000747
3,13	22,874	0,04372	3,73	41,679	0,02399	7,3	1480,3	0,000676
3,14	23,104	0,04328	3,74	42,098	0,02375	7,4	1636,0	0,000611
3,15	23,336	0,04285	3,75	42,521	0,02352	7,5	1808,0	0,000553
3,16	23,571	0,04243	3,76	42,948	0,02328	7,6	1998,2	0,000500
3,17	23,807	0,04200	3,77	43,380	0,02305	7,7	2208,3	0,000453
3,18	24,047	0,04159	3,78	43,816	0,02282	7,8	2440,6	0,000410
3,19	24,288	0,04117	3,79	44,256	0,02260	7,9	2697,3	0,000371
3,20	24,533	0,04076	3,80	44,701	0,02237	8,0	2981,0	0,000335
3,21	24,779	0,04036	3,81	45,150	0,02215	8,1	3294,5	0,000304
3,22	25,028	0,03996	3,82	45,604	0,02193	8,2	3641,0	0,000275
3,23	25,280	0,03956	3,83	46,063	0,02171	8,3	4023,9	0,000249
3,24	25,534	0,03916	3,84	46,525	0,02149	8,4	4447,1	0,000225

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
8,5	4914,8	0,000203	9,0	8103,1	0,000123	9,5	13360	0,000075
8,6	5431,7	0,000184	9,1	8955,3	0,000112	9,6	14765	0,000068
8,7	6002,9	0,000167	9,2	9897,1	0,000101	9,7	16318	0,000061
8,8	6634,2	0,000151	9,3	10938	0,000091	9,8	18034	0,000055
8,9	7332,0	0,000136	9,4	12088	0,000083	9,9	19930	0,000050
						10,0	22026	0,000045

1.1.1.12. Натуральные логарифмы.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2669	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8785	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2335	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

m	$\ln 10^m$
1	2,3026
2	4,6052
3	6,9078
4	9,2103
5	11,5129

Объяснения к таблице 1.1.1.12 натуральных логарифмов. В отличие от таблиц десятичных логарифмов здесь даны как мантиссы, так и характеристики. Логарифмы чисел, заключенных между 1 и 10, находятся непосредственно в таблице, причем на третий и четвертый десятичные знаки должна быть внесена интерполяционная поправка. Для чисел, бо́льших десяти или меньших единицы, натуральные логарифмы находятся с помощью помещенных в конце таблицы значений логарифмов степеней 10.

1.1.1.13. Длина окружности.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,453	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,918	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,111	9,142	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393
3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99

Продолжение

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,2[illegible]	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,21	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

1.1.1.14. Площадь круга.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1.208	1.227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022
3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54

Продолжение

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,99
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

1.1.1.15. Элементы сегмента круга.

1.1.1.15.1. Длина дуги и площадь сегмента для хорды, равной единице.

Подъем (отношение стрелки к хорде) h/a	Длина дуги l	Площадь сегмента	Подъем (отношение стрелки к хорде) h/a	Длина дуги l	Площадь сегмента
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	0,30	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	0,35	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1,3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	0,40	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	0,45	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	0,50	1,5708	0,3927

1.1.1.15.2. Длина дуги, стрелка, длина хорды и площадь сегмента для радиуса, равного единице.

Центр. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,96	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535

Продолжение

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,6673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,33	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859

Продолжение

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7668	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3.86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455

Продолжение

Центр. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

Объяснения к таблицам 1.1.1.13, 1.1.1.14 и 1.1.1.15.

Таблицы 1.1.1.13 и 1.1.1.14 дают значения длины окружности и площади круга диаметра d, лежащего между $d = 1{,}00$ и $d = 10{,}0$, с четырьмя значащими цифрами. Если диаметр круга лежит вне этих границ, то площадь или длина окружности определяется для диаметра $10^k d$ или $10^{-k} d$. Найденное число затем умножается в случае длины окружности соответственно на 10^k или 10^{-k}, а в случае площади круга – на 10^{2k} или 10^{-2k}. Если число значащих цифр у d больше трех, необходимо прибегнуть к интерполяции.

Примеры. 1) Для $d = 69{,}3$ длина окружности равна 217,7, а площадь круга 3772. 2) Для $d = 0{,}693$ длина окружности равна 2,177, а площадь круга 0,3772.

В таблицах 1.1.1.15 даны элементы сегмента круга (рис. 1.1). Таблица 1.1.1.15.1 относится к сегментам кругов любых радиусов с длиной хорды, равной единице. Если при заданном подъеме (отношении стрелки к хорде) длина хорды равна a, то приведенное в таблице значение длины дуги должно быть умножено на a, а площадь сегмента – на a^2.

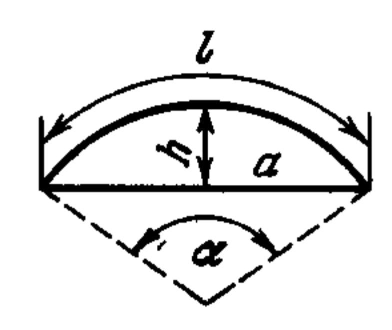


Рис. 1.1

Таблица 1.1.1.15.2 содержит данные, относящиеся к любым сегментам одной и той же окружности радиуса, равного единице. Если длина радиуса равна r, то табличные значения l, h и a

должны быть умножены на r, а площадь сегмента — на r^2. Если задаются длина дуги l (или хорда a) и стрелка h, то радиус сегмента r равен отношению l (или a) к табличному значению длины дуги (или хорды), соответствующему данному значению l/h (или a/h).

Пример. Если длина хорды кругового сегмента $a = 40$ см, а стрелка $h = 6$ см, то для нахождения длины дуги l вычисляем величину $h/a = 0{,}15$ и умножаем соответствующее табличное значение l (таблица 1.1.1.15.1) на 40: $l = 40 \cdot 1{,}0590 = 42{,}36$ см. Радиус сегмента r и центральный угол α определяются с помощью таблицы 1.1.1.15.2. Для $a/h = 6{,}67$ табличное значение для a равно 1,1010 и $\alpha = 66{,}8°$ (линейная интерполяция). Отсюда следует, что $r = 40 : 1{,}1010 = 36{,}33$ см. Теперь можно определить длину дуги l с помощью таблицы 1.1.1.15.2: $l = 36{,}33 \cdot 1{,}1661 = 42{,}36$ см.

Примеры использования таблицы 1.1.1.16.

1) 52° 37′ 23″

50°	= 0,872665
2°	= 0,034907
30′	= 0,008727
7′	= 0,002036
20″	= 0,000097
3″	= 0,000015
	0,918447

52° 37′ 23″ = 0,91845 рад

2) 5,645 рад

5,235988	=	300°
0,409012		
0,401426	=	23°
0,007586		
0,005818	=	20′
0,001768		
0,001745	=	6′
0,000023	=	5″

5,645 рад = 323° 26′ 5″

Радиан — это плоский угол, для которого соответствующая длина дуги равна радиусу (обозначение: рад). Дуга, длина которой равна радиусу, имеет градусную меру 57°17′44,8″.

1.1.1.16. Перевод градусной меры в радианную. (Длина дуги окружности радиуса 1)

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1°	0,017453	21°	0,366519	45°	0,785398	1	0,000291	1″	0,000039
2	0,034907	22	0,383972	50	0,872665	2	0,000582	2	0,000044
3	0,052360	23	0,401426	55	0,959931	3	0,000873	3	0,000048
4	0,069813	24	0,418879	60	1,047198	4	0,001164	4	0,000097
5	0,087266	25	0,436332	65	1,134464	5	0,001454	5	0,000145
6	0,104720	26	0,453786	70	1,221730	6	0,001745	6	0,000194
7	0,122173	27	0,471239	75	1,308997	7	0,002036	7	0,000242
8	0,139626	28	0,488692	80	1,396263	8	0,002327	8	0,000005
9	0,157080	29	0,506145	85	1,483530	9	0,002618	9	0,000010
10	0,174533	30	0,523599	90	1,570796	10	0,002909	10	0,000015
11	0,191986	31	0,541052	100	1,745329	20	0,005818	20	0,000019
12	0,209440	32	0,558505	120	2,094395	30	0,008727	30	0,000024
13	0,226893	33	0,575959	150	2,617994	40	0,011636	40	0,000029
14	0,244346	34	0,593412	180	3,141593	50	0,014544	50	0,000034
15	0,261799	35	0,610865	200	3,490659				
16	0,279253	36	0,628319	250	4,363323				
17	0,296706	37	0,645772	270	4,712389				
18	0,314159	38	0,663225	300	5,235988				
19	0,331613	39	0,680678	360	6,283185				
20	0,349066	40	0,698132	400	6,981317				

1.1.1.17. Пропорциональные части.

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9

Продолжение

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

Продолжение

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	16,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

1.1.1.18. Таблица для квадратичного интерполирования.

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,10			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,225		0,745			

Всем значениям k, заключенным между смежными числами столбца k (как правого, так и левого), соответствует одно и то же значение k_1, помещенное между этими смежными значениями k. «Критическим» (табличным) значениям k соответствует вышележащее k_1.

Примеры. 1) Для $k = 0{,}8$ находим $k_1 = 0{,}040$ (так же как и для всех других k, заключенных между 0,797 и 0,804 или между 0,196 и 0,203).

2) Для $k = 0{,}3$ (или для $k = 0{,}7$) $k_1 = 0{,}052$.

1.1.2. ТАБЛИЦЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.2.1. Гамма-функция.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Значения гамма-функции для $x < 1$ ($x \neq 0, -1, -2, \ldots$) и для $x > 2$ могут быть вычислены при помощи формул

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

Примеры. 1) $\Gamma(0{,}7) = \Gamma(1{,}7)/0{,}7 = 0{,}90864/0{,}7 = 1{,}2981$.

2) $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \cdot \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}88623 = 3{,}32336$.

1.1.2.2. Бесселевы (цилиндрические) функции.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	$-\infty$	$-\infty$	1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	−1,5342	−6,4590	1,003	0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	−0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	−0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	−0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,0041119	0,004521

Продолжение

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
							0,00	0,00
5,0	−0,1776	−0,3276	−0,3085	+0,1479	27,24	24,34	3691	4045
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	3308	3619
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	2966	3239
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	2659	2900
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	2385	2597
5,5	−0,0068	−0,3414	−0,3395	−0,0238	42,69	38,59	2139	2326
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	1918	2083
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	1721	1866
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	1544	1673
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	1386	1499
6,0	+0,1506	−0,2767	−0,2882	−0,1750	67,23	61,34	1244	1344
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	1117	1205
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	1003	1081
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	09001	09691
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	08083	08693
6,5	+0,2601	−0,1538	−0,1732	−0,2741	106,3	97,74	07259	07799
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	06520	06998
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	05857	06280
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	05262	05636
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	04728	05059
7,0	+0,3001	−0,0047	−0,0259	−0,3027	168,6	156,0	04248	04542
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	03817	04078
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	03431	03662
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	03084	03288
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	02772	02953
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	−0,2591	268,2	249,6	02492	02653
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	02240	02383
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	02014	02141
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	01811	01924
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	01629	01729
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	−0,1581	427,6	399,9	01465	01554
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	01317	01396
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	01185	01255
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	01066	01128
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009588	01014
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	−0,0262	683,2	641,6	008626	009120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007761	008200
8,7	−0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006983	007374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006283	006631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005654	005964
9,0	−0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005088	005364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004579	004825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004121	004340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003710	003904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003339	003512
9,5	−0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	003006	003160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002706	002843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002436	002559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	002193	002302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001975	002072
10,0	−0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	001778	001865

1.1.2.3. Полиномы Лежандра (шаровые функции).

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,0	−0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	−0,3125	0,0000
0,05	−0,4962	−0,0747	0,3657	0,0927	−0,2962	−0,1069
0,10	−0,4850	−0,1475	0,3379	0,1788	−0,2488	−0,1995
0,15	−0,4662	−0,2166	0,2928	0,2523	−0,1746	−0,2649
0,20	−0,4400	−0,2800	0,2320	0,3075	−0,0806	−0,2935
0,25	−0,4062	−0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	−0,2799
0,30	−0,3650	−0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	−0,2241
0,35	−0,3162	−0,4178	−0,0187	0,3225	0,2225	−0,1318
0,40	−0,2600	−0,4400	−0,1130	0,2706	0,2926	−0,0146
0,45	−0,1962	−0,4472	−0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	−0,1250	−0,4375	−0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	−0,0462	−0,4091	−0,3590	−0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	−0,3600	−0,4080	−0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	−0,2884	−0,4284	−0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	−0,1925	−0,4121	−0,3652	−0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	−0,0703	−0,3501	−0,4164	−0,2808	−0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	−0,2330	−0,3995	−0,3918	−0,2397
0,85	0,5838	0,2603	−0,0506	−0,2857	−0,4030	−0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	−0,0411	−0,2412	−0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

1.1.2.4. Эллиптические интегралы.

1.1.2.4.1. Эллиптические интегралы 1-го рода: $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$.

φ	α									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

1.1.2.4.2. Эллиптические интегралы 2-го рода: $E(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$.

φ	α									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

1.1.2.4.3. Полные эллиптические интегралы: $k = \sin\alpha$.

α°	K	E	α°	K	E	α°	K	E
0	1,5708	1,5708	30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3506	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	80	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	∞	1,0000

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt,$$

$$\mathbf{K} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}},$$

$$\mathbf{E} = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt.$$

1.1.2.5. Распределение Пуассона.

r	λ							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669
5	–	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227
6	–	–	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164
7	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000008	0,000019
8	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000002

r	λ							
	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,406570	0,367879	0,223130	0,135335	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316
1	0,365913	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263
2	0,164661	0,183940	0,251021	0,270671	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525
3	0,049398	0,061313	0,125510	0,180447	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367
4	0,011115	0,015328	0,047067	0,090224	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367
5	0,002001	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293
6	0,000300	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196
7	0,000039	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540
8	0,000004	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770
9	–	0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231
10	–	–	0,000004	0,000038	0,000216	0,000810	0,002296	0,005292
11	–	–	–	0,000007	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925
12	–	–	–	0,000001	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642
13	–	–	–	–	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197
14	–	–	–	–	–	0,000003	0,000014	0,000056
15	–	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000015
16	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
17	–	–	–	–	–	–	–	0,000001

Продолжение

r	λ						
	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,011109	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,049990	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,112479	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,168718	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007867
4	0,189808	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,170827	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,128120	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,082363	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,046329	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599
9	0,023165	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,010424	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,004264	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736
12	0,001599	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000554	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000178	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000053	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000015	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000004	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000001	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19	–	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	–	–	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	–	–	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	–	–	–	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	–	–	–	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	–	–	–	–	0,000003	0,000016	0,000073
25	–	–	–	–	0,000001	0,000006	0,000029
26	–	–	–	–	–	0,000002	0,000011
27	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
28	–	–	–	–	–	–	0,000001
29	–	–	–	–	–	–	0,000001

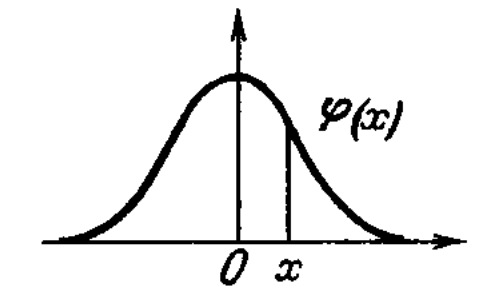


Рис. 1.2

1.1.2.6. Нормальное распределение.

1.1.2.6.1. Плотность распределения вероятности $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ нормированного и центрированного нормального распределения.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989^{-4}	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970^{-4}	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910^{-4}	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814^{-4}	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683^{-4}	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521^{-4}	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332^{-4}	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3141
0,7	3123^{-4}	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897^{-4}	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661^{-4}	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420^{-4}	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179^{-4}	2155	2131	2107	2083	2059	2035	2012	1989	1965
1,2	1942^{-4}	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714^{-4}	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497^{-4}	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295^{-4}	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109^{-4}	1092	1074	1057	1040	1023	1006	9893^{-5}	9728	9566
1,7	9405^{-5}	9246	9089	8933	8780	8628	8478	8329	8183	8038
1,8	7895^{-5}	7754	7614	7477	7341	7206	7074	6943	6814	6687
1,9	6562^{-5}	6438	6316	6195	6077	5960	5844	5730	5618	5508
2,0	5399^{-5}	5292	5186	5082	4980	4879	4780	4682	4586	4491
2,1	4398^{-5}	4307	4217	4128	4041	3955	3871	3788	3706	3626
2,2	3547^{-5}	3470	3394	3319	3246	3174	3103	3034	2965	2898
2,3	2833^{-5}	2768	2705	2643	2582	2522	2463	2406	2349	2294
2,4	2239^{-5}	2186	2134	2083	2033	1984	1936	1888	1842	1797
2,5	1753^{-5}	1709	1667	1625	1585	1545	1506	1468	1431	1394
2,6	1358^{-5}	1323	1289	1256	1223	1191	1160	1130	1100	1071
2,7	1042^{-5}	1014	9871^{-6}	9606	9347	9094	8846	8605	8370	8140
2,8	7915^{-6}	7697	7483	7274	7071	6873	6679	6491	6307	6127
2,9	5953^{-6}	5782	5616	5454	5296	5143	4993	4847	4705	4567
3,0	4432^{-6}	4301	4173	4049	3928	3810	3695	3584	3475	3370
3,1	3267^{-6}	3167	3070	2975	2884	2794	2707	2623	2541	2461
3,2	2384^{-6}	2309	2236	2165	2096	2029	1961	1901	1840	1780
3,3	1723^{-6}	1667	1612	1560	1508	1459	1411	1364	1319	1275
3,4	1232^{-6}	1191	1151	1112	1075	1038	1003	9689^{-7}	9358	9037
3,5	8727^{-7}	8426	8135	7853	7581	7317	7061	6814	6575	6343
3,6	6119^{-7}	5902	5693	5490	5294	5105	4921	4744	4573	4408
3,7	4248^{-7}	4093	3944	3800	3661	3526	3396	3271	3149	3032
3,8	2919^{-7}	2810	2705	2604	2506	2411	2320	2232	2147	2065
3,9	1987^{-7}	1910	1837	1766	1698	1633	1569	1508	1449	1393
4,0	1338^{-7}	1286	1235	1186	1140	1094	1051	1009	9687^{-8}	9299
4,1	8926^{-8}	8567	8222	7890	7570	7263	6967	6683	6410	6147
4,2	5894^{-8}	5652	5418	5194	4979	4772	4573	4382	4199	4023
4,3	3854^{-8}	3691	3535	3386	3242	3104	2972	2845	2723	2606
4,4	2494^{-8}	2387	2284	2185	2090	1999	1912	1829	1749	1672
4,5	1598^{-8}	1528	1461	1396	1334	1275	1218	1164	1112	1062
4,6	1014^{-8}	9684^{-9}	9248	8830	8430	8047	7681	7331	6996	6676
4,7	6370^{-9}	6077	5797	5530	5274	5030	4796	4573	4360	4156
4,8	3961^{-9}	3775	3598	3428	3267	3112	2965	2824	2690	2561
4,9	2439^{-9}	2322	2211	2105	2003	1907	1814	1727	1643	1563

Замечание. Например, 3989^{-4} означает $3989 \cdot 10^{-4}$.

1.1.2.6.2. Функция распределения $\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ нормированного и центрированного нормального распределения.

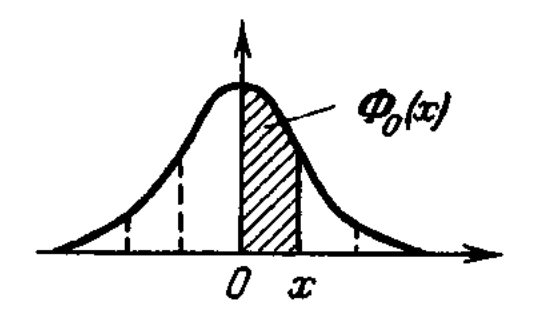


Рис. 1.3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0 000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1 026	064	103	141
0,3	0,1 179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2 019	054	088	123	157	190	224
0,6	0,2 257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	708	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3 023	051	078	106	133
0,9	0,3 159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	655	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4 015
1,3	0,4 032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2*)	860 966	864 474	867 906	871 263	874 545	877 755	880 894	883 962	886 962	889 893
2,3	892 759	895 559	898 296	900 969	903 581	906 133	908 625	911 060	913 437	915 758

*) Начиная с этого места, значение $\Phi_0(x)$ приведено с семью знаками после запятой. Например, запись 2,3 | 892 / 759 означает $\Phi_0(2{,}30) = 0{,}4892759$.

Продолжение

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,4	0,4918 025	920 237	922 397	924 506	926 564	928 572	930 531	932 443	934 309	936 128
2,5	937 903	939 634	941 323	942 969	944 574	946 139	947 664	949 151	950 600	952 012
2,6	953 388	954 729	956 035	957 308	958 547	959 754	960 930	962 074	963 189	964 274
2,7	965 330	966 358	967 359	968 333	969 280	970 202	971 099	971 972	972 821	973 646
2,8	974 449	975 229	975 988	976 726	977 443	978 140	978 818	979 476	980 116	980 738
2,9	981 342	981 929	982 498	983 052	983 589	984 111	984 618	985 110	985 588	986 051
3,0	986 501	986 938	987 361	987 772	988 171	988 558	988 933	989 297	989 650	989 992
3,1	990 324	990 646	990 957	991 260	991 553	991 836	992 112	992 378	992 636	992 886
3,2	993 129	993 363	993 590	993 810	994 024	994 230	994 429	994 523	994 810	994 991
3,3	995 166	995 335	995 499	995 658	995 811	995 959	996 103	996 242	996 376	996 505
3,4	996 631	996 752	996 869	996 982	997 091	997 197	997 299	997 398	997 493	997 585
3,5	997 674	997 759	997 842	997 922	997 999	998 074	998 146	998 215	998 282	998 347
3,6	998 409	998 469	998 527	998 583	998 637	998 689	998 739	998 787	998 834	998 879
3,7	998 922	998 964	999 004	999 043	999 080	999 116	999 150	999 184	999 216	999 247
3,8	999 276	999 305	999 333	999 359	999 385	999 409	999 433	999 456	999 478	999 499
3,9	999 519	999 539	999 557	999 575	999 593	999 609	999 625	999 641	999 655	999 670
4,0	999 683	999 696	999 709	999 721	999 733	999 744	999 755	999 765	999 775	999 784
4,1	999 793	999 802	999 811	999 819	999 826	999 834	999 841	999 848	999 854	999 861
4,2	999 867	999 872	999 878	999 883	999 888	999 893	999 898	999 902	999 907	999 911
4,3	999 915	999 918	999 922	999 925	999 929	999 932	999 935	999 938	999 941	999 943
4,4	999 946	999 948	999 951	999 953	999 955	999 957	999 959	999 961	999 963	999 964
4,5	999 966	999 968	999 969	999 971	999 972	999 973	999 974	999 976	999 977	999 978
5,0	999 997									

1.1.2.7. χ^2-распределение.

В таблице приведены значения (в процентах) квантилей $\chi^2_\alpha(m)$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α.

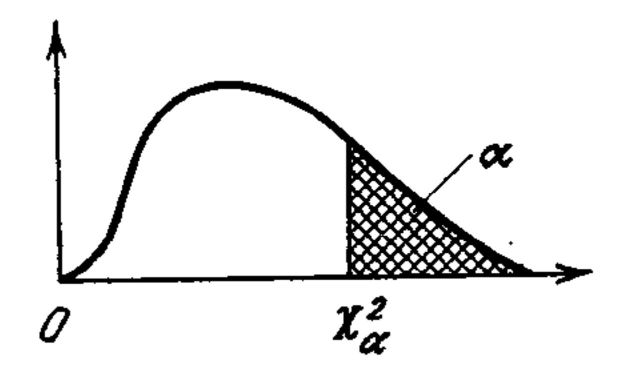


Рис. 1.4

m	α							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,67
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Продолжение

α								m
0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	
1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8	1
3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8	2
4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3	3
6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5	4
7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,8	18,9	20,5	5
8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,5	20,7	22,5	6
9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3	7
11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	22,0	24,3	26,1	8
12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9	9
13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6	10
14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3	11
15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	30,9	32,9	12
17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5	13
18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1	14
19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,6	37,7	15
20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,1	39,3	16
21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,8	17
22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	30,1	42,3	18
23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8	19
25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3	20
26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8	21
27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	45,9	48,3	22
28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,3	49,7	23
29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,7	51,2	24
30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50,1	52,6	25
31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,6	54,1	26
32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	52,9	55,5	27
34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,4	56,9	28
35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	55,7	58,3	29
36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,1	59,7	30

1.1.2.8. ***t*-распределение Стьюдента.**

В таблице приведены значения (в процентах) квантилей $t_{\alpha,m}$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α.

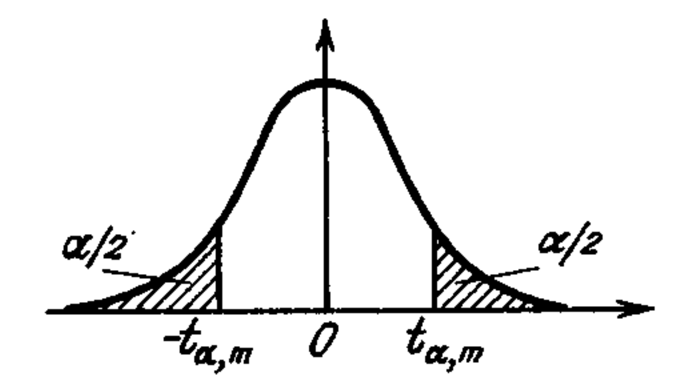


Рис. 1.5

m	α								
	0,10	0,05	0,025	0,020	0,010	0,005	0,003	0,002	0,001
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,598
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,941
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,859
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,707
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

1.1.2.9. z-распределение (см. 5.2.1.3).

r_2	r_1 = 1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4,1535	4,2585	4,2974	4,3175	4,3297	4,3379	4,3482	4,3585	4,3689	4,3794
2	2,2950	2,2976	2,2984	2,2988	2,2991	2,2992	2,2994	2,2997	2,2999	2,3001
3	1,7649	1,7140	1,6915	1,6786	1,6703	1,6645	1,6569	1,6489	1,6404	1,6314
4	1,5270	1,4452	1,4075	1,3856	1,3711	1,3609	1,3473	1,3327	1,3170	1,3000
5	1,3943	1,2929	1,2449	1,2164	1,1974	1,1838	1,1656	1,1457	1,1239	1,0997
6	1,3103	1,1955	1,1401	1,1068	1,0843	1,0680	1,0460	1,0218	0,9948	0,9643
7	1,2526	1,1281	1,0672	1,0300	1,0048	0,9864	0,9614	0,9335	0,9020	0,8658
8	1,2106	1,0787	1,0135	0,9734	0,9459	0,9259	0,8983	0,8673	0,8319	0,7904
9	1,1786	1,0411	0,9724	0,9299	0,9006	0,8791	0,8494	0,8157	0,7769	0,7305
10	1,1535	1,0114	0,9399	0,8954	0,8646	0,8419	0,8104	0,7744	0,7324	0,6816
11	1,1333	0,9874	0,9136	0,8674	0,8354	0,8116	0,7785	0,7405	0,6958	0,6408
12	1,1166	0,9677	0,8919	0,8443	0,8111	0,7864	0,7520	0,7122	0,6649	0,6061
13	1,1027	0,9511	0,8737	0,8248	0,7907	0,7652	0,7295	0,6882	0,6386	0,5761
14	1,0909	0,9370	0,8581	0,8082	0,7732	0,7471	0,7103	0,6675	0,6159	0,5500
15	1,0807	0,9249	0,8448	0,7939	0,7582	0,7314	0,6937	0,6496	0,5961	0,5269
16	1,0719	0,9144	0,8331	0,7814	0,7450	0,7177	0,6791	0,6339	0,5786	0,5064
17	1,0641	0,9051	0,8229	0,7705	0,7335	0,7057	0,6663	0,6199	0,5630	0,4879
18	1,0572	0,8970	0,8138	0,7607	0,7232	0,6950	0,6549	0,6075	0,5491	0,4712
19	1,0511	0,8897	0,8057	0,7521	0,7140	0,6854	0,6447	0,5964	0,5366	0,4560
20	1,0457	0,8831	0,7985	0,7443	0,7058	0,6768	0,6355	0,5864	0,5253	0,4421
21	1,0408	0,8772	0,7920	0,7372	0,6984	0,6690	0,6272	0,5773	0,5150	0,4294
22	1,0363	0,8719	0,7860	0,7309	0,6916	0,6620	0,6196	0,5691	0,5056	0,4176
23	1,0322	0,8670	0,7806	0,7251	0,6855	0,6555	0,6127	0,5615	0,4969	0,4068
24	1,0285	0,8626	0,7757	0,7197	0,6799	0,6496	0,6064	0,5545	0,4890	0,3967
25	1,0251	0,8585	0,7712	0,7148	0,6747	0,6442	0,6006	0,5481	0,4816	0,3872
26	1,0220	0,8548	0,7670	0,7103	0,6699	0,6392	0,5952	0,5422	0,4748	0,3784
27	1,0191	0,8513	0,7631	0,7062	0,6655	0,6346	0,5902	0,5367	0,4685	0,3701
28	1,0164	0,8481	0,7595	0,7023	0,6614	0,6303	0,5856	0,5316	0,4626	0,3624
29	1,0139	0,8451	0,7562	0,6987	0,6576	0,6263	0,5813	0,5269	0,4570	0,3550
30	1,0116	0,8423	0,7531	0,6954	0,6540	0,6226	0,5773	0,5224	0,4519	0,3481
40	0,9949	0,8223	0,7307	0,6712	0,6283	0,5956	0,5481	0,4901	0,4138	0,2952
60	0,9784	0,8025	0,7086	0,6472	0,6028	0,5687	0,5189	0,4574	0,3746	0,2352
120	0,9622	0,7829	0,6867	0,6234	0,5774	0,5419	0,4897	0,4243	0,3339	0,1612
∞	0,9462	0,7636	0,6651	0,5999	0,5522	0,5152	0,4604	0,3908	0,2913	0,0000

1.1.2.10. F-распределение (распределение v^2)*).

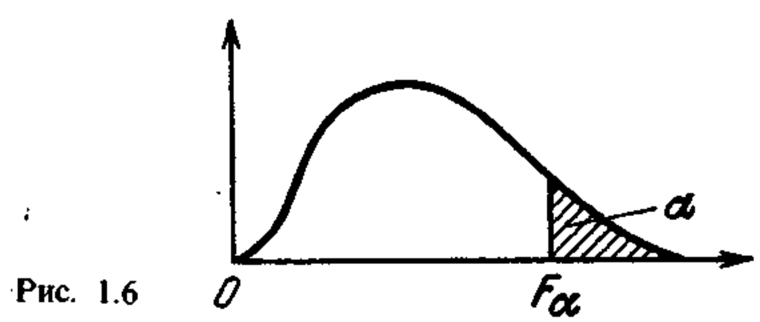


Рис. 1.6

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 **4052**	200 **4999**	216 **5403**	225 **5625**	230 **5764**	234 **5859**	237 **5928**	239 **5981**	241 **6022**	242 **6056**	243 **6082**	244 **6106**
2	18,51 **98,50**	19,00 **99,00**	19,16 **99,17**	19,25 **99,25**	19,30 **99,30**	19,33 **99,33**	19,35 **99,36**	19,37 **99,37**	19,38 **99,39**	19,39 **99,40**	19,40 **99,41**	19,41 **99,42**
3	10,13 **34,12**	9,55 **30,82**	9,28 **29,46**	9,12 **28,71**	9,01 **28,24**	8,94 **27,91**	8,89 **27,67**	8,85 **27,49**	8,81 **27,34**	8,79 **27,23**	8,76 **27,13**	8,74 **27,05**
4	7,71 **21,20**	6,94 **18,00**	6,59 **16,69**	6,39 **15,98**	6,26 **15,52**	6,16 **15,21**	6,09 **14,98**	6,04 **14,80**	6,00 **14,66**	5,96 **14,55**	5,94 **14,45**	5,91 **14,37**
5	6,61 **16,26**	5,79 **13,27**	5,41 **12,06**	5,19 **11,39**	5,05 **10,97**	4,95 **10,67**	4,88 **10,46**	4,82 **10,29**	4,77 **10,16**	4,74 **10,05**	4,70 **9,96**	4,68 **9,89**
6	5,99 **13,74**	5,14 **10,92**	4,76 **9,78**	4,53 **9,15**	4,39 **8,75**	4,28 **8,47**	4,21 **8,26**	4,15 **8,10**	4,10 **7,98**	4,06 **7,87**	4,03 **7,79**	4,00 **7,72**
7	5,59 **12,25**	4,74 **9,55**	4,35 **8,45**	4,12 **7,85**	3,97 **7,46**	3,87 **7,19**	3,79 **7,00**	3,73 **6,84**	3,68 **6,72**	3,64 **6,62**	3,60 **6,54**	3,57 **6,47**
8	5,32 **11,26**	4,46 **8,65**	4,07 **7,59**	3,84 **7,01**	3,69 **6,63**	3,58 **6,37**	3,50 **6,18**	3,44 **6,03**	3,39 **5,91**	3,35 **5,81**	3,31 **5,73**	3,28 **5,67**
9	5,12 **10,56**	4,26 **8,02**	3,86 **6,99**	3,63 **6,42**	3,48 **6,06**	3,37 **5,80**	3,29 **5,61**	3,23 **5,47**	3,18 **5,35**	3,14 **5,26**	3,10 **5,18**	3,07 **5,11**
10	4,96 **10,04**	4,10 **7,56**	3,71 **6,55**	3,48 **5,99**	3,33 **5,64**	3,22 **5,39**	3,14 **5,20**	3,07 **5,06**	3,02 **4,94**	2,98 **4,85**	2,94 **4,77**	2,91 **4,71**
11	4,84 **9,65**	3,98 **7,21**	3,59 **6,22**	3,36 **5,67**	3,20 **5,32**	3,09 **5,07**	3,01 **4,89**	2,95 **4,74**	2,90 **4,68**	2,85 **4,54**	2,82 **4,46**	2,79 **4,40**
12	4,75 **9,33**	3,89 **6,93**	3,49 **5,95**	3,26 **5,41**	3,11 **5,06**	3,00 **4,82**	2,91 **4,64**	2,85 **4,50**	2,80 **4,39**	2,75 **4,30**	2,72 **4,22**	2,69 **4,16**
13	4,67 **9,07**	3,81 **6,70**	3,41 **5,74**	3,18 **5,21**	3,03 **4,86**	2,92 **4,62**	2,83 **4,44**	2,77 **4,30**	2,71 **4,19**	2,67 **4,10**	2,63 **4,02**	2,60 **3,96**
14	4,60 **8,86**	3,74 **6,51**	3,34 **5,56**	3,11 **5,04**	2,96 **4,70**	2,85 **4,46**	2,76 **4,28**	2,70 **4,14**	2,65 **4,03**	2,60 **3,94**	2,57 **3,86**	2,53 **3,80**
15	4,54 **8,68**	3,68 **6,36**	3,29 **5,42**	3,06 **4,89**	2,90 **4,56**	2,79 **4,32**	2,71 **4,14**	2,64 **4,00**	2,59 **3,89**	2,54 **3,80**	2,51 **3,78**	2,48 **3,67**
16	4,49 **8,53**	3,63 **6,23**	3,24 **5,29**	3,01 **4,77**	2,85 **4,44**	2,74 **4,20**	2,66 **4,03**	2,59 **3,89**	2,54 **3,78**	2,49 **3,69**	2,46 **3,62**	2,42 **3,55**
17	4,45 **8,40**	3,59 **6,11**	3,20 **5,18**	2,96 **4,67**	2,81 **4,34**	2,70 **4,10**	2,61 **3,93**	2,55 **3,79**	2,49 **3,68**	2,45 **3,59**	2,41 **3,52**	2,38 **3,46**

*) В таблице даны значения квантилей $v^2_{1-\alpha}$ (m_1, m_2) для $\alpha = 0{,}05$ (светлый шрифт) и для $\alpha = 0{,}01$ (полужирный шрифт) в зависимости от числа степеней свободы m_1 и m_2 (m^1 – число степеней свободы для большей дисперсии, m_2 – число степеней свободы для меньшей дисперсии).

Продолжение

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
245 **6143**	246 **6169**	248 **6209**	249 **6235**	250 **6261**	251 **6287**	252 **6302**	253 **6323**	253 **6334**	254 **6352**	254 **6361**	254 **6366**	1
19,42 **99,43**	19,43 **99,44**	19,44 **99,45**	19,45 **99,46**	19,46 **99,47**	19,47 **99,47**	19,48 **99,48**	19,48 **99,48**	19,49 **99,49**	19,49 **99,49**	19,50 **99,50**	19,50 **99,50**	2
8,71 **26,92**	8,69 **26,83**	8,66 **26,69**	8,64 **26,60**	8,62 **26,50**	8,59 **26,41**	8,58 **26,35**	8,57 **26,27**	8,55 **26,23**	8,54 **26,18**	8,53 **26,14**	8,53 **26,12**	3
5,87 **14,25**	5,84 **14,15**	5,80 **14,02**	5,77 **13,93**	5,75 **13,84**	5,72 **13,74**	5,70 **13,69**	5,68 **13,61**	5,66 **13,57**	5,65 **13,52**	5,64 **13,48**	5,63 **13,46**	4
4,64 **9,77**	4,60 **9,68**	4,56 **9,55**	4,53 **9,47**	4,50 **9,38**	4,46 **9,29**	4,44 **9,24**	4,42 **9,17**	4,41 **9,13**	4,39 **9,08**	4,37 **9,04**	4,36 **9,02**	5
3,96 **7,60**	3,92 **7,52**	3,87 **7,39**	3,84 **7,31**	3,81 **7,23**	3,77 **7,14**	3,75 **7,09**	3,72 **7,02**	3,71 **6,99**	3,69 **6,93**	3,68 **6,90**	3,67 **6,88**	6
3,53 **6,36**	3,49 **6,27**	3,44 **6,16**	3,41 **6,07**	3,38 **5,99**	3,34 **5,91**	3,32 **5,86**	3,29 **5,78**	3,27 **5,75**	3,25 **5,70**	3,24 **5,67**	3,23 **5,65**	7
3,24 **5,56**	3,20 **5,48**	3,15 **5,36**	3,12 **5,28**	3,08 **5,20**	3,05 **5,12**	3,02 **5,07**	3,00 **5,00**	2,97 **4,96**	2,95 **4,91**	2,94 **4,88**	2,93 **4,86**	8
3,03 **5,00**	2,99 **4,92**	2,93 **4,81**	2,90 **4,73**	2,86 **4,65**	2,83 **4,57**	2,80 **4,52**	2,77 **4,45**	2,76 **4,42**	2,73 **4,36**	2,72 **4,33**	2,71 **4,31**	9
2,86 **4,60**	2,83 **4,52**	2,77 **4,41**	2,74 **4,33**	2,70 **4,25**	2,66 **4,17**	2,64 **4,12**	2,61 **4,05**	2,59 **4,01**	2,56 **3,96**	2,55 **3,93**	2,54 **3,91**	10
2,74 **4,29**	2,70 **4,21**	2,65 **4,10**	2,61 **4,02**	2,57 **3,94**	2,53 **3,86**	2,51 **3,81**	2,47 **3,74**	2,46 **3,71**	2,43 **3,66**	2,42 **3,62**	2,40 **3,60**	11
2,64 **4,05**	2,60 **3,97**	2,54 **3,86**	2,51 **3,78**	2,47 **3,70**	2,43 **3,62**	2,40 **3,57**	2,36 **3,49**	2,35 **3,47**	2,32 **3,41**	2,31 **3,38**	2,30 **3,36**	12
2,55 **3,86**	2,51 **3,78**	2,46 **3,66**	2,42 **3,59**	2,38 **3,51**	2,34 **3,43**	2,31 **3,38**	2,28 **3,30**	2,26 **3,27**	2,23 **3,22**	2,22 **3,19**	2,21 **3,17**	13
2,48 **3,70**	2,44 **3,62**	2,39 **3,51**	2,35 **3,43**	2,31 **3,35**	2,27 **3,27**	2,24 **3,22**	2,21 **3,14**	2,19 **3,11**	2,16 **3,06**	2,14 **3,03**	2,13 **3,00**	14
2,42 **3,56**	2,38 **3,49**	2,33 **3,37**	2,29 **3,29**	2,25 **3,21**	2,20 **3,13**	2,18 **3,08**	2,15 **3,00**	2,12 **2,98**	2,10 **2,92**	2,08 **2,89**	2,07 **2,87**	15
2,37 **3,45**	2,33 **3,37**	2,28 **3,26**	2,24 **3,18**	2,19 **3,10**	2,15 **3,02**	2,12 **2,97**	2,09 **2,86**	2,07 **2,86**	2,04 **2,81**	2,02 **2,78**	2,01 **2,75**	16
2,33 **3,35**	2,29 **3,27**	2,23 **3,16**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,10 **2,92**	2,08 **2,87**	2,04 **2,79**	2,02 **2,76**	1,99 **2,71**	1,97 **2,68**	1,96 **2,65**	17

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	4,41 **8,29**	3,55 **6,01**	3,16 **5,09**	2,93 **4,58**	2,77 **4,05**	2,66 **4,01**	2,58 **3,84**	2,51 **3,71**	2,46 **3,60**	2,41 **3,51**	2,37 **3,43**	2,34 **3,37**
19	4,38 **8,18**	3,52 **5,93**	3,13 **5,01**	2,90 **4,50**	2,74 **4,17**	2,63 **3,94**	2,54 **3,77**	2,48 **3,63**	2,42 **3,52**	2,38 **3,43**	2,34 **3,36**	2,31 **3,30**
20	4,35 **8,10**	3,49 **5,85**	3,10 **4,94**	2,87 **4,43**	2,71 **4,10**	2,60 **3,87**	2,51 **3,70**	2,45 **3,56**	2,39 **3,46**	2,35 **3,37**	2,31 **3,29**	2,28 **3,23**
21	4,32 **8,02**	3,47 **5,78**	3,07 **4,87**	2,84 **4,37**	2,68 **4,04**	2,57 **3,81**	2,49 **3,64**	2,42 **3,51**	2,37 **3,40**	2,32 **3,31**	2,28 **3,24**	2,25 **3,17**
22	4,30 **7,95**	3,44 **5,72**	3,05 **4,82**	2,82 **4,81**	2,66 **3,99**	2,55 **3,76**	2,46 **3,59**	2,40 **3,45**	2,34 **3,35**	2,30 **3,26**	2,26 **3,18**	2,23 **3,12**
23	4,28 **7,88**	3,42 **5,66**	3,03 **4,76**	2,80 **4,26**	2,64 **3,94**	2,53 **3,71**	2,44 **3,54**	2,37 **3,41**	2,32 **3,30**	2,27 **3,21**	2,24 **3,14**	2,20 **3,07**
24	4,26 **7,82**	3,40 **5,61**	3,01 **4,72**	2,78 **4,22**	2,62 **3,90**	2,51 **3,67**	2,42 **3,50**	2,36 **3,36**	2,30 **3,26**	2,25 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,03**
25	4,24 **7,77**	3,39 **5,57**	2,99 **4,68**	2,76 **4,18**	2,60 **3,86**	2,49 **3,63**	2,40 **3,46**	2,34 **3,32**	2,28 **3,22**	2,24 **3,13**	2,20 **3,06**	2,16 **2,99**
26	4,23 **7,72**	4,37 **5,53**	2,98 **4,64**	2,74 **4,14**	2,59 **3,82**	2,47 **3,59**	2,39 **3,42**	2,32 **3,29**	2,27 **3,18**	2,22 **3,09**	2,18 **3,02**	2,15 **2,96**
27	4,21 **7,68**	3,35 **5,49**	2,96 **4,60**	2,73 **4,11**	2,57 **3,78**	2,46 **3,56**	2,37 **3,39**	2,31 **3,26**	2,25 **3,15**	2,20 **3,06**	2,16 **2,99**	2,13 **2,83**
28	4,20 **7,64**	3,34 **5,45**	2,95 **4,57**	2,71 **4,07**	2,56 **3,76**	2,45 **3,53**	2,36 **3,36**	2,29 **3,23**	2,24 **3,12**	2,19 **3,03**	2,15 **2,96**	2,12 **2,90**
29	4,18 **7,60**	3,33 **5,42**	2,93 **4,54**	2,70 **4,04**	2,55 **3,73**	2,43 **3,50**	2,35 **3,33**	2,28 **3,20**	2,22 **3,09**	2,18 **3,00**	2,14 **2,93**	2,10 **2,87**
30	4,17 **7,56**	3,32 **5,39**	2,92 **4,51**	2,69 **4,02**	2,53 **3,70**	2,42 **3,47**	2,33 **3,30**	2,27 **3,17**	2,21 **3,07**	2,16 **2,98**	2,13 **2,90**	2,09 **2,84**
32	4,15 **7,50**	3,29 **5,34**	2,90 **4,46**	2,67 **3,97**	2,51 **3,65**	2,40 **3,43**	2,31 **3,25**	2,24 **3,13**	2,19 **3,02**	2,14 **2,93**	2,10 **2,86**	2,07 **2,80**
34	4,13 **7,44**	3,28 **5,29**	2,88 **4,42**	2,65 **3,93**	2,49 **3,61**	2,38 **3,39**	2,29 **3,22**	2,23 **3,09**	2,17 **2,98**	2,12 **2,89**	2,08 **2,82**	2,05 **2,76**
36	4,11 **7,40**	3,26 **5,25**	2,87 **4,38**	2,63 **3,89**	2,48 **3,57**	2,36 **3,35**	2,28 **3,18**	2,21 **3,05**	2,15 **2,95**	2,11 **2,86**	2,07 **2,79**	2,03 **2,72**
38	4,10 **7,35**	3,24 **5,21**	2,85 **4,34**	2,62 **3,86**	2,46 **3,54**	2,35 **3,32**	2,26 **3,15**	2,19 **3,02**	2,14 **2,91**	2,09 **2,82**	2,05 **2,75**	2,02 **2,69**
40	4,08 **7,31**	3,23 **5,18**	2,84 **4,31**	2,61 **3,83**	2,45 **3,51**	2,34 **3,29**	2,25 **3,12**	2,18 **2,99**	2,12 **2,89**	2,08 **2,80**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**
42	4,07 **7,28**	3,22 **5,15**	2,83 **4,29**	2,59 **3,80**	2,44 **3,49**	2,32 **3,27**	2,24 **3,10**	2,17 **2,97**	2,11 **2,86**	2,06 **2,78**	2,03 **2,70**	1,99 **2,64**
44	4,06 **7,25**	3,21 **5,12**	2,82 **4,26**	2,58 **3,78**	2,43 **3,47**	2,31 **3,24**	2,23 **3,08**	2,16 **2,95**	2,10 **2,84**	2,05 **2,75**	2,01 **2,68**	1,98 **2,62**
46	4,05 **7,22**	3,20 **5,10**	2,81 **4,24**	2,57 **3,76**	2,42 **3,44**	2,30 **3,22**	2,22 **3,06**	2,15 **2,93**	2,09 **2,82**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,97 **2,60**

Продолжение

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
2,29 **3,27**	2,25 **3,19**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,06 **2,84**	2,04 **2,78**	2,00 **2,71**	1,98 **2,68**	1,95 **2,62**	1,93 **2,59**	1,92 **2,57**	18
2,26 **3,19**	2,21 **3,12**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,07 **2,84**	2,03 **2,76**	2,00 **2,71**	1,96 **2,63**	1,94 **2,60**	1,91 **2,55**	1,90 **2,51**	1,88 **2,49**	19
2,22 **3,13**	2,18 **3,05**	2,12 **2,94**	2,08 **2,86**	2,04 **2,78**	1,99 **2,69**	1,97 **2,64**	1,92 **2,56**	1,91 **2,54**	1,88 **2,48**	1,86 **2,44**	1,84 **2,42**	20
2,20 **3,07**	2,16 **2,99**	2,10 **2,88**	2,05 **2,80**	2,01 **2,72**	1,96 **2,64**	1,94 **2,58**	1,89 **2,51**	1,88 **2,48**	1,84 **2,42**	1,82 **2,38**	1,81 **2,36**	21
2,17 **3,02**	2,13 **2,94**	2,07 **2,83**	2,03 **2,75**	1,98 **2,67**	1,94 **2,58**	1,91 **2,53**	1,87 **2,46**	1,85 **2,42**	1,81 **2,36**	1,80 **2,33**	1,78 **2,31**	22
2,15 **2,97**	2,11 **2,89**	2,05 **2,78**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,91 **2,54**	1,88 **2,48**	1,84 **2,41**	1,82 **2,37**	1,79 **2,32**	1,77 **2,28**	1,76 **2,26**	23
2,13 **2,93**	2,09 **2,85**	2,03 **2,74**	1,98 **2,66**	1,94 **2,58**	1,89 **2,49**	1,86 **2,44**	1,82 **2,36**	1,80 **2,33**	1,77 **2,27**	1,75 **2,24**	1,73 **2,21**	24
2,11 **2,89**	2,07 **2,81**	2,01 **2,70**	1,96 **2,62**	1,92 **2,54**	1,87 **2,45**	1,84 **2,40**	1,80 **2,32**	1,78 **2,29**	1,75 **2,23**	1,73 **2,19**	1,71 **2,17**	25
2,10 **2,86**	2,05 **2,78**	1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,90 **2,50**	1,85 **2,42**	1,82 **2,36**	1,78 **2,28**	1,76 **2,25**	1,73 **2,19**	1,70 **2,16**	1,69 **2,13**	26
2,08 **2,82**	2,04 **2,75**	1,97 **2,63**	1,93 **2,55**	1,88 **2,47**	1,84 **2,38**	1,81 **2,33**	1,76 **2,25**	1,74 **2,22**	1,71 **2,16**	1,68 **2,12**	1,67 **2,10**	27
2,06 **2,80**	2,02 **2,71**	1,96 **2,60**	1,91 **2,52**	1,87 **2,44**	1,82 **2,35**	1,79 **2,30**	1,75 **2,22**	1,73 **2,19**	1,69 **2,13**	1,67 **2,09**	1,65 **2,06**	28
2,05 **2,77**	2,01 **2,69**	1,94 **2,57**	1,90 **2,49**	1,85 **2,41**	1,80 **2,33**	1,77 **2,27**	1,73 **2,19**	1,71 **2,16**	1,67 **2,10**	1,65 **2,06**	1,64 **2,03**	29
2,04 **2,74**	1,99 **2,66**	1,93 **2,55**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,79 **2,30**	1,76 **2,25**	1,72 **2,16**	1,70 **2,13**	1,66 **2,07**	1,64 **2,03**	1,62 **2,01**	30
2,01 **2,70**	1,97 **2,62**	1,91 **2,50**	1,86 **2,42**	1,82 **2,34**	1,77 **2,25**	1,74 **2,20**	1,69 **2,12**	1,67 **2,08**	1,63 **2,02**	1,61 **1,98**	1,59 **1,96**	32
1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,89 **2,46**	1,84 **2,38**	1,80 **2,30**	1,75 **2,21**	1,71 **2,16**	1,67 **2,08**	1,65 **2,04**	1,61 **1,98**	1,59 **1,94**	1,57 **1,91**	34
1,98 **2,62**	1,93 **2,54**	1,87 **2,43**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,73 **2,17**	1,69 **2,12**	1,65 **2,04**	1,62 **2,00**	1,59 **1,94**	1,56 **1,90**	1,55 **1,87**	36
1,96 **2,59**	1,92 **2,51**	1,85 **2,40**	1,81 **2,32**	1,76 **2,23**	1,71 **2,14**	1,68 **2,09**	1,63 **2,00**	1,61 **1,97**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,53 **1,84**	38
1,95 **2,56**	1,90 **2,48**	1,84 **2,37**	1,79 **2,29**	1,74 **2,20**	1,69 **2,11**	1,66 **2,06**	1,61 **1,97**	1,59 **1,94**	1,55 **1,87**	1,53 **1,83**	1,51 **1,80**	40
1,93 **2,54**	1,89 **2,46**	1,83 **2,34**	1,78 **2,26**	1,73 **2,18**	1,68 **2,09**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,57 **1,91**	1,53 **1,85**	1,51 **1,80**	1,49 **1,78**	42
1,92 **2,52**	1,88 **2,44**	1,81 **2,32**	1,77 **2,24**	1,72 **2,15**	1,67 **2,06**	1,63 **2,01**	1,58 **1,92**	1,56 **1,89**	1,52 **1,82**	1,49 **1,78**	1,48 **1,75**	44
1,91 **2,50**	1,87 **2,42**	1,80 **2,30**	1,76 **2,22**	1,71 **2,13**	1,65 **2,04**	1,62 **1,99**	1,57 **1,90**	1,55 **1,86**	1,51 **1,80**	1,48 **1,75**	1,46 **1,73**	46

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
	7,20	**5,08**	**4,22**	**3,74**	**3,43**	**3,20**	**3,04**	**2,91**	**2,80**	**2,72**	**2,64**	**2,58**
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
	7,17	**5,06**	**4,20**	**3,72**	**3,41**	**3,19**	**3,02**	**2,89**	**2,79**	**2,70**	**2,63**	**2,56**
55	4,02	3,16	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93
	7,12	**5,01**	**4,16**	**3,68**	**3,37**	**3,15**	**2,98**	**2,85**	**2,75**	**2,66**	**2,59**	**2,53**
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
	7,08	**4,98**	**4,13**	**3,65**	**3,34**	**3,12**	**2,95**	**2,82**	**2,72**	**2,63**	**2,56**	**2,50**
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90
	7,04	**4,95**	**4,10**	**3,62**	**3,31**	**3,09**	**2,93**	**2,80**	**2,69**	**2,61**	**2,53**	**2,47**
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89
	7,01	**4,92**	**4,08**	**3,60**	**3,29**	**3,07**	**2,91**	**2,78**	**2,67**	**2,59**	**2,51**	**2,45**
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88
	6,96	**4,88**	**4,04**	**3,56**	**3,26**	**3,04**	**2,87**	**2,74**	**2,64**	**2,55**	**2,48**	**2,42**
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85
	6,90	**4,82**	**3,98**	**3,51**	**3,21**	**2,99**	**2,82**	**2,69**	**2,59**	**2,50**	**2,43**	**2,37**
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83
	6,84	**4,78**	**3,94**	**3,47**	**3,17**	**2,95**	**2,79**	**2,66**	**2,55**	**2,47**	**2,40**	**2,33**
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
	6,81	**4,75**	**3,92**	**3,45**	**3,14**	**2,92**	**2,76**	**2,63**	**2,53**	**2,44**	**2,37**	**2,31**
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
	6,76	**4,71**	**3,88**	**3,41**	**3,11**	**2,89**	**2,73**	**2,60**	**2,50**	**2,41**	**2,34**	**2,27**
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
	6,70	**4,66**	**3,83**	**3,36**	**3,06**	**2,85**	**2,69**	**2,55**	**2,46**	**2,37**	**2,29**	**2,23**
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
	6,66	**4,63**	**3,80**	**3,34**	**3,04**	**2,82**	**2,66**	**2,53**	**2,43**	**2,34**	**2,27**	**2,20**
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	6,63	**4,61**	**3,78**	**3,32**	**3,02**	**2,80**	**2,64**	**2,51**	**2,41**	**2,32**	**2,25**	**2,18**

Продолжение

m_1												m_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45	48
2,48	**2,40**	**2,28**	**2,20**	**2,12**	**2,08**	**1,97**	**1,88**	**1,84**	**1,78**	**1,73**	**1,70**	
1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44	50
2,46	**2,38**	**2,26**	**2,18**	**2,10**	**2,00**	**1,95**	**1,86**	**1,82**	**1,76**	**1,71**	**1,68**	
1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41	55
2,43	**2,34**	**2,23**	**2,15**	**2,06**	**1,96**	**1,91**	**1,82**	**1,78**	**1,71**	**1,67**	**1,64**	
1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,58	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39	60
2,39	**2,31**	**2,20**	**2,12**	**2,03**	**1,94**	**1,88**	**1,79**	**1,75**	**1,68**	**1,63**	**1,60**	
1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37	65
2,37	**2,29**	**2,18**	**2,09**	**2,00**	**1,90**	**1,85**	**1,76**	**1,72**	**1,65**	**1,60**	**1,56**	
1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35	70
2,35	**2,27**	**2,15**	**2,07**	**1,98**	**1,88**	**1,83**	**1,74**	**1,70**	**1,62**	**1,57**	**1,53**	
1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32	80
2,31	**2,23**	**2,12**	**2,03**	**1,94**	**1,85**	**1,79**	**1,70**	**1,66**	**1,58**	**1,53**	**1,49**	
1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	1,28	100
2,26	**2,19**	**2,06**	**1,98**	**1,89**	**1,79**	**1,73**	**1,64**	**1,60**	**1,52**	**1,47**	**1,43**	
1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25	125
2,23	**2,15**	**2,03**	**1,94**	**1,85**	**1,75**	**1,69**	**1,59**	**1,55**	**1,47**	**1,41**	**1,37**	
1,76	1,71	1,64	1,59	1,53	1,48	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22	150
2,20	**2,12**	**2,00**	**1,91**	**1,83**	**1,72**	**1,66**	**1,56**	**1,52**	**1,43**	**1,38**	**1,33**	
1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19	200
2,17	**2,09**	**1,97**	**1,88**	**1,79**	**1,69**	**1,63**	**1,53**	**1,48**	**1,39**	**1,33**	**1,28**	
1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13	400
2,12	**2,04**	**1,92**	**1,84**	**1,74**	**1,64**	**1,57**	**1,47**	**1,42**	**1,32**	**1,24**	**1,19**	
1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08	1000
2,09	**2,02**	**1,89**	**1,81**	**1,71**	**1,61**	**1,54**	**1,44**	**1,38**	**1,28**	**1,19**	**1,11**	
1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00	∞
2,08	**2,00**	**1,88**	**1,79**	**1,70**	**1,59**	**1,52**	**1,41**	**1,36**	**1,25**	**1,15**	**1,00**	

1.1.2.11. Критические числа для испытания Уилкоксона (см. 5.2.3.5).

$\alpha = 0{,}05$

	n_2											n_1
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	–	–	–	–	8,0	9,0	10,0	10,0	11,0	12,0	13,0	2
	–	7,5	8,0	9,5	10,0	11,5	12,0	13,5	14,0	15,5	16,0	3
	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	4
	9,0	10,5	12,0	12,5	14,0	15,5	17,0	18,5	19,0	20,5	22,0	5
			13,0	15,0	16,0	17,0	19,0	20,0	22,0	23,0	25,0	6
15	47,5			16,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5	27,0	7
14	46,0	48,0			19,0	21,0	23,0	25,0	26,0	28,0	29,0	8
13	43,5	45,0	47,5			22,5	25,0	26,5	28,0	30,5	32,0	9
12	41,0	43,0	45,0	47,0			27,0	29,0	30,0	32,0	34,0	10
11	38,5	40,0	42,5	44,0	46,5			30,5	33,0	34,5	37,0	11
10	36,0	38,0	40,0	42,0	43,0	45,0			35,0	37,0	39,0	12
9	33,5	35,0	37,5	39,0	40,5	42,0	44,5			38,5	41,0	13
8	31,0	33,0	34,0	36,0	38,0	39,0	41,0	42,0			43,0	14
7	28,5	30,0	31,5	33,0	34,5	36,0	37,5	39,0	40,5			
6	26,0	27,0	29,0	30,0	32,0	33,0	34,0	36,0	37,0	38,0	39,0	
5	23,5	24,0	25,5	27,0	28,5	30,0	30,5	32,0	33,5	35,0	35,5	
4	20,0	21,0	23,0	24,0	25,0	26,0	27,0	28,0	29,0	30,0	32,0	
3	17,5	18,0	19,5	20,0	21,5	22,0	23,5	24,0	25,5	26,0	27,5	
2	14,0	15,0	15,0	16,0	17,0	18,0	18,0	19,0	20,0	21,0	22,0	
n_1	n_2											
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

$\alpha = 0{,}01$

	n_2											n_1
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	–	–	–	–	–	13,5	15,0	16,5	17,0	18,5	20,0	3
	–	–	12,0	14,0	15,0	17,0	18,0	20,0	21,0	22,0	24,0	4
	–	12,5	14,0	15,5	18,0	19,5	21,0	22,5	24,0	25,5	28,0	5
			16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	27,0	29,0	31,0	6
15	61,5			20,5	22,0	24,5	26,0	28,5	30,0	32,5	34,0	7
14	59,0	62,0			25,0	27,0	29,0	31,0	33,0	35,0	38,0	8
13	55,5	58,0	61,5			29,5	32,0	33,5	36,0	38,5	41,0	9
12	53,0	55,0	58,0	61,0			34,0	36,0	39,0	41,0	44,0	10
11	49,5	52,0	54,5	57,0	59,5			39,5	42,0	44,5	47,0	11
10	46,0	49,0	51,0	53,0	56,0	58,0			44,0	47,0	50,0	12
9	42,5	45,0	47,5	50,0	52,5	54,0	56,5			50,5	53,0	13
8	40,0	42,0	44,0	46,0	48,0	50,0	52,0	54,0			56,0	14
7	36,5	38,0	40,5	42,0	44,5	46,0	48,5	50,0	51,5			
6	33,0	35,0	36,0	38,0	40,0	42,0	44,0	45,0	47,0	49,0	51,0	
5	29,5	31,0	32,5	34,0	35,5	37,0	38,5	41,0	42,5	44,0	45,5	
4	25,0	27,0	28,0	30,0	31,0	32,0	34,0	35,0	37,0	38,0	40,0	
3	20,5	22,0	23,5	25,0	25,5	27,0	28,5	29,0	30,5	32,0	32,5	
2	–	–	–	–	19,0	20,0	21,0	22,0	23,0	24,0	25,0	
n_1	n_2											
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

1.1.2.12. λ-распределение Колмогорова — Смирнова (см. 5.2.3.8).

λ	Q(λ)	λ	Q(λ)	λ	Q(λ)	λ	Q(λ)	λ	Q(λ)	λ	Q(λ)
0,32	0,0000	0,66	0,2236	1,00	0,7300	1,34	0,9449	1,68	0,9929	2,00	0,9993
0,33	0,0001	0,67	0,2396	1,01	0,7406	1,35	0,9478	1,69	0,9934	2,01	0,9994
0,34	0,0002	0,68	0,2558	1,02	0,7508	1,36	0,9505	1,70	0,9938	2,02	0,9994
0,35	0,0003	0,69	0,2722	1,03	0,7608	1,37	0,9531	1,71	0,9942	2,03	0,9995
0,36	0,0005	0,70	0,2888	1,04	0,7704	1,38	0,9556	1,72	0,9946	2,04	0,9995
0,37	0,0008	0,71	0,3055	1,05	0,7798	1,39	0,9580	1,73	0,9950	2,05	0,9996
0,38	0,0013	0,72	0,3223	1,06	0,7889	1,40	0,9603	1,74	0,9953	2,06	0,9996
0,39	0,0019	0,73	0,3391	1,07	0,7976	1,41	0,9625	1,75	0,9956	2,07	0,9996
0,40	0,0028	0,74	0,3560	1,08	0,8061	1,42	0,9646	1,76	0,9959	2,08	0,9996
0,41	0,0040	0,75	0,3728	1,09	0,8143	1,43	0,9665	1,77	0,9962	2,09	0,9997
0,42	0,0055	0,76	0,3896	1,10	0,8223	1,44	0,9684	1,78	0,9965	2,10	0,9997
0,43	0,0074	0,77	0,4064	1,11	0,8299	1,45	0,9702	1,79	0,9967	2,11	0,9997
0,44	0,0097	0,78	0,4230	1,12	0,8374	1,46	0,9718	1,80	0,9969	2,12	0,9997
0,45	0,0126	0,79	0,4395	1,13	0,8445	1,47	0,9734	1,81	0,9971	2,13	0,9998
0,46	0,0160	0,80	0,4559	1,14	0,8514	1,48	0,9750	1,82	0,9973	2,14	0,9998
0,47	0,0200	0,81	0,4720	1,15	0,8580	1,49	0,9764	1,83	0,9975	2,15	0,9998
0,48	0,0247	0,82	0,4880	1,16	0,8644	1,50	0,9778	1,84	0,9977	2,16	0,9998
0,49	0,0300	0,83	0,5038	1,17	0,8706	1,51	0,9791	1,85	0,9979	2,17	0,9998
0,50	0,0361	0,84	0,5194	1,18	0,8765	1,52	0,9803	1,86	0,9980	2,18	0,9999
0,51	0,0428	0,85	0,5347	1,19	0,8823	1,53	0,9815	1,87	0,9981	2,19	0,9999
0,52	0,0503	0,86	0,5497	1,20	0,8877	1,54	0,9826	1,88	0,9983	2,20	0,9999
0,53	0,0585	0,87	0,5645	1,21	0,8930	1,55	0,9836	1,89	0,9984	2,21	0,9999
0,54	0,0675	0,88	0,5791	1,22	0,8981	1,56	0,9846	1,90	0,9985	2,22	0,9999
0,55	0,0772	0,89	0,5933	1,23	0,9030	1,57	0,9855	1,91	0,9986	2,23	0,9999
0,56	0,0876	0,90	0,6073	1,24	0,9076	1,58	0,9864	1,92	0,9987	2,24	0,9999
0,57	0,0987	0,91	0,6209	1,25	0,9121	1,59	0,9873	1,93	0,9988	2,25	0,9999
0,58	0,1104	0,92	0,6343	1,26	0,9164	1,60	0,9880	1,94	0,9989	2,26	0,9999
0,59	0,1228	0,93	0,6473	1,27	0,9206	1,61	0,9888	1,95	0,9990	2,27	0,9999
0,60	0,1357	0,94	0,6601	1,28	0,9245	1,62	0,9895	1,96	0,9991	2,28	0,9999
0,61	0,1492	0,95	0,6725	1,29	0,9283	1,63	0,9902	1,97	0,9991	2,29	0,9999
0,62	0,1632	0,96	0,6846	1,30	0,9319	1,64	0,9908	1,98	0,9992	2,30	0,9999
0,63	0,1778	0,97	0,6964	1,31	0,9354	1,65	0,9914	1,99	0,9993	2,31	1,0000
0,64	0,1927	0,98	0,7079	1,32	0,9387	1,66	0,9919				
0,65	0,2080	0,99	0,7191	1,33	0,9418	1,67	0,9924				

1.1.3. ИНТЕГРАЛЫ И СУММЫ РЯДОВ

1.1.3.1. Таблица сумм некоторых числовых рядов.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e.$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = \frac{1}{e}.$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2.$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{2}{3}.$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots = 1.$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2}.$

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots = \frac{3}{4}.$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = \frac{1}{4}.$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+l-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots l} + \frac{1}{2 \cdot 3 \ldots (l+1)} + \ldots = \frac{1}{(l-1) \cdot (l-1)!}.$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$ 14) $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$ 16) $\sum_{n=1} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \ldots = \frac{7\pi^4}{720}.$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}.$

Числа Бернулли B_k

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = \frac{\pi^{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_k.$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2k}} = 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = \frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k.$

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \ldots = \frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2 \cdot (2k)!} B_k.$

Таблица первых чисел Бернулли

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3617}{510}$	$\frac{43\,867}{798}$	$\frac{174\,611}{330}$	$\frac{854\,513}{138}$

Числа Эйлера E_k

22) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}=1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\cdot(2k)!}E_k.$$

Таблица первых чисел Эйлера

k	1	2	3	4	5	6	7
E_k	1	5	61	1385	50 521	2 702 765	199 360 981

1.1.3.2. Таблица разложения элементарных функций в степенные ряды.

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
	Биномиальный ряд
$(a \pm x)^m$ ($\lvert x\rvert \leqslant a$ при $m>0$) $\lvert x\rvert \leqslant a$ и $a \pm x \neq 0$ при $0>m>-1$, $\lvert x\rvert < a$ при $m \leqslant -1$	преобразованием к виду $a^m\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ сводится к нижеследующим рядам.
	Биномиальные ряды с положительным показателем
$(1 \pm x)^m$ ($m>0$) *) ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=1 \pm mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$
$(1 \pm x)^{1/4}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{1}{4}x-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots$
$(1 \pm x)^{1/3}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots$
$(1 \pm x)^{1/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots$
$(1 \pm x)^{3/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{5/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$)	$1 \pm \frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$
	Биномиальные ряды с отрицательным показателем
$(1 \pm x)^{-m}$ ($\lvert x\rvert < 1$ при $m \geqslant 1$; $\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$ при $0<m<1$)	$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n=1 \mp mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\ldots$
$(1 \pm x)^{-1/4}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$)	$1 \mp \frac{1}{4}x+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-1/3}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$)	$1 \mp \frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-1/2}$ ($\lvert x\rvert \leqslant 1$ и $1 \pm x \neq 0$)	$1 \mp \frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$

*) При m натуральном разложение содержит $m+1$ членов.

Продолжение

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
$(1 \pm x)^{-1}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-3/2}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-2}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-5/2}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots$
$(1 \pm x)^{-3}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2}(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \ldots)$
$(1 \pm x)^{-4}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7x^4 + \ldots)$
$(1 \pm x)^{-5}$ $(\|x\| < 1)$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8x^4 + \ldots)$
	Тригонометрические функции
$\sin x$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$
$\sin(x + a)$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n \sin(a + n\pi/2)}{n!} = \sin a + x\cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \ldots$
$\cos x$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$\cos(x + a)$ $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n \cos(a + n\pi/2)}{n!} = \cos a - x\sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} + \frac{x^4 \cos a}{4!} - \ldots$
$\operatorname{tg} x$ $(\|x\| < \pi/2)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$
$\operatorname{ctg} x$ $(0 < \|x\| < \pi)$	$\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots\right)$
$\sec x$ $(\|x\| < \pi/2)$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \ldots$
$\operatorname{cosec} x$ $(0 < \|x\| < \pi)$	$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15\,120}x^5 + \frac{127}{604\,800}x^7 + \ldots$
	Показательные функции
e^x $(\|x\| < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Продолжение

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
$a^x = e^{x \ln a}$ $(\lvert x\rvert < \infty)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots$
$\frac{x}{e^x - 1}$ $(\lvert x\rvert < 2\pi)$	$1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \ldots$
	Логарифмические функции
$\ln x$ $(x > 0)$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \ldots\right]$
$\ln x$ $(0 < x \leqslant 2)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$
$\ln x$ $(x > 1/2)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{nx^n} = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \ldots$
$\ln(1+x)$ $(-1 < x \leqslant 1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
$\ln(1-x)$ $(-1 \leqslant x < 1)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$
$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{Arth} x$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$
$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{Arcth} x$ $(\lvert x\rvert > 1)$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots\right)$
$\ln \lvert \sin x\rvert$ $(0 < \lvert x\rvert < \pi)$	$\ln \lvert x\rvert - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n(2n)!} = \ln \lvert x\rvert - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots$
$\ln \cos x$ $(\lvert x\rvert < \pi/2)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1) B_n x^{2n}}{n(2n)!} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \ldots$
$\ln \lvert \operatorname{tg} x\rvert$ $(0 < \lvert x\rvert < \pi/2)$	$\ln \lvert x\rvert + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_n}{n(2n)!} x^{2n} = \ln \lvert x\rvert + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \ldots$
	Обратные тригонометрические функции
$\arcsin x$ $(\lvert x\rvert \leqslant 1)$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$
$\arccos x$ $(\lvert x\rvert \leqslant 1)$	$\frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots\right)$

Продолжение

Функция и область сходимости	Разложение в ряд
arctg x ($\|x\| \leqslant 1$)	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
arctg x ($\|x\| \geqslant 1$)	$\pm\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots$ *)
arcctg x ($\|x\| \leqslant 1$)	$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$
	Гиперболические функции
sh x ($\|x\| < \infty$)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$
ch x ($\|x\| < \infty$)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
th x ($\|x\| < \pi/2$)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \ldots$
cth x ($0 < \|x\| < \pi$)	$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots$
sch x ($\|x\| < \pi/2$)	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \ldots$
csch x ($0 < \|x\| < \pi$)	$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15\,120} + \ldots$
	Обратные гиперболические функции
Arsh x ($\|x\| < 1$)	$x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n(2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$
Arch x **) ($x > 1$)	$\pm\left[\ln(2x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\cdot 2n} \frac{1}{x^{2n}}\right] = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots\right]$
Arth x ($\|x\| < 1$)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$
Arcth x ($\|x\| > 1$)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots$

*) Первый член берется со знаком + при $x > 1$ и со знаком − при $x < -1$.

**) Функция двузначная (см. 1.2.2.3)

1.1.3.3. Таблица неопределенных интегралов.

Общие указания. 1. Постоянная интегрирования опущена всюду, за исключением случаев, когда интеграл может быть представлен в различных формах с различными произвольными постоянными.

2. Во всех формулах, где в состав первообразной функции входит выражение, содержащее $\ln f(x)$, его следует понимать как $\ln|f(x)|$; знак абсолютной величины везде для простоты опущен.

3. В тех случаях, когда первообразная функция представлена в виде степенного ряда, ее нельзя выразить через конечное число элементарных функций.

1.1.3.3.1. Интегралы от рациональных функций.

Интегралы, содержащие $ax+b$.

Обозначение: $X = ax + b$.

1) $\int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1$; при $n = -1$ см. № 2). 2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$.

3) $\int xX^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$ ($n \neq -1, -2$; при $n = -1, -2$ см. №№ 5 и 6).

4) $\int x^n X^m dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n dX$

(применяется при $m < n$ или при m целом и n дробном, в этих случаях $(X-b)^m$ раскрывается по формуле бинома Ньютона (см. 2.2.2.1); $n \neq -1, -2, \ldots, -m$).

5) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X$. 6) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X$. 7) $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2}\right)$.

8) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}}\right)$ ($n \neq 1, 2$).

9) $\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}X^2 - 2bX + b^2 \ln X\right)$. 10) $\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3}\left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X}\right)$.

11) $\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right)$.

12) $\int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}}\right]$ ($n \neq 1, 2, 3$).

13) $\int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2X - b^3 \ln X\right)$.

14) $\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X}\right)$. 15) $\int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{a^4}\left(X - 3b \ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2}\right)$.

16) $\int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3}\right)$.

17) $\int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}}\right]$ ($n \neq 1, 2, 3, 4$).

18) $\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}$. 19) $\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln \frac{X}{x} - \frac{ax}{X}\right)$.

20) $\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln \frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2}\right)$. 21) $\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n}\left[\ln \frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right]$ ($n \geq 2$).

22) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}$. 23) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -a\left[\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} \ln \frac{X}{x}\right]$.

24) $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -a\left[\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{X}{x}\right]$.

25) $\int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left[-\sum_{i=2}^{n} C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na \ln \frac{X}{x}\right]$ ($n \geq 2$).

26) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{b^3}\left[a^2 \ln \frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2}\right]$.

27) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right]$.

28) $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right]$.

29) $$\int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^i \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2}\ln\frac{X}{x}\right] \quad (n \geqslant 3).$$

30) $$\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}}\sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^i \frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}}$$

[если знаменатель члена под знаком $\sum$ обращается в нуль, то такой член заменяется следующим: $C_{m+n-2}^{m-1}(-a)^{m-1}\ln\frac{X}{x}$].

Обозначение: $\Delta = bf - ag$.

31) $$\int \frac{ax+b}{fx+g}dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2}\ln(fx+g).$$ 32) $$\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0).$$

33) $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{g}{f}\ln(fx+g)\right] \quad (\Delta \neq 0).$$

34) $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}\right) \quad (\Delta \neq 0).$$

35) $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

36) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2}\ln(a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2}\ln(b+x) \quad (a \neq b).$$

37) $$\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

38) $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

39) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

Интегралы, содержащие $ax^2 + bx + c$.

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$.

40) $$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\text{для } \Delta > 0), \\ -\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Arth}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\dfrac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} & (\text{для } \Delta < 0). \end{cases}$$

41) $$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$ (см. № 40).

42) $$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2}\int\frac{dx}{X}$$ (см. № 40).

43) $$\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$ 44) $$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln X - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$ (см. № 40).

45) $$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$ (см. № 40). 46) $$\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$

47) $$\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int\frac{dx}{X}$$ (см. № 40).

48) $$\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$ (см. № 40).

49) $$\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a}\int\frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a}\int\frac{x\,dx}{X^n}$$ (см. № 43, 46).

50) $$\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$$

($m \neq 2n-1$; при $m = 2n-1$ см. № 51).

51) $$\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{X^n} = \frac{1}{a}\int\frac{x^{2n-3}\,dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a}\int\frac{x^{2n-3}\,dx}{X^n} - \frac{b}{a}\int\frac{x^{2n-2}\,dx}{X^n}.$$

52) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

53) $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c}\int\frac{dx}{xX^{n-1}}$.

54) $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2}\ln\frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right)\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

55) $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-1}X^n}$ $(m > 1)$.

56) $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\left[f\ln\frac{(fx+g)^2}{X}\right] + \frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 40).

Интегралы, содержащие $a^2 \pm x^2$.

Обозначения:

$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} & \text{для знака } +, \\ \operatorname{Arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+x}{a-x} & \text{для знака } - \text{ при } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a} & \text{для знака } - \text{ при } |x| > a. \end{cases}$$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + x^2$, а нижний – к $X = a^2 - x^2$.

57) $\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{a}Y$. 58) $\int\frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3}Y$. 59) $\int\frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5}Y$.

60) $\int\frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{dx}{X^n}$. 61) $\int\frac{x\,dx}{X} = \pm\frac{1}{2}\ln X$. 62) $\int\frac{x\,dx}{X^2} = \mp\frac{1}{2X}$.

63) $\int\frac{x\,dx}{X^3} = \mp\frac{1}{4X^2}$. 64) $\int\frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{1}{2nX^n}$ $(n \neq 0)$.

65) $\int\frac{x^2\,dx}{X} = \pm x \mp aY$. 66) $\int\frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp\frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a}Y$.

67) $\int\frac{x^2\,dx}{X^3} = \mp\frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3}Y$. 68) $\int\frac{x^2\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n}\int\frac{dx}{X^n}$ $(n \neq 0)$.

69) $\int\frac{x^3\,dx}{X} = \pm\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln X$. 70) $\int\frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln X$. 71) $\int\frac{x^3\,dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}$.

72) $\int\frac{x^3\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $(n > 1)$. 73) $\int\frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}$.

74) $\int\frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$. 75) $\int\frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

76) $\int\frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y$. 77) $\int\frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y$.

78) $\int\frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y$. 79) $\int\frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$.

80) $\int\frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}$. 81) $\int\frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$.

82) $\int\frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \pm b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \pm \frac{b}{2}Y\right]$.

Интегралы, содержащие $a^3 \pm x^3$.

Обозначение: $X = a^3 \pm x^3$; в случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^3 + x^3$, а нижний – к $X = a^3 - x^3$.

83) $\int\frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$. 84) $\int\frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int\frac{dx}{X}$ (см. № 83).

85) $\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$.

86) $\int\frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3}\int\frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85). 87) $\int\frac{x^2\,dx}{X} = \pm\frac{1}{3}\ln X$.

88) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}$. 89) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm x \mp a^3 \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

90) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83). 91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{X}$.

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3 X} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{X}$. 93) $\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^3 x} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

94) $\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{a^6 x} \mp \frac{x^2}{3a^6 X} \mp \frac{4}{3a^6} \int \frac{x\,dx}{X}$ (см. № 85).

95) $\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2a^3 x^2} \mp \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

96) $\int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^6 x^2} \mp \frac{x}{3a^6 X} \mp \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{X}$ (см. № 83).

Интегралы, содержащие $a^4 + x^4$.

97) $\int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$.

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}$.

99) $\int \frac{x^2\,dx}{a^4 + x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2}$.

100) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4} \ln (a^4 + x^4)$.

Интегралы, содержащие $a^4 - x^4$.

101) $\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a + x}{a - x} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. 102) $\int \frac{x\,dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

103) $\int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \ln \frac{a + x}{a - x} - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. 104) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{4} \ln (a^4 - x^4)$.

Некоторые случаи разложения дроби на элементарные.

105) $\frac{1}{(a + bx)(f + gx)} \equiv \frac{1}{fb - ag} \left(\frac{b}{a + bx} - \frac{g}{f + gx} \right)$.

106) $\frac{1}{(x + a)(x + b)(x + c)} \equiv \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} + \frac{C}{x + c}$,

где $A = \frac{1}{(b - a)(c - a)}$, $B = \frac{1}{(a - b)(c - b)}$, $C = \frac{1}{(a - c)(b - c)}$.

107) $\frac{1}{(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)} \equiv \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} + \frac{C}{x + c} + \frac{D}{x + d}$,

где $A = \frac{1}{(b - a)(c - a)(d - a)}$, $B = \frac{1}{(a - b)(c - b)(d - b)}$ и т. д.

108) $\frac{1}{(a + bx^2)(f + gx^2)} \equiv \frac{1}{fb - ag} \left(\frac{b}{a + bx^2} - \frac{g}{f + gx^2} \right)$.

1.1.3.3.2. Интегралы от иррациональных функций.

Интегралы, содержащие $\sqrt{x}$ и $a^2 \pm b^2 x$.

Обозначения:

$$X = a^2 \pm b^2 x, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{x}}{a} & \text{для знака } +, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{a + b\sqrt{x}}{a - b\sqrt{x}} & \text{для знака } -. \end{cases}$$

В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + b^2 x$, а нижний — к $X = a^2 - b^2 x$.

109) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm \frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3} Y$. 110) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X} = \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} Y$.

111) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp \frac{\sqrt{x}}{b^2 X} \pm \frac{1}{ab^3} Y$. 112) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm \frac{2\sqrt{x^3}}{b^2 X} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4 X} - \frac{3a}{b^5} Y$.

113) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab}Y.$ 114) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3}Y.$

115) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2X} + \frac{1}{a^3b}Y.$ 116) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X} \mp \frac{3b}{a^5}Y.$

Другие интегралы, содержащие $\sqrt{x}$.

117) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4+x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

118) $\int \frac{dx}{(a^4+x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

119) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$ 120) $\int \frac{dx}{(a^4-x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} + \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$.
Обозначение: $X = ax + b$.

121) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{b}{3a}\sqrt{X^3}.$ 122) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$

123) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$ 124) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$

125) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{X}.$ 126) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}.$

127) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{X}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{X}-\sqrt{b}}{\sqrt{X}+\sqrt{b}} & \text{для } b>0, \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{X}{-b}} & \text{для } b<0. \end{cases}$$

128) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = 2\sqrt{X} + b\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

129) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

130) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

131) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}.$ 132) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}.$

133) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}(5\sqrt{X^7}-7b\sqrt{X^5}).$ 134) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right).$

135) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

136) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right).$ 137) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right).$

138) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127).

139) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (см. № 127). 140) $\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}.$

141) $\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

142) $\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

143) $\int \frac{X^{n/2}\,dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int\frac{X^{(n-2)/2}}{x}dx.$ 144) $\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}.$

145) $\int \frac{dx}{x^2 X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax+b}$ *и* $\sqrt{fx+g}$.
Обозначения: $X = ax+b,\ Y = fx+g,\ \Delta = bf - ag$.

146) $\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-af}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{fX}{aY}} & \text{для } af<0, \\ \frac{2}{\sqrt{af}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{fX}{aY}} = \frac{1}{2\sqrt{af}}\ln\left(\sqrt{aY}+\sqrt{fX}\right) & \text{для } af>0. \end{cases}$

147) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146). 148) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}$

149) $\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta f}}\operatorname{arctg}\frac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{для } \Delta f<0, \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ln\frac{f\sqrt{X}-\sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X}+\sqrt{\Delta f}} & \text{для } \Delta f>0. \end{cases}$

150) $\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta+2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146).

151) $\int \sqrt{\frac{Y}{X}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (см. № 146).

152) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (см. № 149).

153) $\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a}\left(\sqrt{X}\,Y^n - n\Delta\int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}}\right)$.

154) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta}\left[\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n-\frac{3}{2}\right)a\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^{n-1}}\right]$.

155) $\int \sqrt{X}\,Y^n\,dx = \frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}\,Y^{n+1} + \Delta\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}}\right)$ (см. № 153).

156) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^{n-1}}\right)$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{a^2-x^2}$.
Обозначение: $X = a^2 - x^2$.

157) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$. 158) $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}$.

159) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$. 160) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}$.

161) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$. 162) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}$.

163) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$. 164) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin\frac{x}{a}$. 165) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}$.

166) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. 167) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}$.

168) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$. 169) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}$.

170) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

171) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)$. 172) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}$.

173) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}.$

174) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$ 175) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

176) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3x\sqrt{X}}{2} - \frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

177) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 178) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$ 179) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$

180) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin\frac{x}{a}.$ 181) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

182) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 183) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

184) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2+a^2}$.
Обозначение: $X = x^2 + a^2$.

185) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2}[x\sqrt{X} + a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

186) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

187) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}[x\sqrt{X} + a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

188) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$ 189) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

190) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

191) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 192) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

193) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$ 194) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

195) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$ 196) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

197) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$ 198) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

199) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1.$

200) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

201) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C =$

$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

202) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$ 203) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

204) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

205) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$ 206) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

207) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$ 208) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

209) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$ 210) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

211) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

212) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2 - a^2}$.
Обозначение: $X = x^2 - a^2$.

213) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

214) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

215) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}[x\sqrt{X} - a^2\ln(x+\sqrt{X})] + C_1.$

216) $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$ 217) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} - a\arccos\frac{a}{x}.$

218) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

219) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$ 220) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

221) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$ 222) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{2} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

223) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$ 224) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$

225) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$ 226) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}.$

227) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{X})\right] + C_1.$$

228) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

229) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

230) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$ 231) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3\arccos\frac{a}{x}.$

232) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} - \frac{3a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3x}{2}\sqrt{X} - \frac{3a^2}{2}\ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$

233) $\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3a}{2}\arccos\frac{a}{x}$. 234) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}$.

235) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}$. 236) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1$.

237) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}$. 238) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x}$.

239) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right)$. 240) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}$.

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
Обозначения: $X = ax^2+bx+c$, $\Delta = 4ac - b^2$, $k = \frac{4a}{\Delta}$.

241) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{aX} + 2ax + b) + C & \text{для } a>0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } a>0,\ \Delta>0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b) & \text{для } a>0,\ \Delta=0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{для } a<0,\ \Delta<0. \end{cases}$$

242) $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}$. 243) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right)$.

244) $\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}$.

245) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

246) $\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

247) $\int X^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

248) $\int X^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,dx$.

249) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241). 250) $\int \frac{x\,dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}$.

251) $\int \frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$ (см. № 244).

252) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

253) $\int \frac{x^2\,dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x + 2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

254) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X} - \frac{b}{4ak}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (см. № 241).

255) $\int xX\sqrt{X}\,dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,dx$ (см. № 246).

256) $\int xX^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,dx$ (см. № 248).

257) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \left(x - \frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{X}\,dx$ (см. № 245).

258) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{cX}}{x}+\frac{2c}{x}+b\right)+C & \text{для } c>0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{Arsh}\frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}}+C_1 & \text{для } c>0,\ \Delta>0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{bx+2c}{x} & \text{для } c>0,\ \Delta=0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{для } c<0,\ \Delta<0. \end{cases}$$

259) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (см. № 258).

260) $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (см. № 241, 258).

261) $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$ (см. № 241, 258).

262) $$\int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x}dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx + c\int\frac{X^{(2n-1)/2}}{x}dx$$ (см. № 248, 260).

Интегралы, содержащие другие иррациональные выражения.

263) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}.$$ 264) $$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}.$$

265) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

266) $$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

267) $$\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}} & (ag-bf>0), \\ \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf-ag}}\ln\frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}} & (ag-bf<0). \end{cases}$$

268) $$\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}.$$ 269) $$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}.$$

270) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}.$$ 271) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na}\arccos\frac{a}{\sqrt{x^n}}.$$

272) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$$

Рекуррентные формулы для интеграла от дифференциального бинома.

273) $$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m(ax^n+b)^{p+1}\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}(ax^n+b)^p\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{a(m+np+1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx\right].$$

1.1.3.3.3. Интегралы от тригонометрических функций.

Интегралы, содержащие синус.

274) $$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax.$$ 275) $$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

276) $\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$ 277) $\int \sin^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$

278) $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$ ($n > 0$ — целое).

279) $\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$ 280) $\int x^2 \sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$

281) $\int x^3 \sin ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$

282) $\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$ $(n > 0)$.

283) $\int \frac{\sin ax}{x}dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \ldots$ *).

284) $\int \frac{\sin ax}{x^2}dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax\,dx}{x}$ (см. № 322).

285) $\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$ (см. № 324).

286) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax).$

287) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$ 288) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

289) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n > 1)$.

290) $\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left(ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots \right.$

$\left. \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n(ax)^{2n+1} + \ldots\right)$ **).

291) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\sin ax.$

292) $\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)a\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n > 2)$.

293) $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$ 294) $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

295) $\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

296) $\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

297) $\int \frac{\sin ax\,dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right).$

298) $\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

299) $\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

---

*) Определенный интеграл $\int_0^x \frac{\sin t\,dt}{t}$ называется *интегральным синусом*:

$$\operatorname{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

**) B_n — числа Бернулли.

300) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$

301) $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$

302) $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right).$

303) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} ax).$

304) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax.$

305) $\displaystyle\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ ($|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 275).

306) $$\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{b\operatorname{tg}\dfrac{ax}{2}+c}{\sqrt{b^2-c^2}} & (b^2 > c^2), \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\dfrac{b\operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2}\right)+c-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2}\right)+c+\sqrt{c^2-b^2}} & (b^2 < c^2). \end{cases}$$

307) $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

308) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax\,(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

309) $\displaystyle\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} + \frac{b}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

310) $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)} + \frac{c}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (см. № 306).

311) $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b > 0)$.

312) $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b^2 > c^2,\ b > 0)$,

$\displaystyle = \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax - b}$ $(c^2 > b^2,\ b > 0)$.

Интегралы, содержащие косинус.

313) $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$ 314) $\displaystyle\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$

315) $\displaystyle\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax.$ 316) $\displaystyle\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$

317) $\displaystyle\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$

318) $\displaystyle\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$ 319) $\displaystyle\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$

320) $\displaystyle\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax.$

321) $\displaystyle\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$

322) $\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \ldots$ *).

323) $\int \frac{\cos ax\,dx}{x^2} = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\sin ax\,dx}{x}$ (см. № 283).

324) $\int \frac{\cos ax\,dx}{x^n} = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\sin ax\,dx}{x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 285).

325) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax)$.

326) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax$. 327) $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$.

328) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1)$.

329) $\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10 \cdot 8!} + \ldots + \frac{E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \ldots\right]$ **).

330) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax$.

331) $\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{(n-1)a\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 2)$.

332) $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$. 333) $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$.

334) $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}$. 335) $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\sin\frac{ax}{2}$.

336) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$. 337) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$.

338) $\int \frac{dx}{\cos ax(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$.

339) $\int \frac{dx}{\cos ax(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$.

340) $\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}$. 341) $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}$.

342) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}$. 343) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}$.

344) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}\arcsin\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}$. 345) $\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax$.

346) $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ $(|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 314).

347) $$\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{(b-c)\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2-c^2}} & (b^2 > c^2), \\ \dfrac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\dfrac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \sqrt{c^2-b^2}} & (b^2 < c^2). \end{cases}$$

*) Определенный интеграл $-\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt$ $(x > 0)$ называется *интегральным косинусом* и обозначается $\operatorname{Ci}(x)$:

$$\operatorname{Ci}(x) = C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \ldots,$$

где C – постоянная Эйлера.

**) E_n – числа Эйлера.

348) $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (см. № 347).

349) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax\,(b + c\cos ax)} = \frac{1}{ab}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (см. № 347).

350) $\displaystyle\int \frac{dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2 - b^2)(b + c\cos ax)} - \frac{b}{c^2 - b^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (см. № 347).

351) $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2 - c^2)(b + c\cos ax)} - \frac{c}{b^2 - c^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax}$ (см. № 347).

352) $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2 + c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ $(b > 0)$.

353) $$\int \frac{dx}{b^2 - c^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2 - c^2}} & (b^2 > c^2,\ b > 0), \\ \dfrac{1}{2ab\sqrt{c^2 - b^2}}\ln\dfrac{b\operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2 - b^2}}{b\operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2 - b^2}} & (c^2 > b^2,\ b > 0). \end{cases}$$

Интегралы, содержащие синус и косинус.

354) $\displaystyle\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax.$

355) $\displaystyle\int \sin^2 ax\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$

356) $\displaystyle\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax$ $(n \neq -1)$.

357) $\displaystyle\int \sin ax\cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax$ $(n \neq -1)$.

358) $\displaystyle\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} ax\cos^m ax\,dx$

(понижение степени n; $m > 0$ и $n > 0$),

$$= \frac{\sin^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax\cos^{m-2} ax\,dx$$

(понижение степени m; $m > 0$ и $n > 0$).

359) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg} ax.$

360) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{\sin ax}\right].$

361) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax}\right).$

362) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 ax\cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln\operatorname{tg} ax - \frac{1}{2\sin^2 ax}\right).$

363) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln\operatorname{tg} ax + \frac{1}{2\cos^2 ax}\right).$

364) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos^2 ax} = -\frac{2}{a}\operatorname{ctg} 2ax.$

365) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$

366) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 ax\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2\sin^2 ax} + \frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

367) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax\cos^{n-2} ax}$ $(n \neq 1)$ (см. № 361, 363).

368) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n ax\cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax\cos ax}$ $(n \neq 1)$ (см. № 360, 362).

369) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n ax\cos^m ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\,\frac{1}{\sin^{n-1} ax\cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax\cos^m ax}$

(понижение степени n; $m > 0$ и $n > 1$),

$$= \frac{1}{a(m-1)}\,\frac{1}{\sin^{n-1} ax\cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^n ax\cos^{m-2} ax}$$

(понижение степени m; $n > 0$ и $m > 1$).

370) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax} = \frac{1}{a}\sec ax.$ 371) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a\cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C_1.$

372) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$ 373) $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

374) $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$

375) $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n \neq 1)$ (см. № 325, 326, 328).

376) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln\cos ax\right).$ 377) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$

378) $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right]$ $(n \neq 1,\ n \neq 3).$

379) $\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax}dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos ax}$ $(n \neq 1).$

380) $$\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax}dx = \begin{cases} \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax}dx & (m \neq 1), \\ -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos^m ax} & (m \neq n), \\ \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} & (m \neq 1). \end{cases}$$

381) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec} ax.$

382) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$ 383) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax}.$

384) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$ 385) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

386) $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} dx}\right)$ $(n \neq 1)$ (см. № 289).

387) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln\sin ax\right).$ 388) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right).$

389) $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right]$ $(n \neq 1,\ n \neq 3).$

390) $\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax}$ $(n \neq 1).$

391) $$\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} = \begin{cases} -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} & (m \neq 1), \\ \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} & (m \neq n), \\ -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} & (m \neq 1). \end{cases}$$

392) $\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

393) $\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \mp \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

394) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$ 395) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}.$

396) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

397) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

398) $\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

399) $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

400) $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right).$ 401) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm\frac{1}{a}\ln\left(1 \pm \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

402) $\int \frac{dx}{b\sin ax + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\ln\operatorname{tg}\frac{ax+\theta}{2},$ где $\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b}.$

403) $\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c\cos ax} = -\frac{1}{ac}\ln(b + c\cos ax).$ 404) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\sin ax} = \frac{1}{ac}\ln(b + c\sin ax).$

405) $\int \frac{dx}{b + c\cos ax + f\sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2+f^2}\sin(ax+\theta)},$ где $\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+f^2}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{f}$

(см. № 306).

406) $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax + c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{abc}\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg}ax\right).$ 407) $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax - c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln\frac{c\operatorname{tg}ax + b}{c\operatorname{tg}ax - b}.$

408) $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$ ($a^2 \neq b^2$; при $a = b$ см. № 354).

Интегралы, содержащие тангенс.

409) $\int \operatorname{tg}ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax.$ 410) $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg}ax}{a} - x.$

411) $\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a}\ln\cos ax.$ 412) $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx.$

413) $\int x\operatorname{tg}ax\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ *).

414) $\int \frac{\operatorname{tg}ax\,dx}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \ldots$ *).

415) $\int \frac{\operatorname{tg}^n ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax$ ($n \neq -1$).

416) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$ 417) $\int \frac{\operatorname{tg}ax\,dx}{\operatorname{tg}ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

Интегралы, содержащие котангенс.

418) $\int \operatorname{ctg}ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax.$ 419) $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}ax}{a} - x.$

420) $\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} - \frac{\ln\sin ax}{a}.$ 421) $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx$ ($n \neq 1$).

422) $\int x\operatorname{ctg}ax\,dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \ldots$ *).

423) $\int \frac{\operatorname{ctg}ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \ldots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \ldots$ *).

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax}dx = -\frac{1}{a(n+1)}\operatorname{ctg}^{n+1} ax$ ($n \neq -1$). 425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg}ax} = \int \frac{\operatorname{tg}ax\,dx}{\operatorname{tg}ax \pm 1}$ (см. № 417).

1.1.3.3.4. Интегралы от других трансцендентных функций.
Интегралы от гиперболических функций.

426) $\int \operatorname{sh}ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch}ax.$ 427) $\int \operatorname{ch}ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh}ax.$

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh}ax\operatorname{ch}ax - \frac{1}{2}x.$ 429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh}ax\operatorname{ch}ax + \frac{1}{2}x.$

---

*) B_n – числа Бернулли.

430) $$\int \operatorname{sh}^n ax\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx & (n > 0), \\ \dfrac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \dfrac{n+2}{n+1}\displaystyle\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx & (n < 0;\ n \neq -1). \end{cases}$$

431) $$\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx & (n > 0), \\ -\dfrac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \dfrac{n+2}{n+1}\displaystyle\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,dx & (n < 0;\ n \neq -1). \end{cases}$$

432) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{th}\frac{ax}{2}$. 433) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax}$.

434) $\displaystyle\int x \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax$. 435) $\displaystyle\int x \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax$.

436) $\displaystyle\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{ch} ax$. 437) $\displaystyle\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sh} ax$. 438) $\displaystyle\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}$.

439) $\displaystyle\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}$. 440) $\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax) \quad (a^2 \neq b^2)$.

441) $\displaystyle\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax) \quad (a^2 \neq b^2)$.

442) $\displaystyle\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax) \quad (a^2 \neq b^2)$.

443) $\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax)$.

444) $\displaystyle\int \operatorname{ch} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax)$.

445) $\displaystyle\int \operatorname{sh} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax)$.

446) $\displaystyle\int \operatorname{ch} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax)$.

Интегралы от показательных функций.

447) $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$. 448) $\displaystyle\int x e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$. 449) $\displaystyle\int x^2 e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$.

450) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx$. 451) $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$ *).

452) $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx\right) \quad (n \neq 1)$. 453) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln \frac{e^{ax}}{1 + e^{ax}}$.

454) $\displaystyle\int \frac{dx}{b + ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b + ce^{ax})$. 455) $\displaystyle\int \frac{e^{ax}\,dx}{b + ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b + ce^{ax})$.

456) $$\int \frac{dx}{be^{ax} + ce^{-ax}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{arctg}\left(e^{ax}\sqrt{\dfrac{b}{c}}\right) & (ac > 0), \\ \dfrac{1}{2a\sqrt{-bc}}\ln \dfrac{c + e^{ax}\sqrt{-bc}}{c - e^{ax}\sqrt{-bc}} & (bc < 0). \end{cases}$$

---

*) Определенный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}dt$ называется *интегральной показательной функцией* и обозначается $\operatorname{Ei}(x)$. При $x > 0$ интеграл расходится в точке $t = 0$; в этом случае под $\operatorname{Ei}(x)$ понимается главное значение несобственного интеграла (см. 3.1.7.7):

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots,$$

где C – постоянная Эйлера.

457) $\displaystyle\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$. 458) $\displaystyle\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}\,dx}{x}$ (см. № 451).

459) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$. 460) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$.

461) $\displaystyle\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx$ (см. № 447, 459).

462) $\displaystyle\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$ (см. № 447, 460).

463) $\displaystyle\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx]$.

464) $\displaystyle\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx]$.

Интегралы от логарифмических функций.

465) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$. 466) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.

467) $\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x$.

468) $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$ $(n \neq -1)$.

469) $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$ *).

470) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ (см. № 469).

471) $\displaystyle\int x^m\ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right]$ $(m \neq -1)$.

472) $\displaystyle\int x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx$ $(m \neq -1,\ n \neq -1)$ (см. № 470).

473) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$. 474) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^m}dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2x^{m-1}}$ $(m \neq 1)$.

475) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}dx$ $(m \neq 1)$ (см. № 474).

476) $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}dy$, где $y = -(m+1)\ln x$ (см. № 451).

477) $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$. 478) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x$.

479) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\ln x} = \ln\ln x - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$

480) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$.

481) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1}\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$.

482) $\displaystyle\int \ln\sin x\,dx = x\ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \ldots - \frac{2^{2n-1}B_nx^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \ldots$ **).

483) $\displaystyle\int \ln\cos x\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \ldots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} - \ldots$ **).

484) $\displaystyle\int \ln \operatorname{tg} x\,dx = x\ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$ **).

485) $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x)$. 486) $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x)$.

---

*) Определенный интеграл $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ называется *интегральным логарифмом* и обозначается $\operatorname{li} x$. При $x > 1$ интеграл расходится в точке $t = 1$; в этом случае под интегралом понимается главное значение несобственного интеграла. Интегральный логарифм связан с интегральной показательной функцией: $\operatorname{li} x = \operatorname{Ei}(\ln x)$.

**) B_n – числа Бернулли.

487) $\int \frac{\ln(1+x)}{x}dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \ldots$

Интегралы от обратных тригонометрических функций.

488) $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$.

489) $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}$.

490) $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}$.

491) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots$

492) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

493) $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$.

494) $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}$.

495) $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}$.

496) $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} - \ldots$

497) $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

498) $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$.

499) $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$.

500) $\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)$.

501) $\int x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2} \quad (n \neq -1)$.

502) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} + \ldots \quad (|x| < |a|)$.

503) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}$.

504) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1)$.

505) $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$.

506) $\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$.

507) $\int x^2\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)$.

508) $\int x^n\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2} \quad (n \neq -1)$.

509) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} - \frac{x^5}{5^2a^5} + \frac{x^7}{7^2a^7} - \ldots$

510) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}$.

511) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)}$ $(n \neq 1)$.

Интегралы от обратных гиперболических функций.

512) $\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$. 513) $\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}$.

514) $\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$. 515) $\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)$.

1.1.3.4. Таблица некоторых определенных интегралов *).

1.1.3.4.1. Интегралы от показательных функций (в сочетании с алгебраическими, тригонометрическими и логарифмическими).

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$ **) $(a>0,\ n>-1)$.

В частности, при натуральном n этот интеграл равен $n!/a^{n+1}$.

2) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}$ $(a>0,\ n>-1)$.

В частности, при n целом и четном ($n = 2k$) этот интеграл равен $\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}\cdot a^{k+1/2}}$, а при n целом и нечетном ($n = 2k+1$) он равен $\frac{k!}{2a^{k+1}}$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ $(a>0)$. 4) $\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ $(a>0)$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-b^2/(4a^2)}$ $(a>0)$. 6) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}$. 7) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}$.

8) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ $(a>0)$. 9) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772$ ***).

10) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln x\,dx = \frac{1}{4}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C+2\ln 2)$ ***).

11) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln^2 x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C+2\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]$ ***).

1.1.3.4.2. Интегралы от тригонометрических функций (в сочетании с алгебраическими).

12) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\alpha+1}x\cos^{2\beta+1}x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\alpha+1,\ \beta+1) = \frac{\alpha!\beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}$ ****).

---

*) Более полные таблицы определенных интегралов см.: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Наука, 1971; Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды.– М.: Наука, 1981.

**) Γ – гамма-функция.

***) C – постоянная Эйлера.

****) $\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ – бета-функция, или эйлеров интеграл 1-го рода; $\Gamma(x)$ – гамма-функция, или эйлеров интеграл 2-го рода.

Эта формула справедлива для любых α и β (последнее равенство — при α и β натуральных); может применяться для $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx$, $\int_0^{\pi/2}\sqrt[3]{\sin x}\,dx$, $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$ и т. п.

13) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0.\end{cases}$ 14) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^p x}{x}dx = 2^{p-2}\frac{[\Gamma(p/2)]^2}{\Gamma(p)}$,

если p — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

15) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^s}dx = \frac{\pi a^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin(s\pi/2)}$, $0<s<2$. 16) $\int_0^{\alpha}\frac{\cos ax\,dx}{x} = \infty$ ($\alpha\neq 0$, a — произвольное число).

17) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^s}dx = \frac{\pi a^{s-1}}{2\Gamma(s)\cos(s\pi/2)}$ $(0<s<1)$. 18) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0.\end{cases}$

19) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx = \ln\frac{b}{a}$ $(a,\ b>0)$. 20) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos ax}{x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |a|<1,\\ \frac{\pi}{4}, & |a|=1,\\ 0, & |a|>1.\end{cases}$

21) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

22) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|ab|}\operatorname{sign} a$. 23) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$.

24) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}|a|$. 25) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

26) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}$, $|k|<1$. 27) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k}\arcsin k$, $|k|<1$.

28) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}(\mathrm{K}-\mathrm{E})$*) $(|k|<1)$.

29) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}[\mathrm{E}-(1-k^2)\mathrm{K}]$*) $(|k|<1)$.

30) $\int_0^{\pi}\frac{\cos ax\,dx}{1-2b\cos x+b^2} = \frac{\pi b^a}{1-b^2}$ ($a\geqslant 0$ — целое, $|b|<1$).

1.1.3.4.3. Интегралы от логарифмических функций (в сочетании с алгебраическими и тригонометрическими).

31) $\int_0^1\ln\ln\frac{1}{x}dx = -C\approx -0{,}5772$**). 32) $\int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}$ (сводится к № 6).

*) E и K — *полные эллиптические интегралы*: $\mathrm{E}=\mathrm{E}(k,\ \pi/2)$, $\mathrm{K}=F(k,\ \pi/2)$.

**) C — постоянная Эйлера.

33) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (сводится к № 7). 34) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{8}$. 35) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

36) $\int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x)\ln x}dx = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1,\ \alpha+\beta > -1)$.

37) $\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{(1+x)\ln x}dx = \ln \operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}$ $(0 < a < 1)$. 38) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1)$*) $(-1 < a < \infty)$.

39) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. 40) $\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

41) $\int_0^{\pi/2} \sin x\ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1$. 42) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ln x\,dx = -\frac{\pi}{2}(C+\ln a)$*) $(a > 0)$.

43) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ln^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}C^2 + \frac{\pi^3}{24} + \pi C\ln a + \frac{\pi}{2}\ln^2 a$ $(a > 0)$.

44) $\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ $(a \geqslant b)$.

45) $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi\ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

46) $\int_0^{\pi/2} \ln\operatorname{tg} x\,dx = 0$. 47) $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

1.1.3.4.4. Интегралы от алгебраических функций.

48) $\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^\beta dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \mathrm{B}(\alpha+1,\ \beta+1)$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$**).

(сводится к № 10).

49) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ $(0 < a < 1)$. 50) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)x^a} = -\pi\operatorname{ctg} a\pi$ $(0 < a < 1)$.

51) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}dx = \frac{\pi}{b\sin\frac{a\pi}{b}}$ $(0 < a < b)$. 52) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}$ $(a > 0)$.

53) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos a + x^2} = \frac{a}{2\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$. 54) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x\cos a + x^2} = \frac{a}{\sin a}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$.

---

*) C — постоянная Эйлера.

**) $\mathrm{B}(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ — бета-функция, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

1.2. ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Действительная функция от действительного переменного x – это однозначное отображение f подмножества действительных чисел во множество действительных чисел: $y = f(x)$. Множество точек с координатами $(x, f(x))$ называется *графиком функции*. Графики функций – это в общем случае кривые, которые пересекаются с каждой прямой, параллельной оси y, не более чем в одной точке (см. также 2.4).

1.2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.2.1.1. Целые рациональные функции.

Постоянные функции. Функция $y = 0$ отображает каждое действительное число x в число нуль. Считается, что она не является никакой (конечной) степенью аргумента. Ее график – ось x. Функция $y = a$ $(a \neq 0)$ есть функция нулевой степени от аргумента. Графиком такой функции является прямая, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке $(0, a)$.

Линейные функции: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Графиком такой функции является прямая, проходящая через точки $A(-b/a, 0)$ и $B(0, b)$ (рис. 1.7, *а*). При $b = 0$ точки A и B совпадают

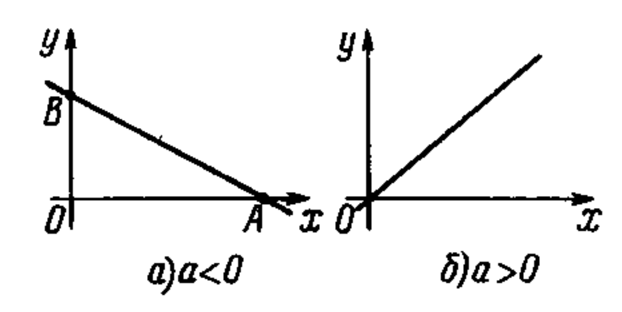


Рис. 1.7

и прямая проходит через начало координат (рис. 1.7, *б*).

Функция имеет один нуль:

$$x_0 = -b/a.$$

Если $a > 0$, то функция монотонно возрастает; если $a < 0$, то она монотонно убывает. Если $b = 0$ и $a > 0$, то говорят, что *y прямо пропорционально x*, а a называют *коэффициентом пропорциональности*.

Квадратичные функции: $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. График – парабола с осью симметрии,

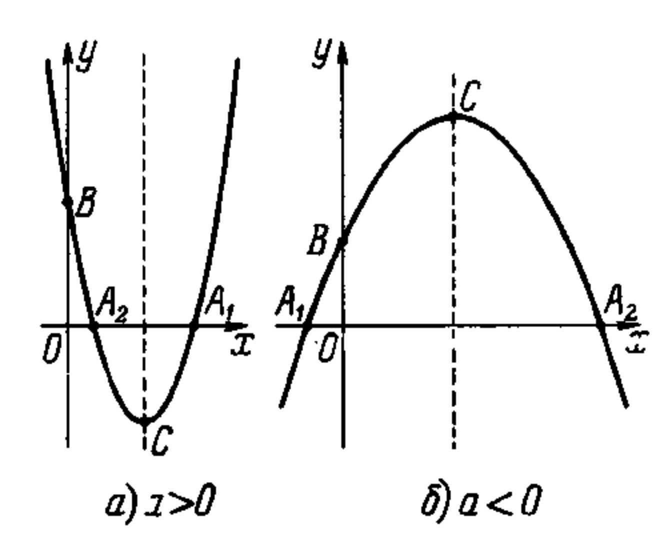


Рис. 1.8

параллельной оси y, и вершиной $C(-b/(2a), (4ac - b^2)/(4a))$ (рис. 1.8). Функция имеет не больше двух нулей. График пересекает ось y в точке $B(0, c)$. В случае $\Delta = 4ac - b^2 < 0$ он пересекает ось x в точках $A_1((-b - \sqrt{-\Delta})/(2a), 0)$ и $A_2((-b + \sqrt{-\Delta})/(2a), 0)$. При $\Delta = 0$ кривая касается оси x в точке $(-b/(2a), 0)$ (касание 2-го порядка); при $\Delta > 0$ точек пересечения с осью x нет. Если $a > 0$, то функция в точке $x_C = -b/(2a)$ (абсцисса вершины) имеет минимум, а при $a < 0$ – максимум (см. 3.2.1).

Функции третьей степени:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0).$$

График этой функции может иметь различный вид. У него имеется по крайней мере одна (а может быть, и две, и три) точка пересечения с осью x и ровно одна точка перегиба. У функции либо нет экстремумов, либо их два (в последнем случае один максимум и один минимум). Для более точного описания кривой нужны значение коэффициента a, значение $\Delta = 3ac - b^2$ и значение дискриминанта функции

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18\,abcd.$$

Если $a > 0$, то $y \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Если $a < 0$, то $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

При $\Delta > 0$ функция не имеет экстремумов, имеется точка перегиба E (рис. 1.9, *а*).

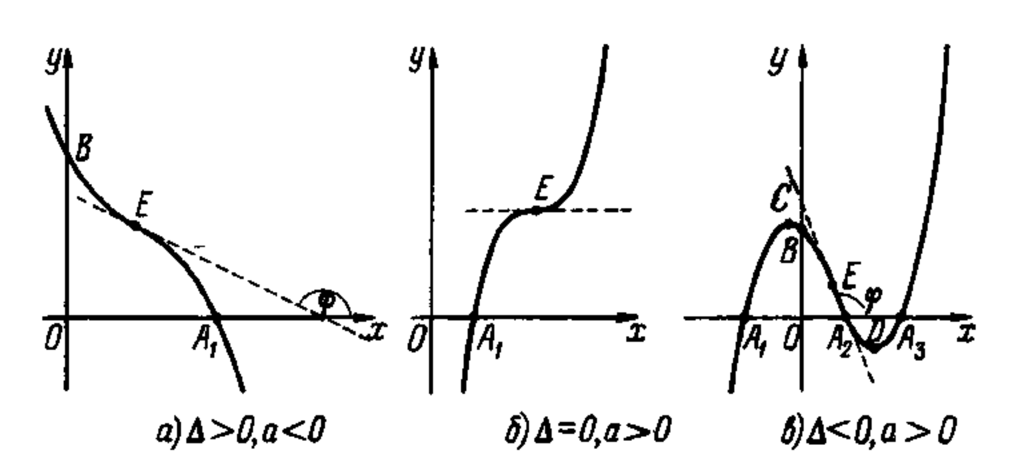


Рис. 1.9

При $\Delta = 0$ функция не имеет экстремумов, имеется точка перегиба E. Касательная в точке перегиба E параллельна оси x (рис. 1.9, *б*).

При $\Delta < 0$, $a > 0$ у функции имеется один максимум в точке $x_{max} = (-b - \sqrt{-\Delta})/(3a)$ и один минимум в точке $x_{min} = (-b + \sqrt{-\Delta})/(3a)$; имеется точка перегиба E (рис. 1.9, *в*).

При $D > 0$ кривая пересекает ось x в трех точках: A_1, A_2, A_3.

При $D = 0$ у кривой две или одна точка пересечения с осью x, причем ровно в одной точке пересечения имеет место касание. При этом точка касания в первом случае считается второго, а во втором случае – третьего порядка.

При $D < 0$ имеется одна (простая) точка пересечения с осью x.

Точка перегиба E имеет координаты $\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$ и является центром симметрии кривой. Касательная в точке E имеет наклон $\operatorname{tg}\varphi = \Delta/(3a)$. Если $\Delta = 0$, то график этой функции называется *кубической параболой* (рис. 1.9, *б*).

Целые рациональные функции n-й степени:

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

$n \geqslant 0$ – целое. Графики этих функций – кривые без особых точек и без асимптот, имеющие не более n точек пересечения с осью x, не более $n-1$ экстремумов и не более $n-2$ точек перегиба,

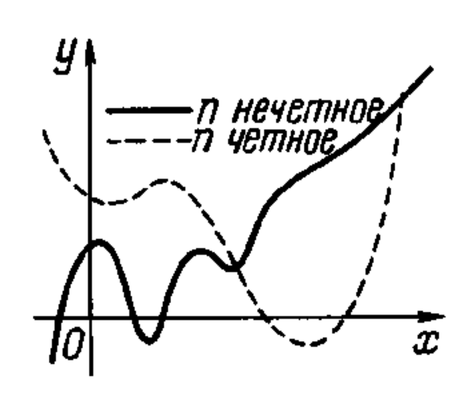


Рис. 1.10

причем в случае нескольких экстремумов максимумы и минимумы чередуются (рис. 1.10). При $n \geqslant 1$ графики – кривые n-го порядка (см. 1.3).

n – нечетное. Существует по меньшей мере одно пересечение с осью x и при $n \geqslant 3$ по меньшей мере одна точка перегиба. Число экстремумов при $n \geqslant 3$ всегда четно, а число точек перегиба нечетно. Если $a_n > 0$, то при $x \to -\infty$ имеем $y \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ имеем $y \to +\infty$. Если $a_n < 0$, то, наоборот, при $x \to -\infty$ имеем $y \to +\infty$, а при $x \to +\infty$ имеем $y \to -\infty$.

n – четное. При $n \geqslant 2$ существует по меньшей мере один экстремум функции. Число экстремумов при $n \geqslant 2$ всегда нечетно, а число точек перегиба четно. Если $a_n > 0$, то при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$ всегда $y \to +\infty$. Если $a_n < 0$, то при тех же условиях $y \to -\infty$.

Степенные функции: $y = x^n$, $n \geqslant 2$ – целое. Все графики этих функций проходят через точку (1, 1) и касаются оси x в точке (0, 0). Их иногда называют *параболами n-го порядка*. Тогда (0, 0) считается точкой n-кратного касания кривой с осью x (ср. n-кратный нуль, см. 2.3.2). Если n четно, то функция имеет в точке $x = 0$ минимум и график симметричен относительно оси y (рис. 1.11, *а*). Если n нечетно, то точка (0, 0) – точка перегиба с горизонтальной касательной и

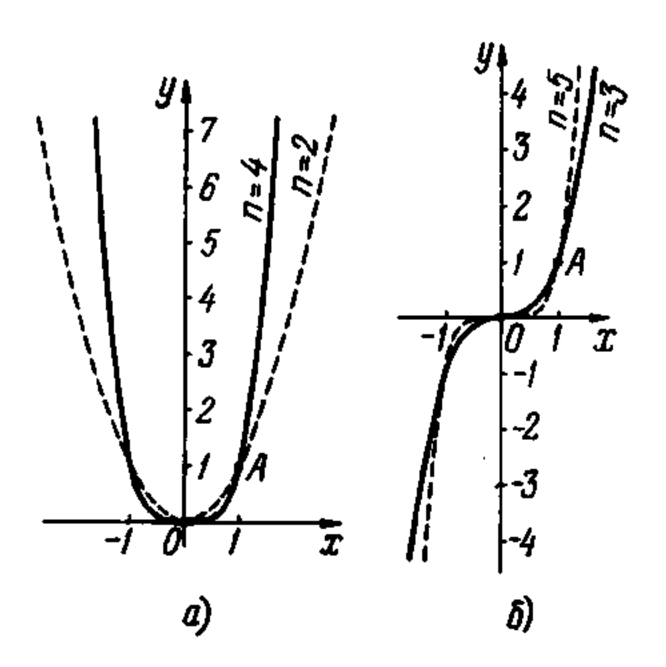


Рис. 1.11

кривая симметрична относительно начала координат (рис. 1.11, *б*). Графики функций $y = ax^n$ в случае $a > 0$ получаются растяжением ординат в a раз, а в случае $a < 0$ – растяжением в $|a|$ раз и последующим зеркальным отображением относительно оси x.

1.2.1.2. Дробно-рациональные функции.

Обратная пропорциональность: $y = a/x$, $a \neq 0$. График такой функции – *равносторонняя гипербола* с действительной полуосью $\sqrt{2|a|}$ (расстояние от вершины до центра), с центром в начале координат и с асимптотами – осями координат. Функция имеет один полюс 1-го порядка (см. 2.5.1.2.2) в точке $x = 0$. Экстремумов нет. При $a > 0$ функция в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ монотонно убывает, график лежит внутри первого и третьего квадрантов, вершины гиперболы – в точках $A(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ и $B(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$. Говорят, что *y обратно пропорционально x* (рис. 1.12). При $a < 0$ функция в тех

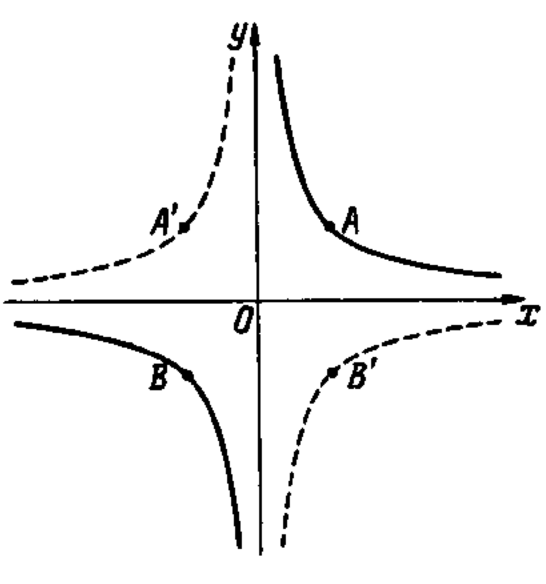


Рис. 1.12

же интервалах монотонно возрастает, график лежит внутри второго и четвертого квадрантов, вершины гиперболы – в точках $A'(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|})$ и $B'(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$ (рис. 1.12, штриховые кривые).

Дробно-линейные функции: $y = \dfrac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Графики функций – также *равносторонние гиперболы* с действительными полуосями $\sqrt{2|D|}/|a_2|$, с центрами $C(-b_2/a_2, a_1/a_2)$ и с асимптотами, параллельными осям координат и проходящими через C. Функции имеют один полюс 1-го порядка в точке

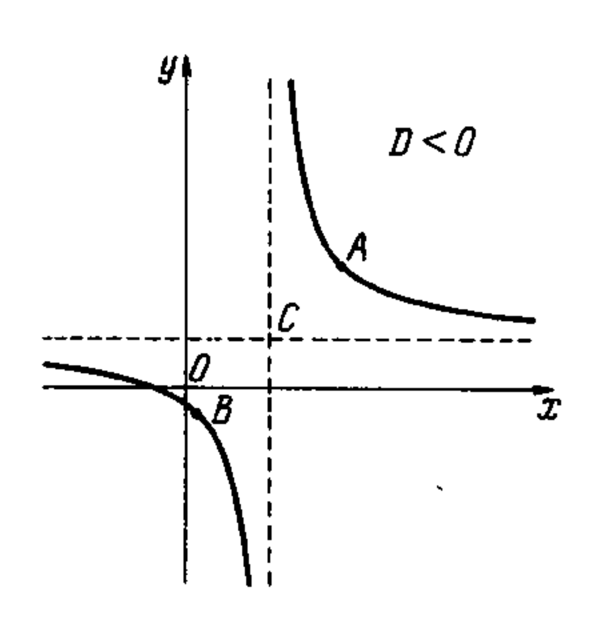


Рис. 1.13

$x_p = -b_2/a_2$. Экстремумов нет. Если $D < 0$, то функции в интервалах $(-\infty, -b_2/a_2)$ и $(-b_2/a_2, +\infty)$ монотонно убывают, вершины гипербол находятся

в точках (рис. 1.13)

$$A\left(-\frac{b_2}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right),$$

$$B\left(-\frac{b_2}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right).$$

Если $D>0$, то функции в данных интервалах монотонно возрастают, а вершины гипербол находятся в точках

$$A'\left(-\frac{b_2}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right),$$

$$B'\left(-\frac{b_2}{a_2}+\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|},\ \frac{a_1}{a_2}-\frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}\right).$$

Некоторые нелинейные дробно-рациональные функции.

1°. Функция $y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. График такой функции (рис. 1.14) также распадается (подобно графикам дробно-линейных

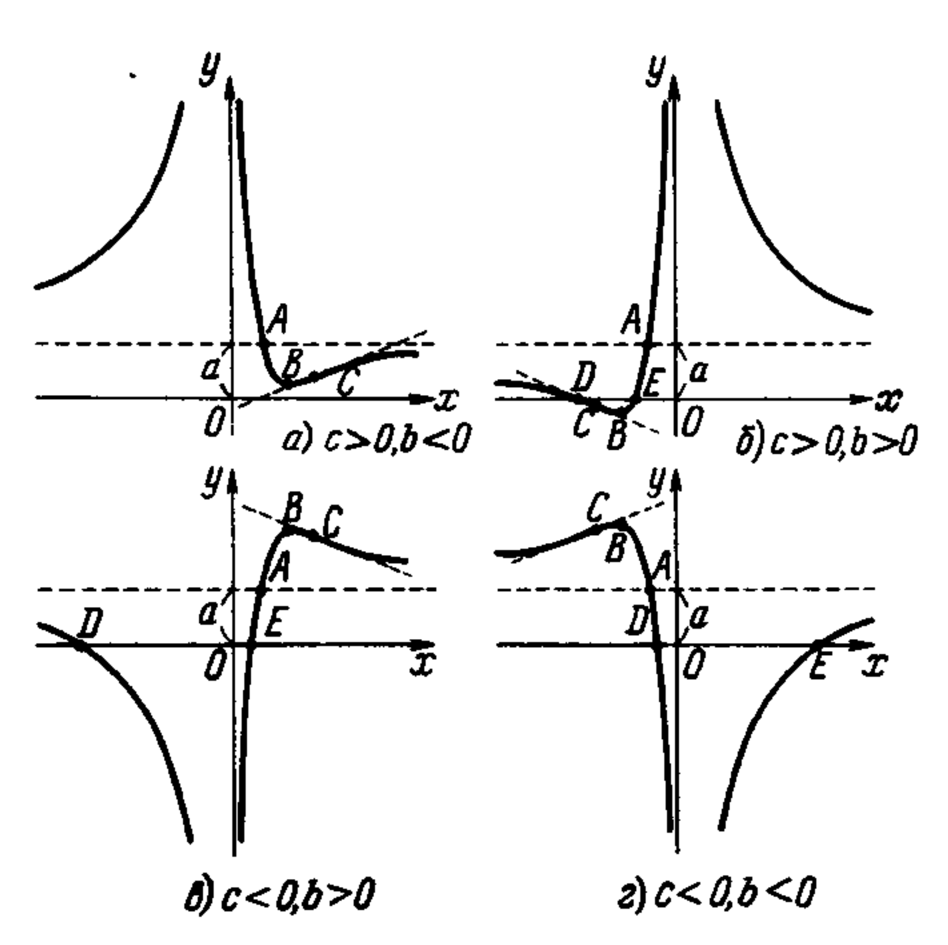


Рис. 1.14

функций) на две ветви, так как функция имеет полюс 2-го порядка в точке $x_p=0$. Ось y и прямая, уравнение которой имеет вид $x-a=0$,— асимптоты этой кривой.

Одна из двух ветвей кривой пересекает асимптоту $y-a=0$ в точке $A(-c/b,\ a)$, в то время как другая ветвь при $b<0$ монотонно возрастает, а при $b>0$ монотонно убывает. Функции имеют один экстремум в точке $x=-2c/b$ с соответствующим значением функции $y=a-b^2/(4c)$ (точка B на рис. 1.14). Точка перегиба C имеет координаты $(-3c/b,\ a-2b^2/(9c))$. При $\Delta=4ac-b^2<0$ кривая дважды пересекает ось x: в точках

$$D\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{|2a|},\ 0\right),\quad E\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{|2a|},\ 0\right).$$

При $\Delta=0$ кривая касается оси x в точке $(-b/(2a),\ 0)$. Если $\Delta>0$, то точек пересечения с осью x нет.

2°. Функция $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, $a\neq 0$. График этой функции симметричен относительно вертикальной прямой, уравнение которой имеет вид $x=-b/(2a)$, а ось x является для нее асимптотой (рис. 1.15). Вид кривой существенно определяется значением дискриминанта $\Delta=4ac-b^2$.

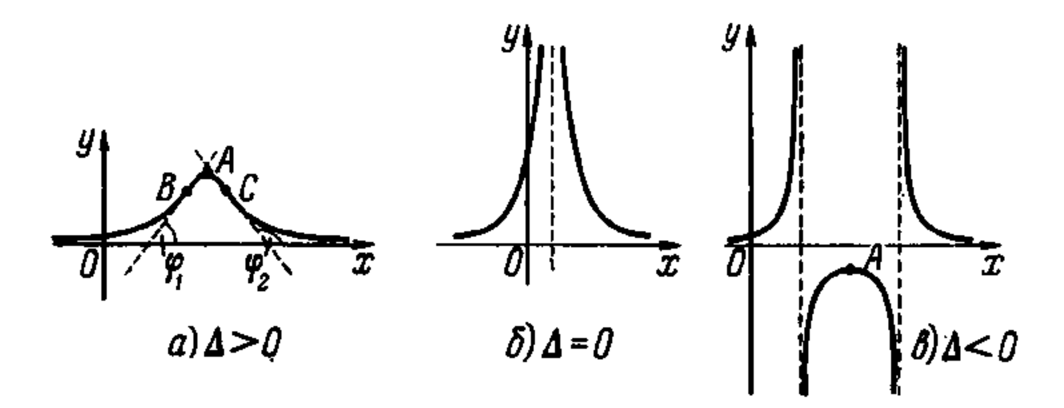


Рис. 1.15

Так как график функции $y=\dfrac{1}{-ax^2-bx-c}$ является зеркальным отображением относительно оси x графика данной функции, то достаточно ограничиться случаем $a>0$. Функция не имеет нулей.

а) $\Delta>0$. Для каждого значения x функция положительна и непрерывна; в точке $x_{max}=-b/(2a)$ она имеет максимум, равный $4a/\Delta$. В промежутке $(-\infty,\ x_{max}]$ она монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{max},\ +\infty)$ монотонно убывает. График имеет точки перегиба

$$B\left(x_{max}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}},\ \frac{3a}{\Delta}\right),\ C\left(x_{max}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}},\ \frac{3a}{\Delta}\right)$$

с наклонами касательных в этих точках $\operatorname{tg}\varphi_1=a^2(3/\Delta)^{3/2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2=-a^2(3/\Delta)^{3/2}$ соответственно (рис. 1.15, *а*).

б) $\Delta=0$. В точке $x_p=-b/(2a)$ функция имеет полюс 2-го порядка, а для всех остальных значений x функция положительна и непрерывна. В интервале $(-\infty,\ x_p)$ она монотонно возрастает, а в интервале $(x_p,\ +\infty)$ монотонно убывает (рис. 1.15, *б*).

в) $\Delta<0$. Функция имеет в точке $x_{max}=-b/(2a)$ максимум, равный $4a/\Delta$, а в точках $x_{p_1}=x_{max}+\sqrt{-\Delta}/(2a)$ и $x_{p_2}=x_{max}-\sqrt{-\Delta}/(2a)$ — полюсы 1-го порядка. В промежутке $(-\infty,\ x_{p_2})$ она положительна и монотонно возрастает, в промежутке $(x_{p_2},\ x_{max}]$ отрицательна и монотонно возрастает, в промежутке $[x_{max},\ x_{p_1})$ отрицательна и монотонно убывает, в промежутке $(x_{p_1},\ +\infty)$ положительна и монотонно убывает. Для всякого значения x, за исключением $x=x_{p_1}$ и $x=x_{p_2}$, функция непрерывна (рис. 1.15, *в*).

3°. Функция $y=\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$, $ac\neq 0$. На тех же основаниях, что и в предыдущем примере, можно ограничиться случаем $a>0$. График этой функции пересекает ось x в начале координат и имеет асимптотой ось x (рис. 1.16). Обозначим $\Delta=4ac-b^2$.

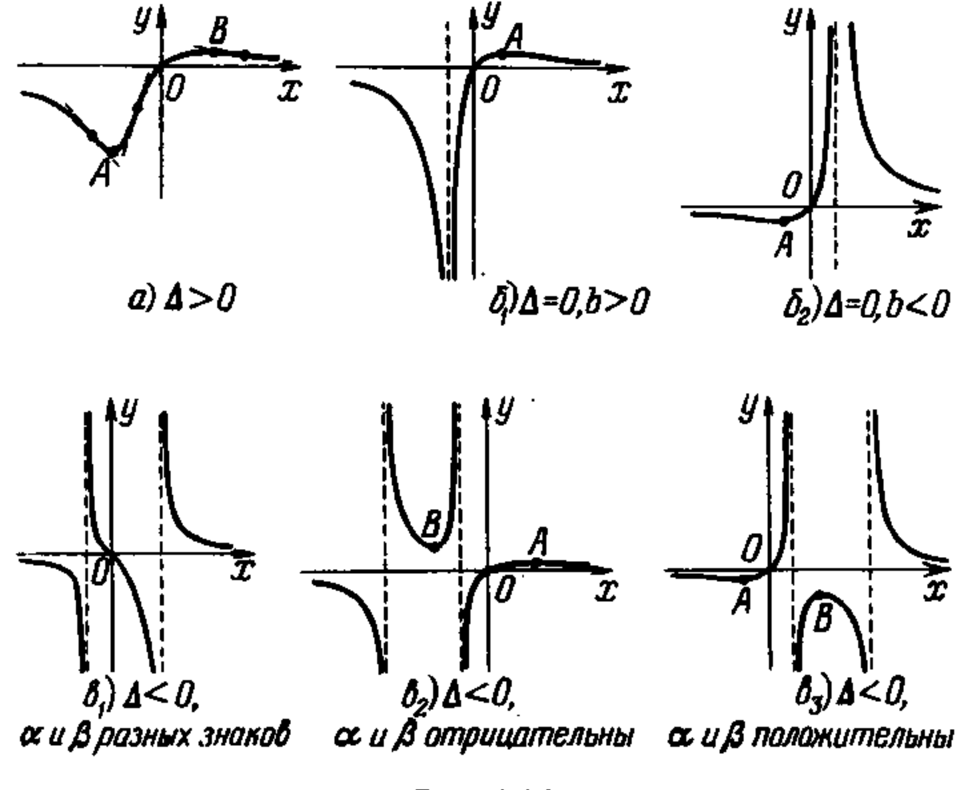


Рис. 1.16

а) $\Delta > 0$. Для каждого значения x функция непрерывна и имеет в точках $x_{\min} = \sqrt{c/a}$ и $x_{\max} = \sqrt{c/a}$ минимум и максимум со значениями $(-b - 2\sqrt{ac})/\Delta$ и $(-b + 2\sqrt{ac})/\Delta$ соответственно. В промежутке $(-\infty, x_{\min}]$ она монотонно убывает, в промежутке $[x_{\min}, x_{\max}]$ монотонно возрастает, в промежутке $[x_{\max}, +\infty)$ монотонно убывает. Существуют три точки перегиба (рис. 1.16, *а*): корни уравнения $a^2x^3 - 3axc - bc = 0$.

б) $\Delta = 0$. Из того, что $ac \neq 0$ и $a > 0$, следует, что $b \neq 0$, $c > 0$. Для каждого значения x имеем $ax^2 + bx + c = a(x + b/(2a))^2$. В точке $x_p = -b/(2a)$ функция имеет полюс 2-го порядка, а при всех остальных значениях x она непрерывна. График имеет одну точку перегиба $x = b/a$. 1) $b > 0$. В точке $x_{\max} = b/(2a)$ функция имеет максимум со значением функции $1/(2b)$. В промежутке $(-\infty, x_p)$ она монотонно убывает, в промежутке $(x_p, x_{\max}]$ монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{\max}, +\infty)$ монотонно убывает (рис. 1.16, $б_1$). 2) $b < 0$. В точке $x_{\min} = b/(2a)$ функция имеет минимум со значением $1/(2b)$. В промежутке $(-\infty, x_{\min}]$ она монотонно убывает, а в промежутке $[x_{\min}, x_p)$ монотонно возрастает, в промежутке $(x_p, +\infty)$ монотонно убывает (рис. 1.16, $б_2$).

в) $\Delta < 0$. Многочлен в знаменателе имеет два различных действительных корня в точках $\alpha = (-b - \sqrt{-\Delta})/(2a)$ и $\beta = (-b + \sqrt{-\Delta})/(2a)$, и так как $\alpha\beta = c/a \neq 0$, то $\alpha, \beta \neq 0$. Функция имеет в точках $x_{p_1} = \alpha$ и $x_{p_2} = \beta$ полюсы 1-го порядка. 1) $\alpha < 0$, $\beta > 0$. В интервалах $(-\infty, \alpha)$, (α, β), $(\beta, +\infty)$ функция монотонно убывает и не имеет экстремумов (рис. 1.16, $в_1$). 2) $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Функция имеет в точке $x_{\min} = -\sqrt{c/a}$ минимум, а в точке $x_{\max} = \sqrt{c/a}$ максимум. В промежутках $(-\infty, \alpha)$, $(\alpha, x_{\min}]$, $[x_{\max}, +\infty)$ она монотонно убывает, в промежутках $[x_{\min}, \beta)$, $(\beta, x_{\max}]$ монотонно возрастает (рис. 1.16, $в_2$). 3) $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Функция имеет в точке $x_{\min} = -\sqrt{c/a}$ минимум, а в точке $x_{\max} = \sqrt{c/a}$ максимум; в промежутках $(-\infty, x_{\min}]$, $[x_{\max}, \beta)$, $(\beta, +\infty)$ она монотонно убывает, в промежутках $[x_{\min}, \alpha)$, $(\alpha, x_{\max}]$ монотонно возрастает (рис. 1.16, $в_3$). Единственная точка перегиба – корень уравнения $a^2x^3 - 3axc - bc = 0$.

4°. Степенные функции $y = ax^{-n}$, $a \neq 0$, n – целое положительное число. У этих функций нет экстремумов, в точке $x_p = 0$ они имеют полюс порядка n, их графики при четном n симметричны относительно оси y, а при нечетном n центрально симметричны относительно начала координат. Координатные оси – асимптоты кривых. При $a > 0$ и n четном функции в интервале $(0, +\infty)$ монотонно убывают, а в интервале $(-\infty, 0)$ монотонно возрастают; при $a > 0$ и n нечетном функции в обоих интервалах монотонно убывают. При $a < 0$ графики функций получаются вертикальным отражением относительно оси x графиков $y = |a|x^{-n}$. Если $a = 1$, то графики проходят через точку $A(1, 1)$. На рис. 1.17 показаны графики функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-3}$.

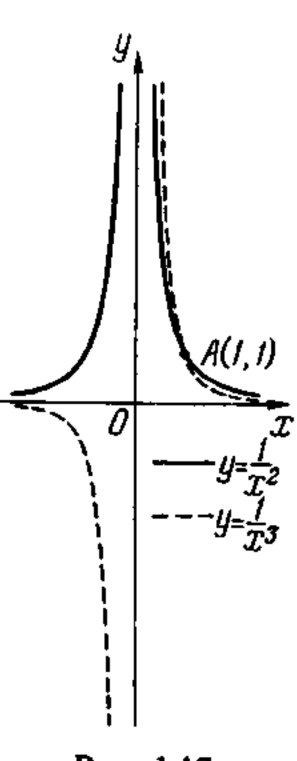


Рис. 1.17

1.2.1.3. Иррациональные функции.

Квадратный корень из линейного двучлена: $y = \pm\sqrt{ax + b}$, $a \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда перед радикалом взят знак +. Если $a > 0$, то везде в области определения $-b/a \leqslant x < +\infty$ функция неотрицательна и монотонно возрастает. Если $a < 0$, то везде в области определения $-\infty < x \leqslant -b/a$ функция неотрицательна и монотонно убывает. Функция равна нулю при $x = -b/a$, ее график представляет собой часть параболы с вершиной $(-b/a, 0)$ и параметром $p = a/2$, лежащую над осью x (рис. 1.18). Если перед радикалом взят знак −, то график получается зеркальным отражением относительно оси x графика $y = +\sqrt{ax + b}$. Оси парабол совпадают с осью x. Ср. 2.6.6.1.2.

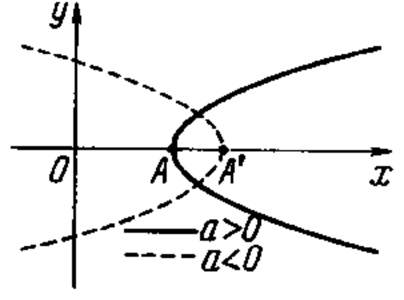


Рис. 1.18

Квадратный корень из квадратного трехчлена: $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$.

1) $a < 0$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$. В этом случае выражение не определяет никакой действительной функции с непустой областью определения.

2) $a < 0$, $\Delta < 0$. Область определения – отрезок $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = (-b + \sqrt{-\Delta})/(2a)$ и $\beta = (-b - \sqrt{-\Delta})/(2a)$. Функция имеет в точке $b/(2a)$ максимум, равный $\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак +), и

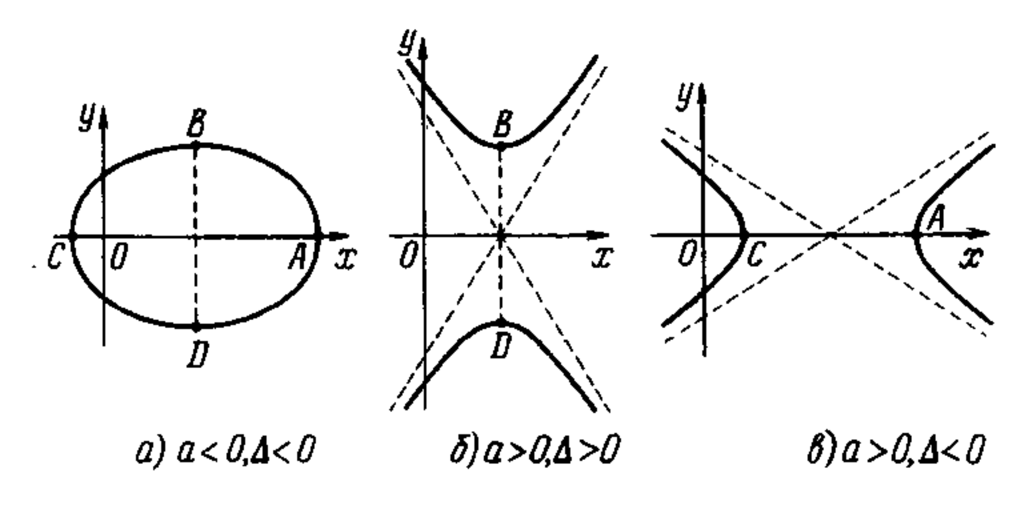


Рис. 1.19

минимум, равный $-\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак $-$); на концах области определения она равна нулю. График функции представляет собой часть эллипса с центром $(-b/(2a), 0)$ и вершинами в точках A, B, C, D, лежащую в верхней полуплоскости (рис. 1.19, *а*) (перед корнем знак $+$) и в нижней полуплоскости (рис. 1.19, *б*) (перед корнем знак $-$).

3) $a > 0$, $\Delta > 0$. Функция определена при любом значении x, не имеет нулей, но при $x = -b/(2a)$ имеет минимум, равный $\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак $+$), и максимум, равный $-\sqrt{\Delta/(4a)}$ (перед корнем знак $-$). График состоит из ветвей гиперболы с центром $(-b/(2a), 0)$ и осью x в качестве мнимой оси (рис. 1.19, *б*); при этом верхняя ветвь соответствует знаку $+$ перед корнем, а нижняя — знаку $-$.

4) $a > 0$, $\Delta < 0$. Область определения этой функции распадается на промежутки $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$, где $\alpha = (-b - \sqrt{-\Delta})/(2a)$, $\beta = (-b + \sqrt{-\Delta})/(2a)$. Функция обладает двумя нулями в граничных точках области определения.

График состоит из двух ветвей гиперболы с центром $(-b/(2a), 0)$ и осью x в качестве действительной оси (рис. 1.19, *в*); при этом части гипербол, лежащие в верхней полуплоскости, соответствуют знаку $+$ перед корнем, а лежащие в нижней полуплоскости — знаку $-$.

Степенная функция: $y = x^k$, $k = m/n$, m, n — взаимно простые целые числа, $n \neq \pm 1$.

1) $k > 0$. Функция имеет один нуль при $x_0 = 0$, и график проходит через точку (1, 1). Если n четное, то область определения — промежуток $[0, +\infty)$. Если n нечетное, то она определена

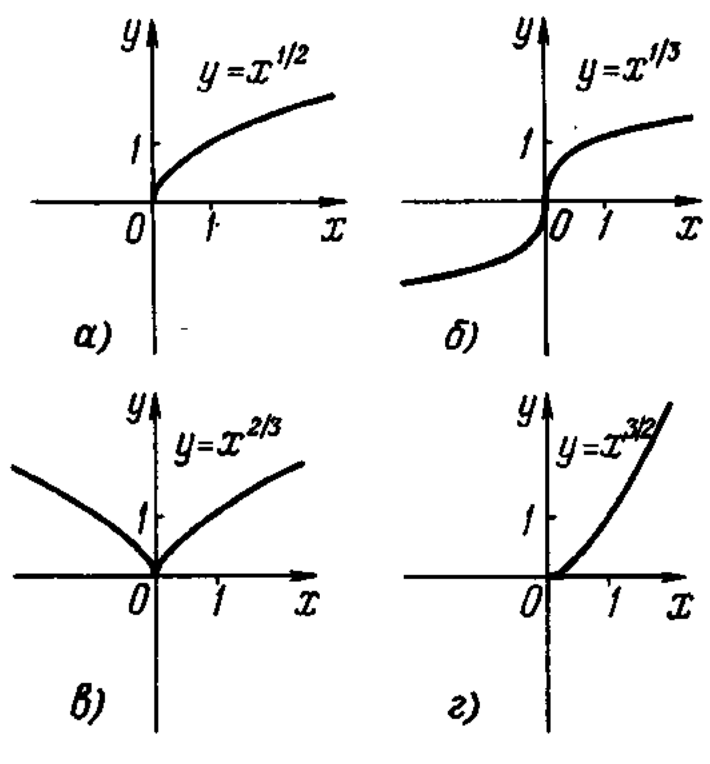


Рис. 1.20

при любом значении x. Если n нечетное, а m четное, то ось y — ось симметрии графика; если n и m нечетные, то график центрально симметричен относительно начала координат. Если $n > m$, то ось y — касательная к кривой в точке (0, 0); если $m > n$, то касательная в точке (0, 0) — ось x (рис. 1.20).

2) $k < 0$. При $x_p = 0$ функция имеет полюс k-го порядка — точку разрыва (точка разветвления с неограниченно возрастающим модулем значения функции). При n четном она определена в интервале $(0, +\infty)$, а при n нечетном — для любого

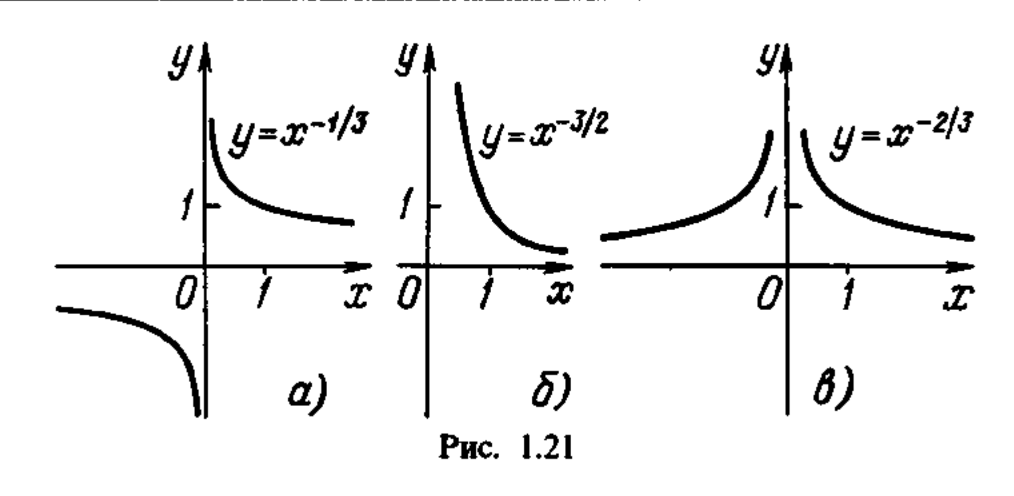


Рис. 1.21

значения $x \neq 0$. Экстремумов нет. Графики этих функций проходят через точку (1, 1) и имеют асимптотами оси координат. Они обладают теми же свойствами симметрии, что и кривые, описанные в 1) (рис. 1.21).

1.2.2. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

1.2.2.1. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Общая синусоидальная зависимость: $y = A\sin(\omega x + \varphi_0)$, $A > 0$, $\omega > 0$.

1) При $A = 1$, $\omega = 1$ и $\varphi_0 = 0$ имеем обыкновенный синус: $y = \sin x$. Это периодическая функция с периодом $T = 2\pi$ (см. 2.5.2.1). Ее график — *синусоида* (рис. 1.22, *а*) пересекающая ось x в точках B_n с координатами $(n\pi, 0)$ (n — любое целое число), которые одновременно являются точками перегиба кривой. Касательные в этих точках образуют с положительным направлением оси x угол либо $\pi/4$, либо $-\pi/4$. Максимумы функции лежат в точках $x_{\max_n} = \pi/2 + 2n\pi$, минимумы — в точках $x_{\min_n} = -\pi/2 + 2n\pi$. Значения функции y удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

2) График общей синусоиды с амплитудой A, круговой частотой ω и фазой φ_0 представлен на рис. 1.22, *б* (незатухающее гармоническое колебание; о затухающем гармоническом колебании

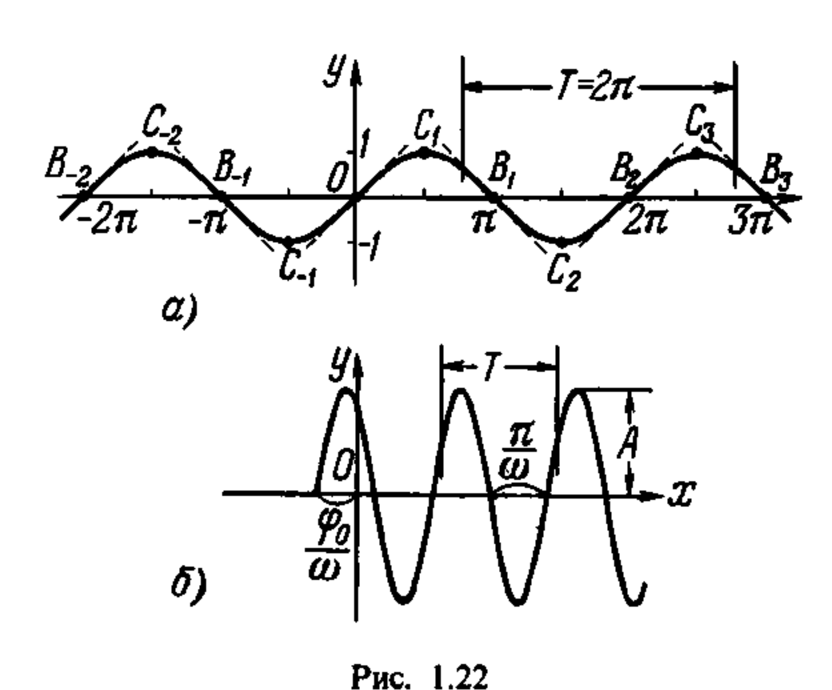


Рис. 1.22

см. 1.2.2.2). Его получают из синусоиды аффинным преобразованием: растяжением в A раз в направлении оси y, растяжением в $1/\omega$ раз в направлении оси x и последующим параллельным переносом по оси x на $-\varphi_0/\omega$. Функция имеет период $T = 2\pi/\omega$ и нули в точках $(n\pi - \varphi_0)/\omega$. Максимумы расположены в точках $(\pi/2 - \varphi_0 + 2n\pi)/\omega$, минимумы — в точках $(-\pi/2 - \varphi_0 + 2n\pi)/\omega$. Все значения функции удовлетворяют неравенству $-A \leqslant y \leqslant A$.

Косинус: $y = \cos x$. Так как $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ для любого x, то функция $\cos x$ представ-

ляет собой частный случай общей синусоидальной зависимости: $A = \omega = 1$, $\varphi_0 = \pi/2$. Поэтому ее график – сдвинутая по оси x на $-\pi/2$ синусоида (рис. 1.23). Нули – в точках $\pi/2 + n\pi$,

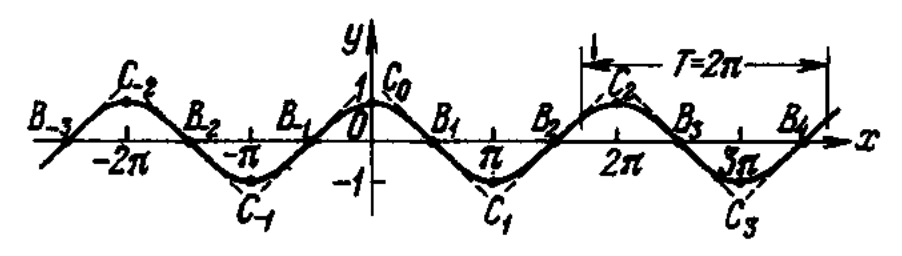


Рис. 1.23

максимумы – в точках $2n\pi$, минимумы – в точках $(2n+1)\pi$. Период $T = 2\pi$.

Тангенс: $y = \operatorname{tg} x$. Область определения этой функции представляет собой бесконечное число открытых интервалов $(-\pi/2 + n\pi,\ \pi/2 + n\pi)$, где n – любое целое число. В каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает и имеет нуль в точке $x_{0n} = n\pi$. Функция периодична с периодом $T = \pi$. В точках $(\pi/2) + n\pi$ функция имеет полюс

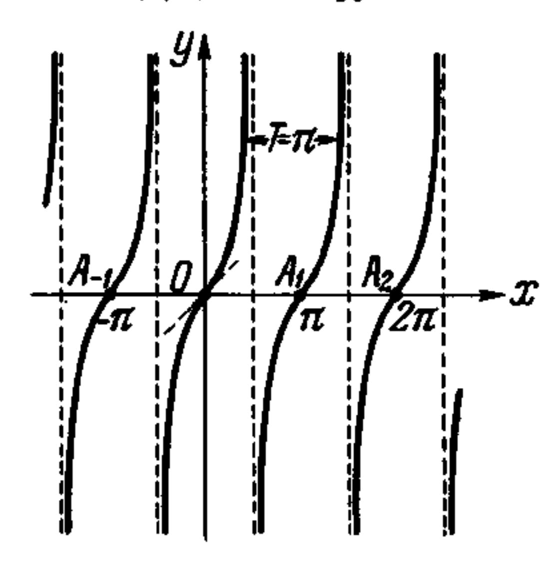


Рис. 1.24

1-го порядка. Точки пересечения ее графика с осью x – это одновременно и точки перегиба. Касательные в этих точках составляют с положительным направлением оси x угол $\pi/4$ (рис. 1.24).

Котангенс: $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения этой функции представляет собой бесконечное число открытых интервалов $(n\pi,\ (n+1)\pi)$, где n – любое целое число. В каждом из этих интервалов функция монотонно убывает и имеет один нуль в точках $x_{0n} = (\pi/2) + n\pi$. Функция периодическая с периодом $T = \pi$. В точках $n\pi$ она имеет полюс 1-го порядка. Точки пересечения

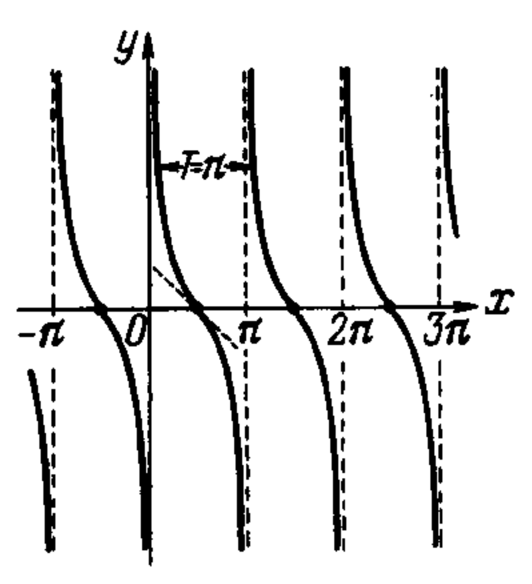


Рис. 1.25

ее графика с осью x – это одновременно и точки перегиба. Угол, образуемый в этих точках касательными к кривой с положительным направлением оси x, равен $-\pi/4$ (рис. 1.25). В области определения справедливо равенство $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}((\pi/2) + x)$.

Секанс: $y = \sec x$. Эта функция определена в открытых интервалах $(-(\pi/2) + n\pi,\ (\pi/2) + n\pi)$ соотношением $\sec x = 1/\cos x$ и имеет в точках $x_{p_n} = (\pi/2) + n\pi$ полюсы 1-го порядка. Функция периодична с периодом $T = 2\pi$ (рис. 1.26). При любом x из области определения справедливо

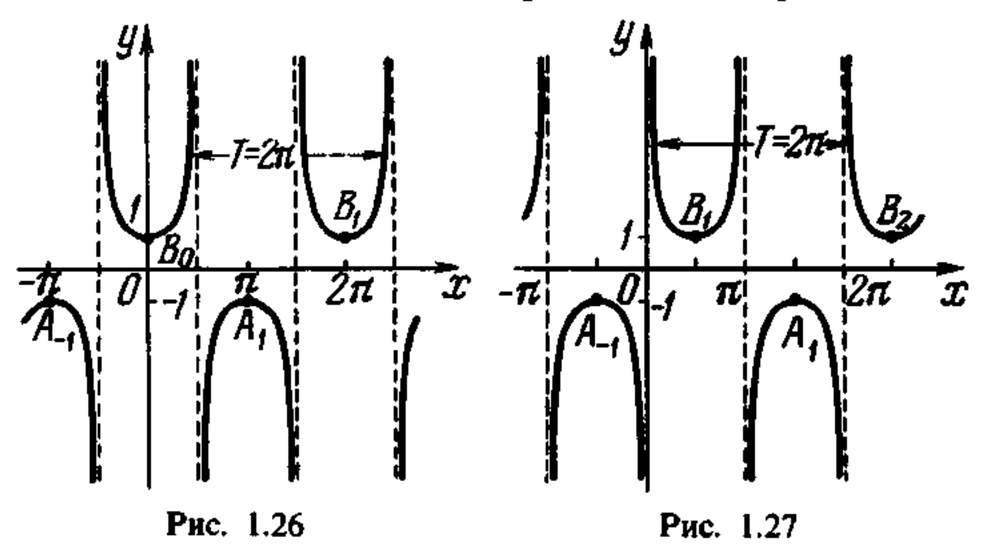


Рис. 1.26 Рис. 1.27

неравенство $|\sec x| \geqslant 1$, минимумы функции находятся в точках $2n\pi$, максимумы – в точках $(2n+1)\pi$.

Косеканс: $y = \operatorname{cosec} x$. Функция определяется в открытых интервалах $(n\pi,\ (n+1)\pi)$ равенством $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$; она периодична с периодом $T = 2\pi$ и имеет в точках $x_{p_n} = n\pi$ полюсы 1-го порядка (рис. 1.27). Так как при любом x из области определения справедливо равенство $\operatorname{cosec} x = \sec(x - \pi/2)$, то график совпадает со сдвинутым на $\pi/2$ по оси x графиком функции $y = \sec x$. Функция имеет минимумы в точках $\pi(4n+1)/2$ и максимумы в точках $\pi(4n+3)/2$.

Арксинус: $y = \arcsin x$. Эта функция является обратной к функции $y = \sin x$ на отрезке $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (рис. 1.28). Таким образом, ее область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а область значений $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Функция монотонно возрастает и имеет нуль при $x_0 = 0$. Ее график – часть синусоиды, зеркально отраженной относительно прямой $x - y = 0$ (биссектрисы первого и

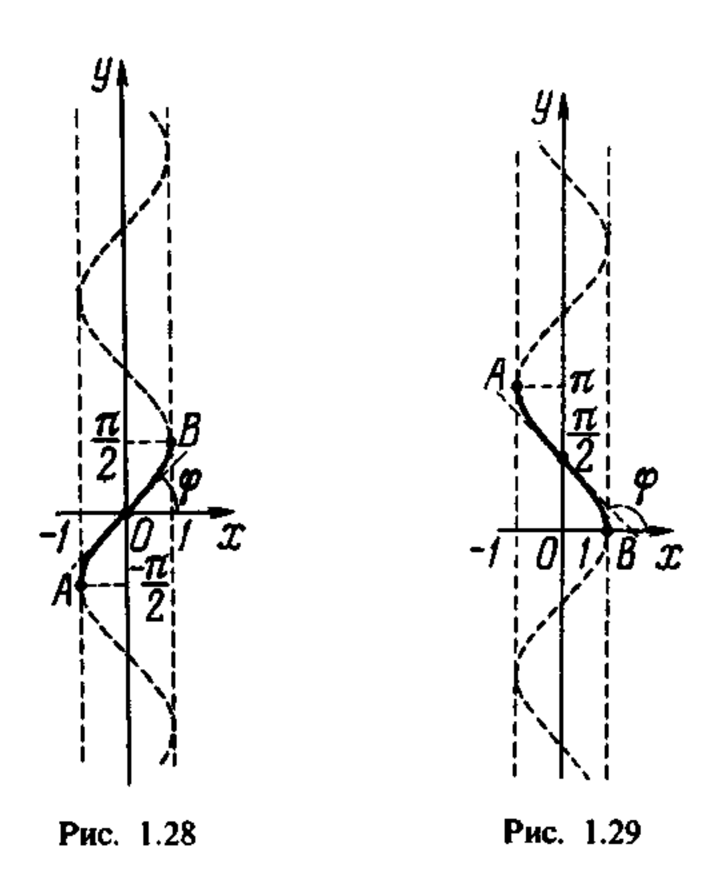


Рис. 1.28 Рис. 1.29

третьего квадрантов). График имеет в начале координат точку перегиба; касательная в этой точке составляет с осью x угол $\varphi = \pi/4$ (см. также примечание в конце 1.2.2.1).

Арккосинус: $y = \arccos x$. Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Таким образом, ее область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а область значений $0 \leqslant y \leqslant \pi$ (рис. 1.29). Функция монотонно убывает. Ее график – часть косинусоиды, зеркально отраженной относительно прямой $x - y = 0$. График имеет в точке $(0, \pi/2)$ точку перегиба; касательная в этой точке составляет с осью x угол $\varphi = 3\pi/4$ (см. также примечание в конце 1.2.2.1).

Арктангенс: $y = \operatorname{arctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $-\pi/2 < x < \pi/2$. Следовательно, ее область определения $-\infty < x < +\infty$, а область значений $-\pi/2 < y < \pi/2$ (рис. 1.30). Функция монотонно

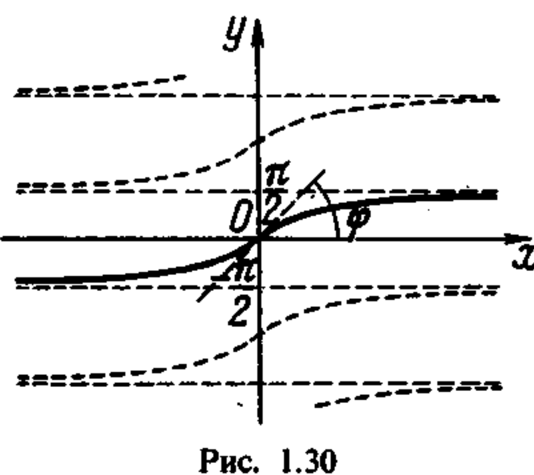


Рис. 1.30

возрастает и имеет нуль при $x_0 = 0$. Ее график получают зеркальным отражением соответствующей ветви графика функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно прямой $x - y = 0$. В начале координат функция имеет точку перегиба; угол, образуемый касательной в этой точке с осью x, равен $\varphi = \pi/4$. Прямые $y + \pi/2 = 0$ и $y - \pi/2 = 0$ – асимптоты при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ соответственно (см. также примечание в конце 1.2.2.1).

Арккотангенс: $y = \operatorname{arcctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $0 < x < \pi$. Следовательно, ее область определения $-\infty < x < +\infty$, а область значений $0 < y < \pi$ (рис. 1.31). Функция монотонно убывает

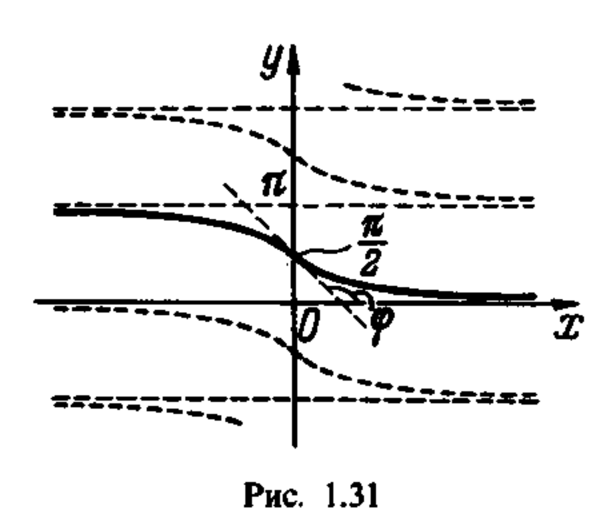


Рис. 1.31

и не имеет нулей. Ее график получают зеркальным отражением соответствующей ветви графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно прямой $x - y = 0$. Этот график имеет точку перегиба $(0, \pi/2)$; угол, образуемый касательной в этой точке и осью x, равен $\varphi = 3\pi/4$. Прямые $y = 0$ и $y - \pi = 0$ – асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно (см. также нижеследующее примечание).

Примечание. Если x – фиксированное действительное число, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то множество всех действительных чисел y, для которых $x = \sin y$, обозначают $\operatorname{Arcsin} x$; следовательно, $\operatorname{Arcsin} x = \{y \mid x = \sin y\}$. В каждом таком множестве $\operatorname{Arcsin} x$ существует единственное действительное $y_0 = \arcsin x$, которое называется *главным значением* $\operatorname{Arcsin} x$. Отсюда следует: $y \in \operatorname{Arcsin} x$ тогда и только тогда, когда имеется целое число n, при котором $y = (-1)^n \arcsin x + n\pi$. Соответственно получают: $y \in \operatorname{Arccos} x$ тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел), что $y = \pm \arccos x + 2n\pi$.

Далее, $y \in \operatorname{Arctg} x$ при $x \in (-\infty, +\infty)$ тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $y = \operatorname{arctg} x + n\pi$; $y \in \operatorname{Arcctg} x$ тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $y = \operatorname{arcctg} x + n\pi$.

Графики многозначных функций $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$ изображены соответственно на рис. 1.28–1.31 штриховыми линиями.

1.2.2.2. Показательные и логарифмические функции.

Показательные функции: $y = e^{bx} = \exp\{bx\}$, $b \neq 0$ (их называют также *экспоненциальными*). Функция (рис. 1.32) определена при

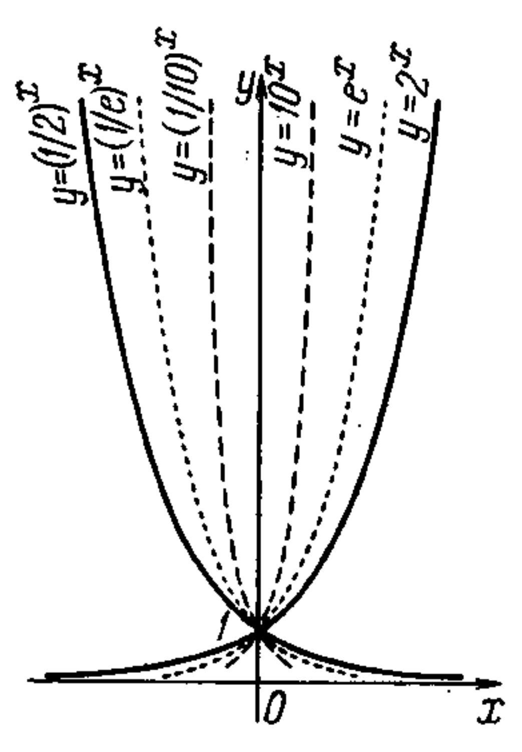


Рис. 1.32

всех значениях x, не имеет ни нулей, ни экстремумов. Ее значения всегда положительны. Обозначив $a = e^b$, имеем $e^{bx} = a^x$ для всех значений x, $a > 0$, $a \neq 1$. При $b > 0$ (т. е. $a > 1$) функция монотонно возрастает, при $b < 0$ (т. е. $0 < a < 1$) она монотонно убывает. Важные частные случаи:

$$y = e^x = \exp x,$$
$$y = e^{-x} = \exp(-x).$$

График проходит через точку $(0, 1)$ и имеет ось x в качестве асимптоты при $x \to -\infty$.

Логарифмические функции: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Они являются обратными функциями

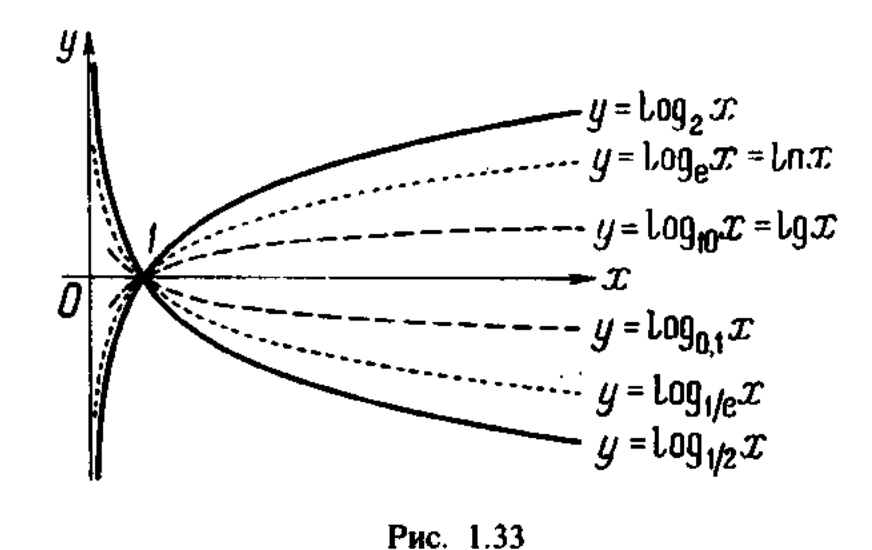


Рис. 1.33

для показательных функций. Область значений: $-\infty < y < +\infty$. Обозначая $b = \ln a$, имеем в области

определения $\log_a x = (1/b)\ln x$, $b \neq 0$. При $a > 1$ (т. е. $b > 0$) функция монотонно возрастает, при $0 < a < 1$ (т. е. $b < 0$) она монотонно убывает (рис. 1.33). Важный частный случай: $a = e$ (т. е. $b = 1$), $y = \ln x$. График проходит через точку (1, 0) и имеет асимптотой ось y. При каждом отличном от нуля значении b функции $y = e^{bx}$ и $y = (1/b)\ln x$ взаимно обратны; их графики совмещаются друг с другом при зеркальном отражении относительно прямой $x - y = 0$.

Функции $y = be^{-(ax)^2} = b\exp\{-(ax)^2\}$, $a \neq 0$, $b > 0$. Функция (рис. 1.34) определена при всех значениях x, ее область значений: $0 < y \leqslant b$.

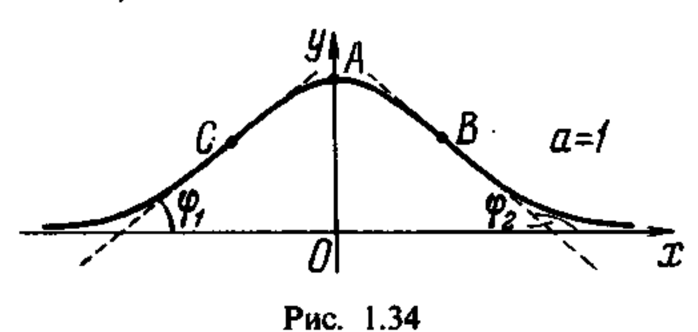


Рис. 1.34

В промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ она монотонно возрастает, а в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ монотонно убывает и имеет при $x = 0$ максимум $y_{max} = b$. График симметричен относительно оси y и имеет две точки перегиба: $B(1/(a\sqrt{2}),\ b\sqrt{e})$ и $C(-1/(a\sqrt{2}),\ b\sqrt{e})$. Касательные в этих точках имеют угловые коэффициенты $\operatorname{tg}\varphi_1 = -ab\sqrt{2/e}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = ab\sqrt{2/e}$. Важный частный случай: $b = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, $a = \sigma\sqrt{2}$ (это *гауссова кривая — кривая нормального закона распределения ошибок*, ср. 1.1.2.6.1).

Функции $y = ae^{bx} + ce^{dx}$, $abcd \neq 0$. Функции (рис. 1.35) определены при всех значениях x.

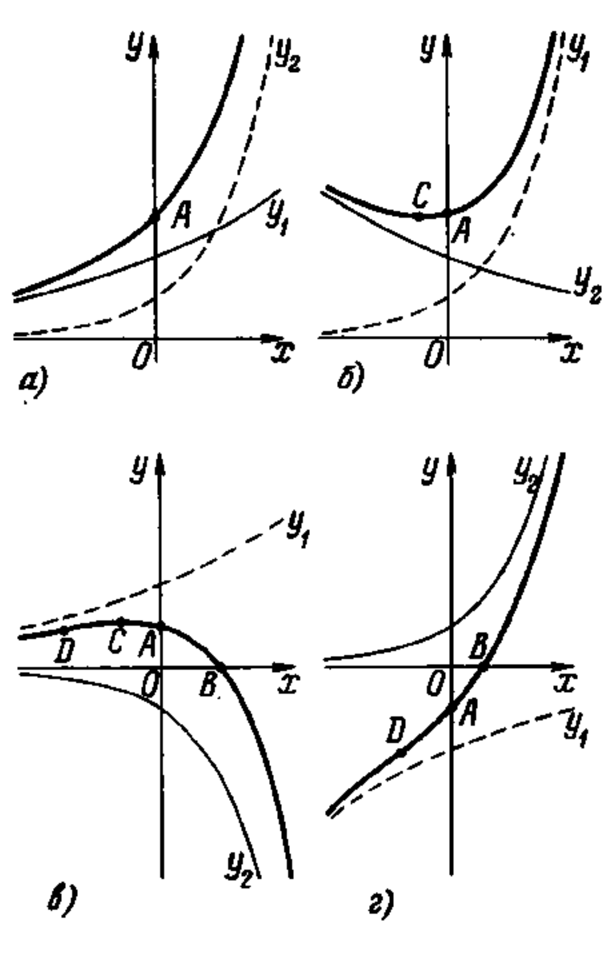


Рис. 1.35

Их рассматривают как сумму функций $y_1 = ae^{bx}$ и $y_2 = ce^{dx}$ (о частных случаях $b = 1$, $d = -1$ и $a = c = 1/2$ или $a = -c = 1/2$ см. 1.2.2.3). Можно выделить четыре типа, для каждого из которых существует четыре случая. Для каждого типа рассматривается один случай. Графики функций в остальных случаях получают из графика рассмотренного случая путем зеркального отображения относительно оси x, оси y или обеих осей.

а) $ac > 0$, $bd > 0$. На рис. 1.35, *а* изображен случай $a > 0$, $c > 0$ и $b > 0$, $d > 0$. Функция монотонно возрастает. Экстремумов и нулей нет. График не имеет точек перегиба, ось x — асимптота.

б) $ac > 0$, $bd < 0$. На рис. 1.35, *б* изображен случай $a > 0$, $c > 0$, $b > 0$, $d < 0$. Функция имеет минимум в точке x_{min}, не имеет нулей. В промежутке $(-\infty, x_{min}]$ она монотонно убывает, а в промежутке $[x_{min}, +\infty)$ монотонно возрастает. График не имеет точек перегиба и асимптот.

в) $ac < 0$, $bd > 0$. На рис. 1.35, *в* изображен случай $a > 0$, $c < 0$, $b > 0$, $d > 0$. Функция имеет один максимум в точке x_{max}, нуль при $x_0 = \dfrac{\ln(-c/a)}{b - d}$. В промежутке $(-\infty, x_{max}]$ она монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{max}, +\infty)$ монотонно убывает. График имеет одну точку перегиба, ось x — асимптота.

г) $ac < 0$, $bd < 0$. На рис. 1.35, *г* изображен случай $a < 0$, $c > 0$ и $b < 0$, $d > 0$. Функция не имеет экстремумов, монотонно возрастает и имеет один нуль в x_0. У графика одна точка перегиба. Асимптот нет.

Экстремальные значения (типы б) и в)) в точке C достигаются при $x = (1/(d - b))\cdot\ln(-ab/(cd))$, $d \neq b$. Нули (типы в) и г)): $x_0 = (1/(d - b))\cdot\ln(-a/c)$, $d \neq b$. Точка пересечения с осью y: $A(0, a + c)$; абсцисса точки перегиба D (типы в) и г)): $x = (1/(d - b))\cdot\ln(-ab^2/(cd^2))$, $d \neq b$.

Функции $y = ae^{bx+cx^2} = a\exp\{bx + cx^2\}$, $ac \neq 0$. Графики этих функций симметричны относительно прямой $2cx + b = 0$. У функций нет нулей, но есть один экстремум в точке $A(-b/(2c),\ a\exp\{-b^2/(4c)\})$.

Различают два типа графиков функций, которые изображены для случая $a > 0$ на рис. 1.36

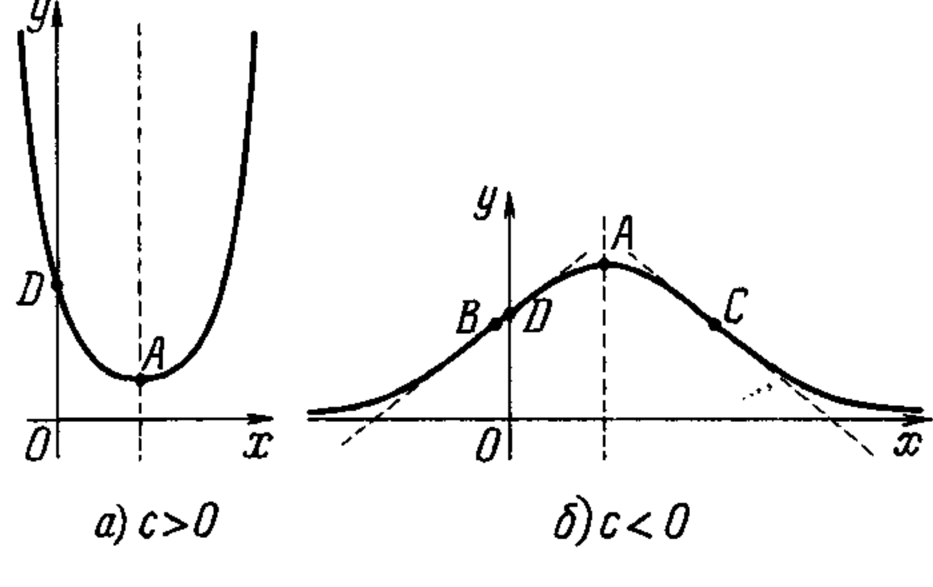


Рис. 1.36

(при $a < 0$ нужно зеркально отобразить кривые относительно оси x).

а) $c > 0$, $a > 0$. Экстремум — минимум; функция в промежутке $(-\infty, x_{min}]$ монотонно убывает, а в промежутке $[x_{min}, +\infty)$ монотонно возрастает. Точек перегиба и асимптот нет (рис. 1.36, *а*).

б) $c < 0$, $a > 0$. Экстремум — максимум; функция в промежутке $(-\infty, x_{max}]$ монотонно возрастает, а в промежутке $[x_{max}, +\infty)$ монотонно убывает. Ось x — асимптота (рис. 1.36, *б*). Точки

перегиба имеют координаты

$$B\left(\frac{-b+\sqrt{-2c}}{2c},\ a\exp\left\{-\frac{(b^2+2c)}{4c}\right\}\right),$$

$$C\left(\frac{-b-\sqrt{2c}}{2c},\ a\exp\left\{-\frac{(b^2+2c)}{4c}\right\}\right).$$

Функции $y = ax^b e^{cx} = ax^b \exp(cx)$, $abc \neq 0$. Если в качестве b взять любое отличное от нуля действительное число, то функции при $b > 0$ определены в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$, а при $b < 0$ – в промежутке $0 < x < +\infty$. Здесь снова достаточно рассмотреть случай $a > 0$ (при $a < 0$ графики получаются зеркальным отображением относительно оси x).

а) $c > 0$, $b > 1$ (рис. 1.37, *а*). График касается оси x в точке (0, 0). Функция монотонно возрастает.

б) $c > 0$, $b = 1$ (рис. 1.37, *б*). График проходит через точку (0, 0) и касается в этой точке прямой $x - y = 0$. Функция монотонно возрастает.

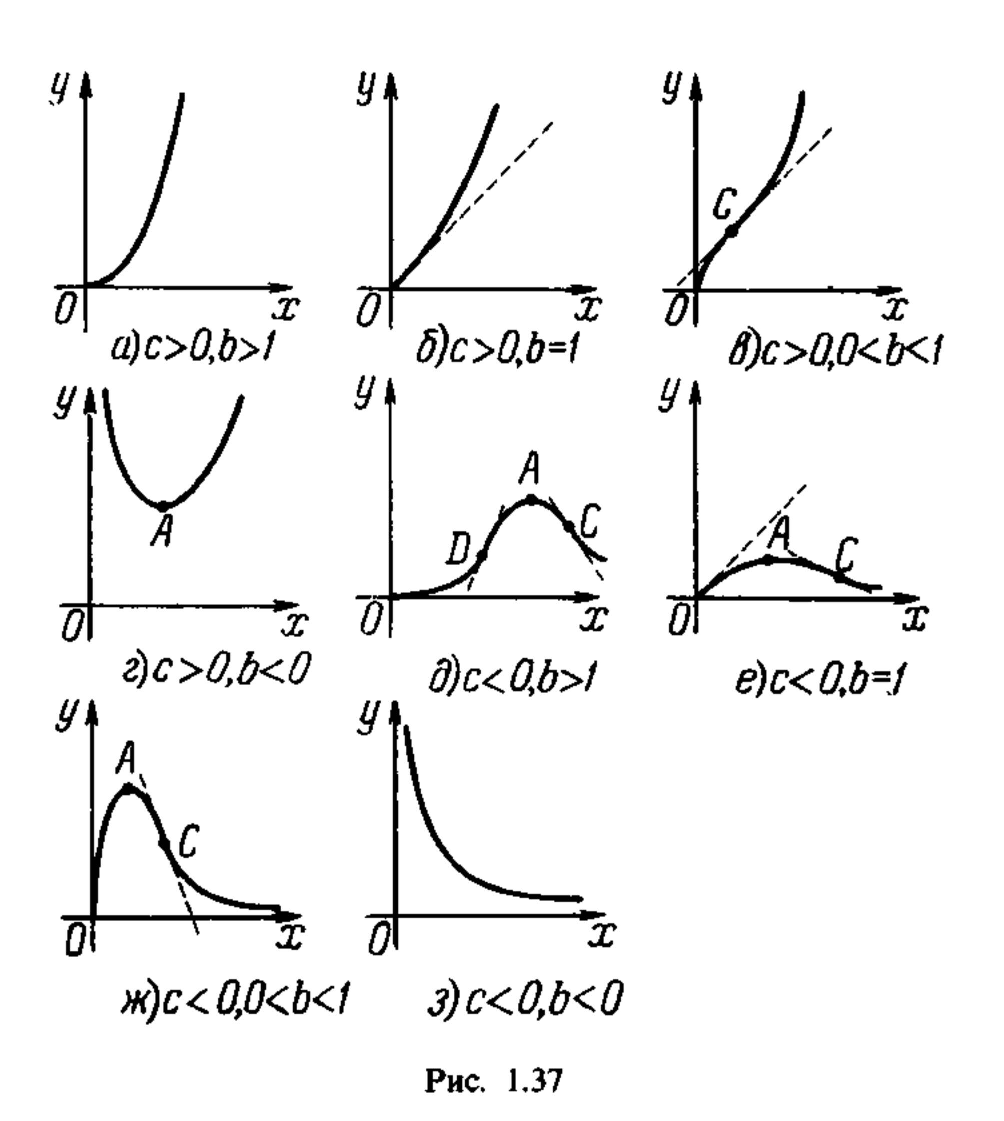


Рис. 1.37

в) $c > 0$, $0 < b < 1$ (рис. 1.37, *в*). График касается оси y в точке (0, 0) и имеет точку перегиба C с абсциссой $(\sqrt{b} - b)/c$. Функция монотонно возрастает и не имеет экстремумов.

г) $c > 0$, $b < 0$ (рис. 1.37, *г*). Ось y – асимптота. Функция имеет минимум в точке $x = -b/c$ и монотонно убывает в промежутке $(0, -b/c]$, а в промежутке $[-b/c, +\infty)$ монотонно возрастает.

д) $c < 0$, $b > 1$ (рис. 1.37, *д*). График касается оси x в точке (0, 0) и имеет две точки перегиба C и D с абсциссами $x_C = (b + \sqrt{b})/(-c)$ и $x_D = (b - \sqrt{b})/(-c)$. Ось x – асимптота. Функция имеет максимум при $x = -b/c$. В промежутке $[0, -b/c]$ монотонно возрастает, а в промежутке $[-b/c, +\infty)$ монотонно убывает.

е) $c < 0$, $b = 1$ (рис. 1.37, *е*). График проходит через точку (0, 0) и касается в этой точке прямой $ax - y = 0$. Существует только одна точка перегиба C с абсциссой $x_C = -2/c$, аналогичная рассмотренной в д), и единственный максимум при $x = -1/c$.

ж) $c < 0$, $0 < b < 1$ (рис. 1.37, *ж*). График касается оси y в точке (0, 0). Существует только одна точка перегиба C с абсциссой $x_C = (b + \sqrt{b})/(-c)$ и единственный максимум при $x = -1/c$.

з) $c < 0$, $b < 0$ (рис. 1.37, *з*). Оси координат – асимптоты. Функция монотонно убывает в интервале $(0, +\infty)$.

Функции $y = Ae^{-ax}\sin(\omega x + \varphi)$, $A > 0$, $a > 0$, $\omega > 0$. Графики этих функций (рис. 1.38) представляют собой при $x \geqslant 0$ затухающие гармонические колебания, если интерпретировать x как

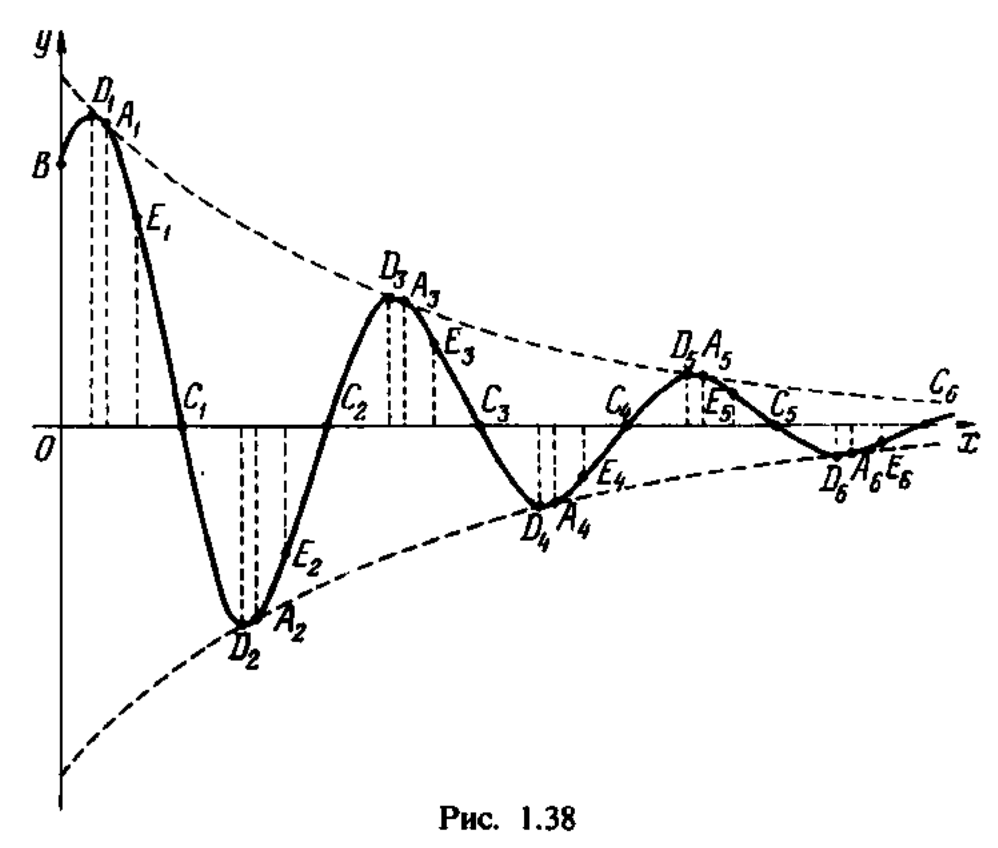


Рис. 1.38

время, а y как отклонение (при $a = 0$ – незатухающие гармонические колебания, см. 1.2.2.1). Кривая располагается в области, ограниченной графиками функций $y = Ae^{-ax}$ и $y = -Ae^{-ax}$ (изображены штриховыми линиями), имеющими ось x в качестве асимптоты.

Координаты точек касания A_k рассматриваемой кривой с графиками функций $y = Ae^{-ax}$ и $y = -Ae^{-ax}$ равны

$$x_k = \frac{(k + 0{,}5)\pi - \varphi}{\omega},\quad y_k = (-1)^k A e^{-ax_k},$$

k – целое. Точки пересечения с осями координат: $B(0, A\sin\varphi)$, $C_k((k\pi - \varphi)/\omega, 0)$; точки экстремума (абсциссы точек D_k): $(k\pi - \varphi + \operatorname{arctg}(\omega/a))/\omega$; абсциссы точек перегиба E_k: $(k\pi - \varphi + 2\operatorname{arctg}(\omega/a))/\omega$; логарифмический декремент: $\delta = \ln|y_k/y_{k+1}| = a\pi/\omega$.

1.2.2.3. Гиперболические функции.

Гиперболический синус: $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Функция нечетная, монотонно возрастающая. Ее график (рис. 1.39) центрально симметричен относительно начала координат. Точка (0, 0) является точкой перегиба кривой. Угол наклона φ касательной в точке (0, 0) равен $\pi/4$.

Рис. 1.39

Гиперболический косинус: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Эта функция в промежутке $(-\infty, 0]$ монотонно убывает, а в промежутке $[0, +\infty)$ монотонно возрастает, имеет при $x_0 = 0$ минимум со значением функции, равным единице. Ее график (рис. 1.40) симметричен относительно оси y и является *цепной линией* (см. 1.3.4). В окрестности точки $A(0, 1)$ он хорошо аппроксимируется графиком функции $y = 1 + x^2/2$ (парабола на рис. 1.40 изображена штриховой линией, касание 3-го порядка).

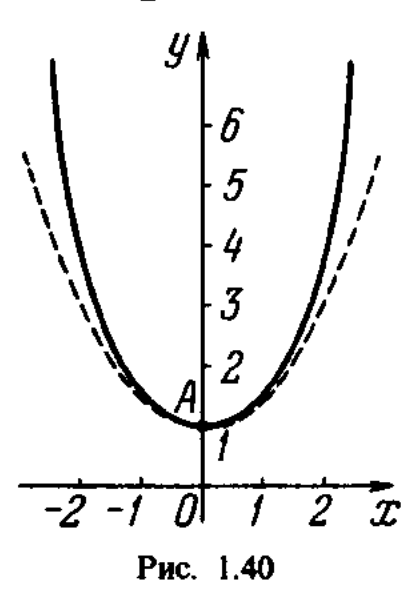


Рис. 1.40

Гиперболический тангенс: $y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Функция монотонно возрастает, все ее значения лежат между -1 и 1. График (рис. 1.41) центрально симметричен относительно начала координат. Точка (0, 0) является точкой перегиба кривой. Угол наклона φ касательной в точке (0, 0) равен $\pi/4$. Прямые $y - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$ — асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно.

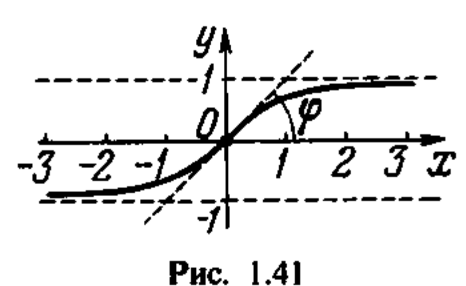


Рис. 1.41

Гиперболический котангенс: $y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция монотонно убывает; в точке $x_p = 0$ она имеет полюс первого порядка. Нулей нет. График функции (рис. 1.42) центрально симметричен относительно точки (0, 0). Прямые $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$ — асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно; прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

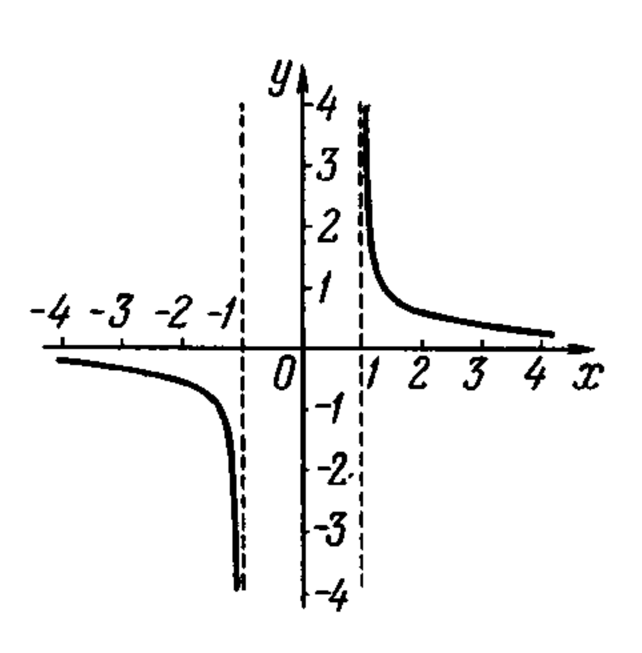


Рис. 1.42

Ареасинус: $y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Эта функция является обратной функцией для $y = \operatorname{sh} x$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ и поэтому монотонно возрастает. График (рис. 1.43) получают зеркальным отражением графика $y = \operatorname{sh} x$ относительно прямой $x - y = 0$. Точка (0, 0) — центр симметрии кривой и одновременно точка перегиба. Угол наклона φ касательной в точке (0, 0) равен $\pi/4$.

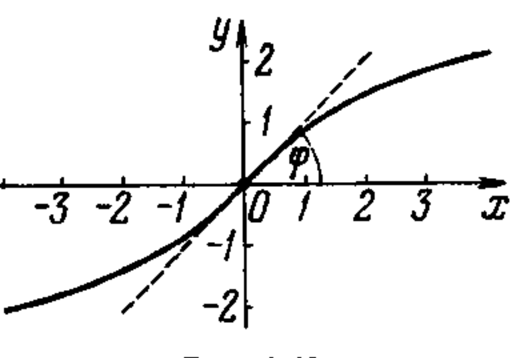


Рис. 1.43

Ареакосинус: $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. Эта функция двузначная. Она является обратной функцией для $y = \operatorname{ch} x$ в промежутке $[0, +\infty)$ и в промежутке $(-\infty, 0]$. Ее область определения $1 \leqslant x < +\infty$. В области определения верхняя ветвь монотонно возрастает, а нижняя монотонно убывает. Ее график (рис. 1.44) касается в точке $A(1, 0)$ прямой, параллельной оси y, и является графиком $y = \operatorname{ch} x$, зеркально отраженным относительно прямой $x - y = 0$.

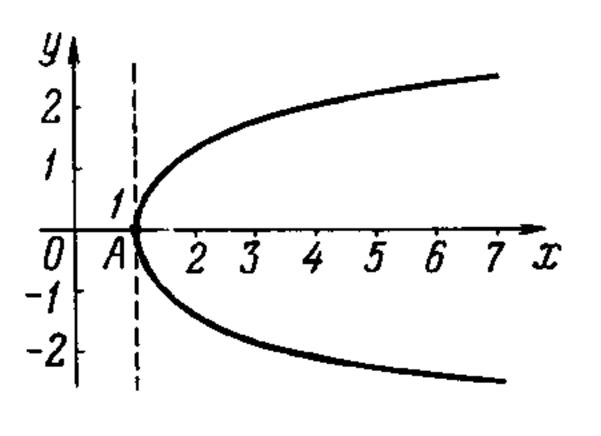


Рис. 1.44

Ареатангенс: $y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$. Эта функция является обратной функцией для $y = \operatorname{th} x$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Ее область определения $-1 < x < 1$, область значений $-\infty < y < +\infty$. Функция нечетная, монотонно возрастающая. График функции (рис. 1.45) центрально симметричен относительно точки (0, 0), причем эта точка — одновременно и точка перегиба. Касательная в этой точке имеет угол наклона $\varphi = \pi/4$, прямые $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$ — асимптоты. График функции получается зеркальным отражением графика $y = \operatorname{th} x$ относительно прямой $x - y = 0$.

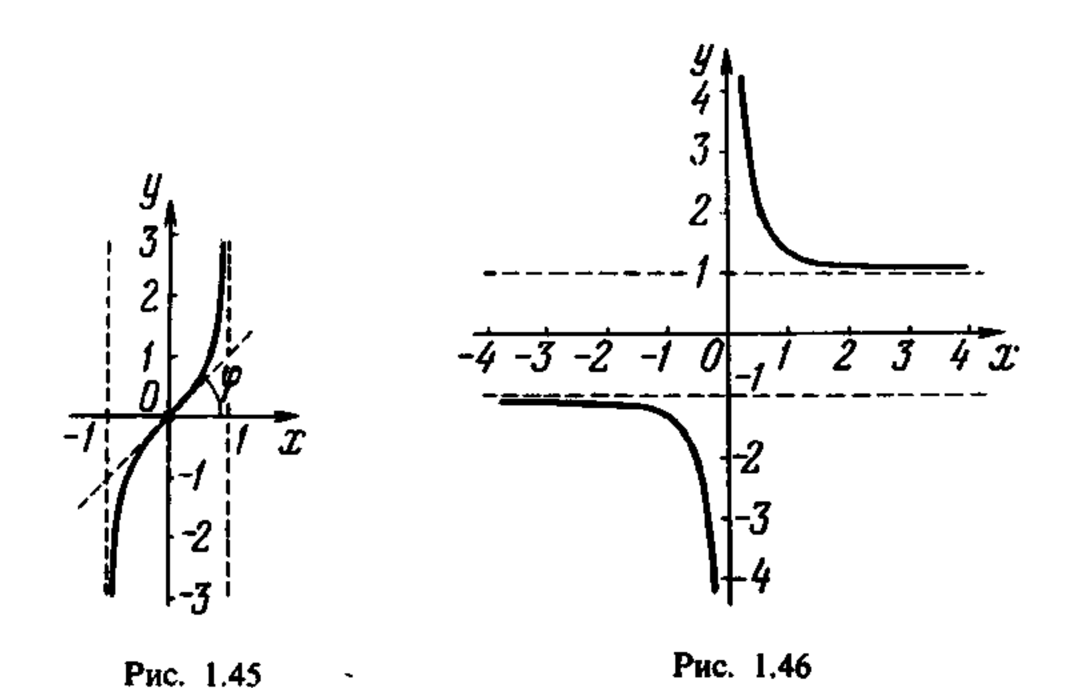


Рис. 1.45 Рис. 1.46

А р е а к о т а н г е н с: $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Эта функция является обратной функцией для $y = \operatorname{cth} x$ в обоих интервалах монотонности $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Следовательно, ее область определения распадается на интервалы $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, в которых она монотонно убывает. Ее график (рис. 1.46) центрально симметричен относительно точки (0, 0); он получается путем зеркального отражения относительно прямой $x - y = 0$ графика $y = \operatorname{cth} x$ и имеет асимптоты $y = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$.

1.3. ВАЖНЕЙШИЕ КРИВЫЕ

Если $F(x, y) = 0$ – уравнение, имеющее решения и не являющееся тождеством (см. 2.4.1.2), и если $Q = \{(a, b) \mid F(a, b) = 0\}$ – множество всех упорядоченных пар действительных чисел a и b, для которых $F(a, b) = 0$, то множество $L = \{M(a, b) \mid (a, b) \in Q\}$ всех точек M плоскости, имеющих в какой-либо системе координат S координаты a и b, называют *плоской кривой, определенной в S уравнением* $F(x, y) = 0$. Если $F(x, y)$ представляет собой, в частности, выражение $y - f(x)$ и система координат декартова, то кривая L является графиком функции $y = f(x)$ (см. 1.2). Таким образом, уравнение кривой зависит не только от вида кривой, но и от системы координат.

Кривая L называется *алгебраической кривой порядка n*, если имеются декартова система координат и многочлен $F(x, y)$ переменных x, y степени n такой, что $F(x, y) = 0$ является уравнением кривой L в этой системе координат.

В полярной системе координат (см. 2.6.5), как правило, ограничиваются уравнениями вида $\rho = f(\varphi)$. Тогда $\rho = f(\varphi)$ рассматривается как уравнение кривой L в полярных координатах.

Если $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – две функции, определенные в одном и том же промежутке I, и S – декартова система координат, то обе эти функции называются *параметрическим представлением кривой*

$$L = \{M(x(t), y(t)) \mid t \in I\}.$$

1.3.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Об алгебраических кривых 1-го и 2-го порядков см. 2.6.6.1.

1.3.1.1. Кривые 3-го порядка.

П о л у к у б и ч е с к а я п а р а б о л а (рис. 1.47). Уравнение кривой: $a^2x^3 - y^2 = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = t^2$, $y = at^3$, $-\infty < t < +\infty$. Кривизна K кривой в точке с абсциссой x: $K = 6a/(\sqrt{x}(4 + 9a^2x)^{3/2})$. Длина l дуги кривой от начала координат до точки M с абсциссой x: $l = ((4 + 9a^2x)^{3/2} - 8)/(27a^2)$.

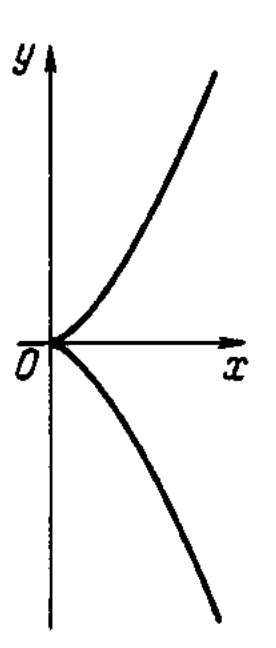


Рис. 1.47

Л о к о н А н ь е з и (рис. 1.48). Уравнение кривой: $(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$, $a > 0$. Асимптота: $y = 0$. Радиус кривизны в вершине $A(0, a)$: $R_A = a/2$. Точки перегиба: $B(a/\sqrt{3}, 3a/4)$, $C(-a/\sqrt{3}, 3a/4)$. Угловые коэффициенты касательных в точках перегиба: $\operatorname{tg}\varphi_2 = -3\sqrt{3}/8$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = 3\sqrt{3}/8$. Площадь между кривой и асимптотой: $S = \pi a^2$.

Д е к а р т о в л и с т (рис. 1.49). Уравнение кривой: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Параметрическое

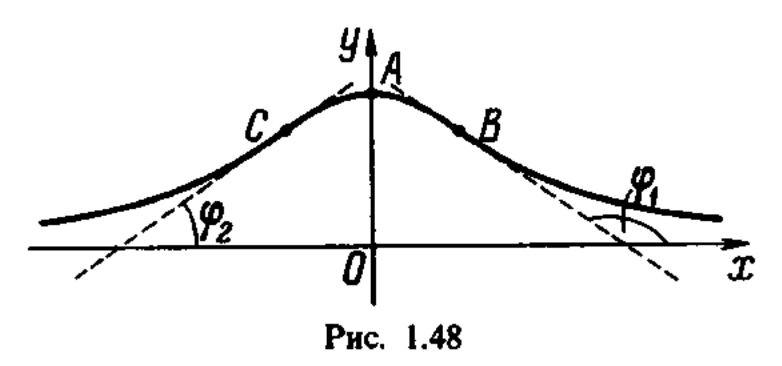


Рис. 1.48

представление: $x = 3at/(1 + t^3)$, $y = 3at^2/(1 + t^3)$, $-\infty < t < -1$ и $-1 < t < +\infty$. Если обозначить через $M(t)$ точку кривой, соответствующую значению параметра t, а через $\varphi(t)$ угол между MO и положительным направлением оси x, то будет справедливо равенство $\operatorname{tg}\varphi(t) = t$. Начало координат O – узловая точка кривой. При $-1 < t < +\infty$ кривая проходит из второго квадранта через точку (0, 0) $(t = 0)$ и A в точку (0, 0) $(t \to +\infty)$; при $-\infty < t < -1$ кривая, начинаясь в точке (0, 0), располагается в четвертом квадранте. Оси координат – касательные к кривой в точке (0, 0). Радиус кривизны в точке (0, 0) обеих ветвей кривых: $R_0 = 3a/2$. Уравнение асимптоты: $x + y + a = 0$. Вершина: $A(3a/2, 3a/2)$. Площадь петли: $S_1 = 3a^2/2$; площадь между кривой и асимптотой: $S_2 = 3a^2/2$.

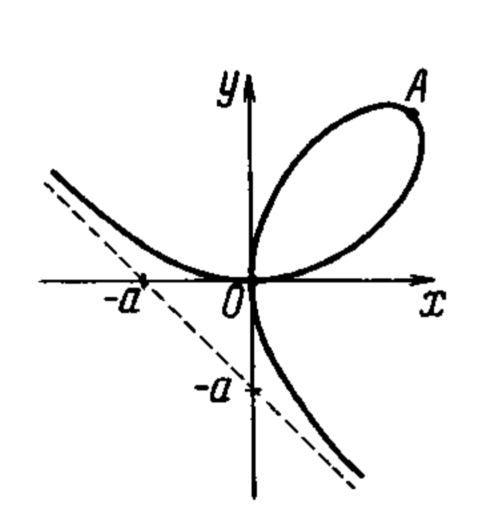


Рис. 1.49

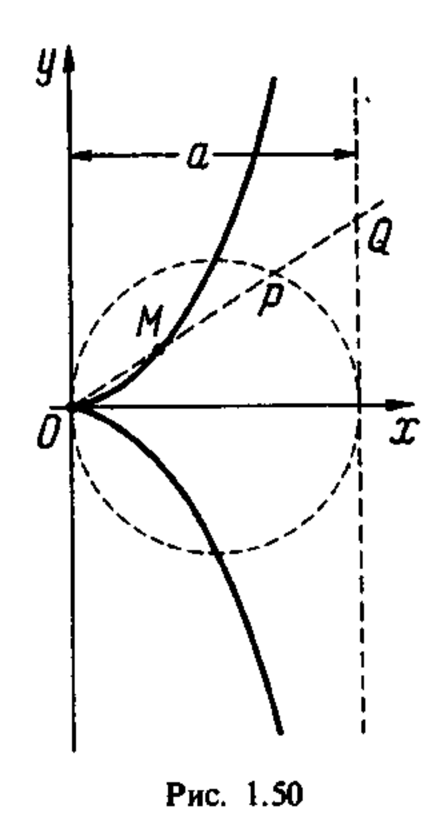


Рис. 1.50

Ц и с с о и д а (рис. 1.50). Уравнение кривой: $x^3 + (x - a)y^2 = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = at^2/(1 + t^2)$, $y = at^3/(1 + t^2)$, $-\infty < t < +\infty$; $t = \operatorname{tg}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между лучом OM и положительным направлением оси x ($M(t)$ – текущая точка кривой). Уравнение в полярных координатах: $\rho_M = a\sin^2\varphi/\cos\varphi$. Геометрическое определение: точка M находится на кривой, если она лежит на луче, выходящем из начала

координат, и $|MO| = |PQ|$, где P – вторая точка пересечения луча с окружностью радиуса $a/2$ и центром $(a/2, 0)$, а Q – точка пересечения луча с прямой $x - a = 0$. Точка $(0, 0)$ – точка возврата кривой. Асимптота: $x - a = 0$; площадь между кривой и асимптотой: $S = 3\pi a^2/4$.

Строфоида (рис. 1.51). Уравнение кривой: $(x + a)a^2 + (x - a)y^2 = 0$, $a > 0$. Параметрическое представление: $x = a(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $y = at(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $-\infty < t < +\infty$; $t = \operatorname{tg}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между прямой MO и положительным

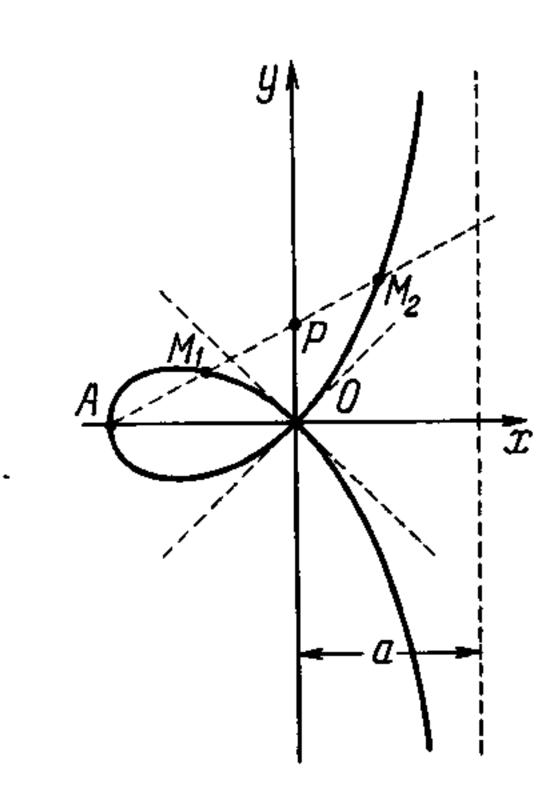


Рис. 1.51

направлением оси x ($M = M(t)$ – текущая точка кривой). Уравнение в полярных координатах: $\rho = -a\cos 2\varphi/\cos\varphi$. Геометрическое определение: точка M лежит на кривой, если она лежит на луче, выходящем из $A(-a, 0)$, и $|PM| = |PO|$, где P – точка пересечения луча с осью y, O – начало координат (на рис. 1.51 $|PM_1| = |PO| = |PM_2|$). Начало координат – узловая точка кривой, прямые $x + y = 0$ и $x - y = 0$ – касательные к кривой в O. Асимптота: $x - a = 0$. Вершина: $A(-a, 0)$. Площадь петли: $S_1 = 2a^2 - \pi a^2/2$; площадь между кривой и асимптотой: $S_2 = 2a^2 + \pi a^2/2$.

1.3.1.2. Кривые 4-го порядка.

Конхоида Никомеда (рис. 1.52). Уравнение кривой: $(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$, $a > 0$,

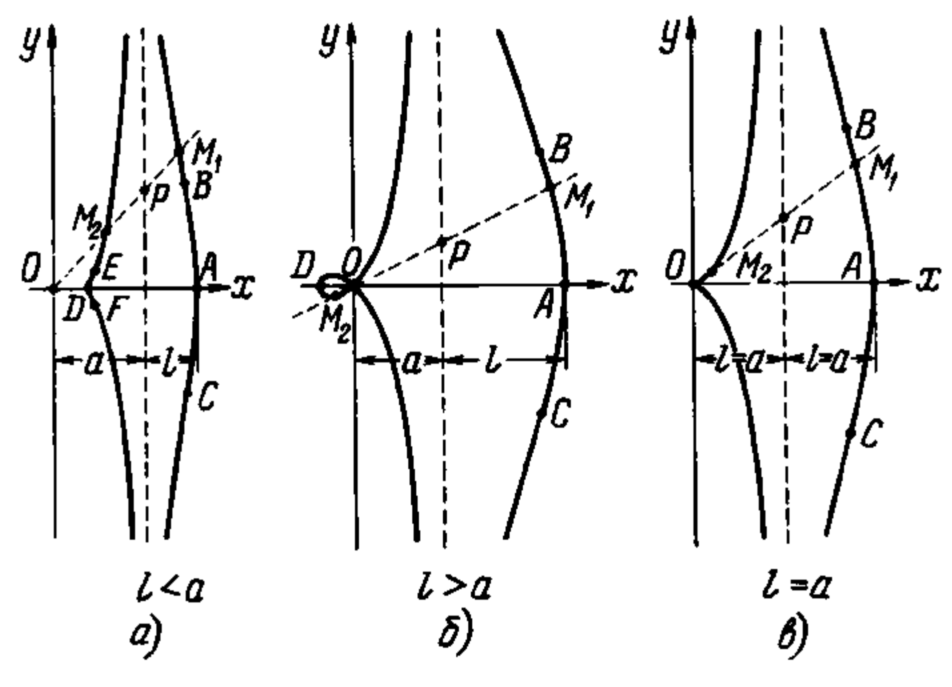


Рис. 1.52

$l > 0$. Параметрическое представление: $x = a + l\cos t$, $y = a\operatorname{tg}t + l\sin t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$ – правая ветвь, $\pi/2 < t < 3\pi/2$ – левая ветвь. Уравнения в полярных координатах: $\rho = (a/\cos\varphi) + l$ – правая ветвь, $\rho = (a/\cos\varphi) - l$ – левая ветвь. Геометрическое определение конхоиды Никомеда: конхоида *) прямой $x - a = 0$ относительно O. Асимптота: $x - a = 0$ (для обеих ветвей). Вершины: $A(a + l, 0)$ – правая ветвь, $D(a - l, 0)$ – левая. Точки перегиба правой ветви: B и C; их абсцисса – наибольший корень уравнения $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$. Для левой ветви следует различать три случая: а) $l < a$ (рис. 1.52, а). Точка O – изолированная точка кривой (O в этом случае в параметрическом представлении не содержится). Левая ветвь имеет две точки перегиба, абсцисса которых – второй по величине корень выписанного выше уравнения. б) $l > a$ (рис. 1.52, б). O – узловая точка кривой, касательные в O имеют угловые коэффициенты $\sqrt{l^2 - a^2}/a$ или $-\sqrt{l^2 - a^2}/a$, радиус кривизны в O: $R_0 = l\sqrt{l^2 - a^2}/(2a)$. в) $l = a$ (рис. 1.52, в). Точка O совпадает с вершиной D и является точкой возврата.

Улитка Паскаля (рис. 1.53). Уравнение кривой: $(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$, $a > 0$, $l > 0$.

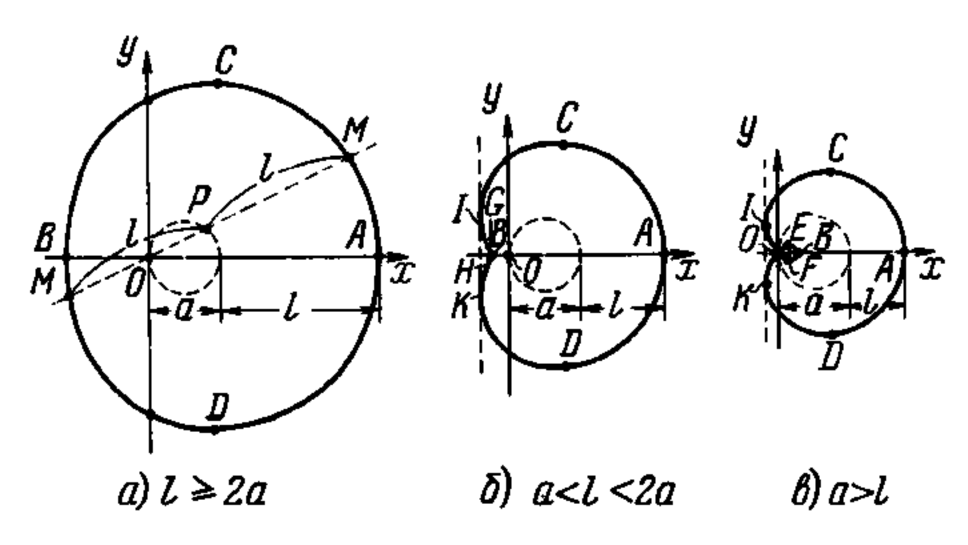


Рис. 1.53

В параметрической форме (при $a < l$ точка O не включается): $x = a\cos^2 t + l\cos t$, $y = a\cos t\sin t + l\sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$. Уравнение в полярных координатах (при $a < l$ без точки O): $\rho = a\cos\varphi + l$. Геометрическое определение (без O как изолированной точки): конхоида окружности с радиусом $a/2$ и центром $(a/2, 0)$ относительно O. Вершины $A(a + l, 0)$, $B(a - l, 0)$. Экстремумов четыре, если $a > l$, и два, если $a \leqslant l$:

$$C,\ D,\ E,\ F\left(\cos t = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{(4a)}\right).$$

Точки перегиба G, $H\left(\cos t = -\dfrac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$ существуют, если $a < l < 2a$. Если $l < 2a$, то существуют две точки: $I(-l^2/(4a), l\sqrt{4a^2 - l^2}/(4a))$ и $K(-l^2/(4a), -l\sqrt{4a^2 - l^2}/(4a))$, обладающие общей касательной. При $a < l$ точка O – изолированная точка кривой, при $a > l$ точка O – угловая точка с двумя касательными (угловой коэффициент касательных

*) *Конхоидой* данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l. Если уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $\rho = f(\varphi)$, то уравнением ее конхоиды будет $\rho = f(\varphi) \pm l$. Конхоида Никомеда – конхоида прямой линии.

$\sqrt{a^2-l^2}/l$ и $-\sqrt{a^2-l^2}/l$) и радиусом кривизны $\sqrt{a^2-l^2}/2$, при $a=l$ точка O – точка возврата (см. кардиоиду).

Кардиоида (рис. 1.54). Уравнение кривой: $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0$, $a>0$. В параметрической форме: $x=a\cos t(1+\cos t)$, $y=a\sin t(1+\cos t)$, $0\leqslant t<2\pi$. Уравнение в полярных

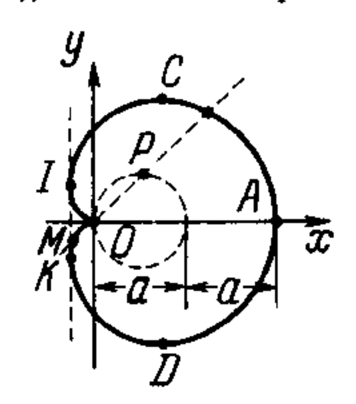


Рис. 1.54

координатах: $\rho=a(1+\cos\varphi)$. Геометрическое определение: частный случай улитки Паскаля (см. выше) или частный случай эпициклоиды (см. 1.3.2). Вершина: $A(2a, 0)$; точка возврата – точка O. Координаты экстремумов C и D: $x_C=x_D=3a/4$, $y_C=-y_D=\sqrt{3}x_C, \varphi_C=-\varphi_D=\pi/3, \rho_C=\rho_D=3a/2$. Площадь: $S=3\pi a^2/2$ (шестикратная площадь круга с диаметром a). Длина кривой: $s=8a$.

Овалы Кассини (рис. 1.55). Уравнение кривой: $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)-(a^4-c^4)=0$, $c>0$, $a>0$.

В полярных координатах: $\rho^2=c^2\cos 2\varphi\pm\sqrt{c^4\cos^2 2\varphi+(a^4-c^4)}$. Геометрическое определение: точка M плоскости лежит на кривой,

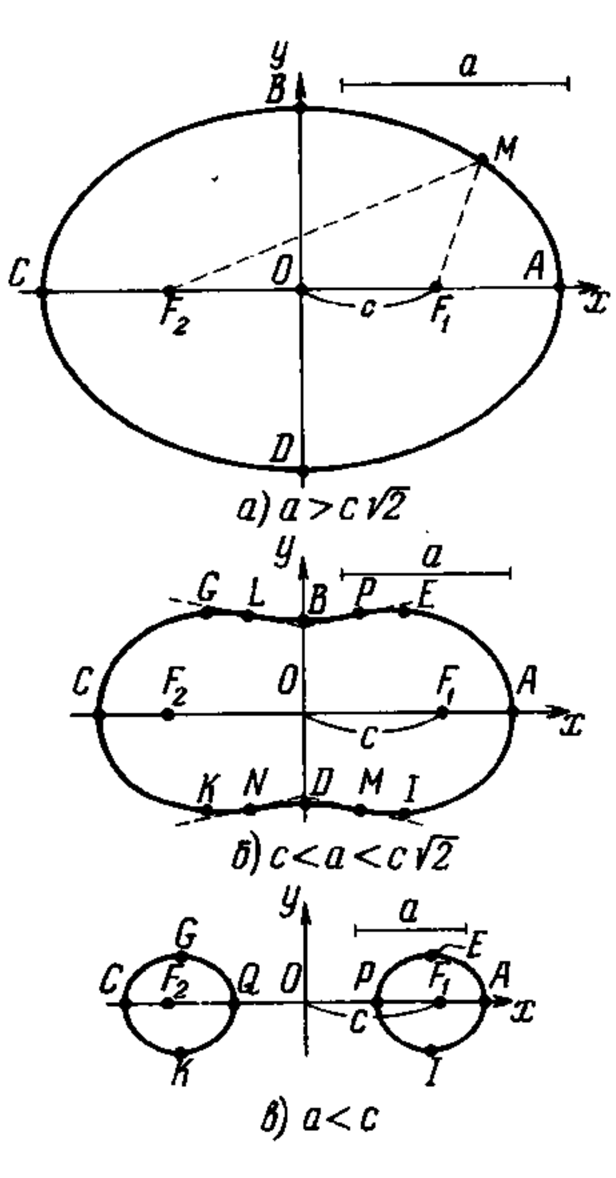


Рис. 1.55

если произведение ее расстояний до фиксированных точек F_1 и F_2 постоянно: $|MF_1|\cdot|MF_2|=a^2$; при этом F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Форма кривой зависит от отношения a/c:

а) $a\geqslant c\sqrt{2}$ (рис. 1.55, *а*). Вершины: $A(\sqrt{a^2+c^2}, 0)$, $C(-\sqrt{a^2+c^2}, 0)$, $B(0, \sqrt{a^2-c^2})$, $D(0, -\sqrt{a^2-c^2})$. Если $a=c\sqrt{2}$, то кривизна в точках B и D равна нулю (кривая имеет с касательными в B и D касание 3-го порядка).

б) $c<a<c\sqrt{2}$ (рис. 1.55, *б*). Имеются четыре точки перегиба: P, L, M, N. Их координаты: $x_P=-x_L=x_M=-x_N=\sqrt{(m-n)/2}$, $y_P=y_L=-y_M=-y_N=\sqrt{(m+n)/2}$, где $m=\sqrt{(a^4-c^4)/3}$, $n=(a^4-c^4)/(3c^2)$. Точки E и G, а также K и I имеют при $c\sqrt{2}>a$ общие касательные. Их координаты: $x_E=-x_G=-x_K=x_I=\sqrt{4c^4-a^4}/(2c)$, $y_E=y_G=-y_K=-y_I=a^2/(2c)$.

в) $a=c$ Лемниската (см. ниже).

г) $a<c$ (рис. 1.55, *в*). Пересечения с осью x: $A(\sqrt{a^2+c^2}, 0)$, $C(-\sqrt{a^2+c^2}, 0)$, $P(\sqrt{c^2-a^2}, 0)$, $Q(-\sqrt{c^2-a^2}, 0)$. Координаты точек E, G, I, K: $x_E=x_I=-x_G=-x_K=\sqrt{4c^4-a^4}/(2c)$, $y_E=y_G=-y_I=-y_K=a^2/(2c)$.

Лемниската (рис. 1.56). Уравнение кривой: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$, $a>0$. В полярных

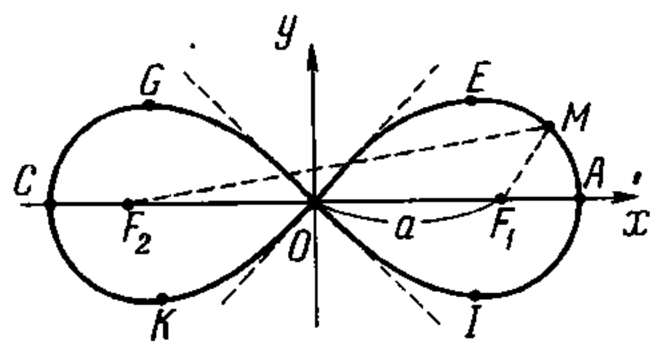


Рис. 1.56

координатах: $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Геометрическое определение: точка M плоскости лежит на кривой, если произведение ее расстояний до фиксированных точек $F_1(a, 0)$ и $F_2(-a, 0)$ постоянно: $|F_1M|\cdot|F_2M|=(|F_1F_2|/2)^2$. (Частный случай овала Кассини.) Начало координат – узловая точка с касательными $y=\pm x$, она же – точка перегиба. Пересечение кривой с осью x: $A(a\sqrt{2}, 0)$, $C(-a\sqrt{2}, 0)$; координаты точек E, G, I, K:

$$x_E=x_I=-x_G=-x_K=a\sqrt{3}/2,$$

$$y_E=y_G=-y_I=-y_K=a/2.$$

Радиус кривизны: $r=2a^2/(3\rho)$; площадь каждой петли: $S=a^2$.

1.3.2. ЦИКЛОИДЫ

Циклоидой называется кривая, описываемая точкой, отстоящей на фиксированное расстояние от центра круга, катящегося без скольжения по данной кривой – направляющей циклоиды.

Обыкновенная циклоида (рис. 1.57). Направляющая кривая – прямая линия. Уравнение в декартовых координатах: $a\cos((x+\sqrt{y(2a-y)})/a)=a-y$, $a>0$. В параметрической форме: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $-\infty<t<+\infty$, a – радиус катящейся окружности, $t=\angle MC_1B$ называется *углом качения*. Точки возврата: $O_k(2k\pi a, 0)$. Вершины: $A_k((2k-1)\pi a, 2a)$.

Длина дуги OM: $s = 8a\sin(t/4)$, $M(t)$ – текущая точка; длина дуги одной ветви OA_1O_1: $s = 8a$. Площадь между дугой OA_1O_1 и осью x: $S = 3\pi a^2$. Радиус кривизны: $R(t) = 4a\sin(t/4)$. Радиус

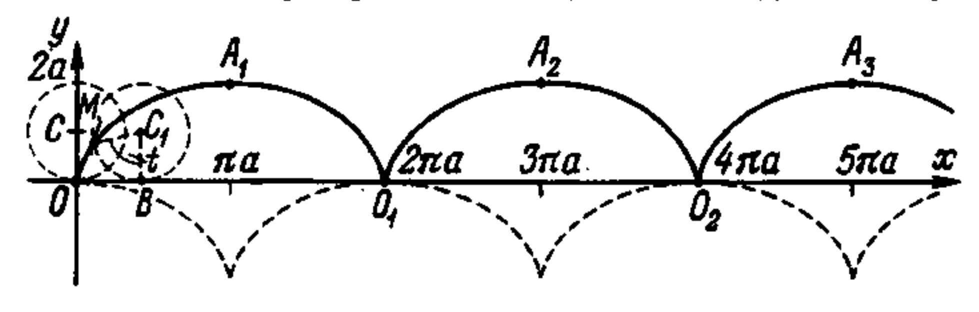


Рис. 1.57

кривизны в вершинах: $R_A = 4a$. Эволюта циклоиды (см. 4.3.1.5) – такая же циклоида (на рис. 1.57 изображена штриховой линией).

Укороченная и удлиненная циклоиды (трохоиды) (рис. 1.58). Уравнения в параметрической форме: $x = a(t - \lambda\sin t)$, $y = a(1 - \lambda\cos t)$, a – радиус окружности; $t = \angle MC_1P$ (угол качения); $\lambda a = \overline{C_1M}$ (при $\lambda > 1$ (рис. 1.58, *а*) – удлиненная циклоида, при $\lambda < 1$ (рис. 1.58, *б*) – укороченная циклоида). Вершины $A_k((2k-1)\pi a,$

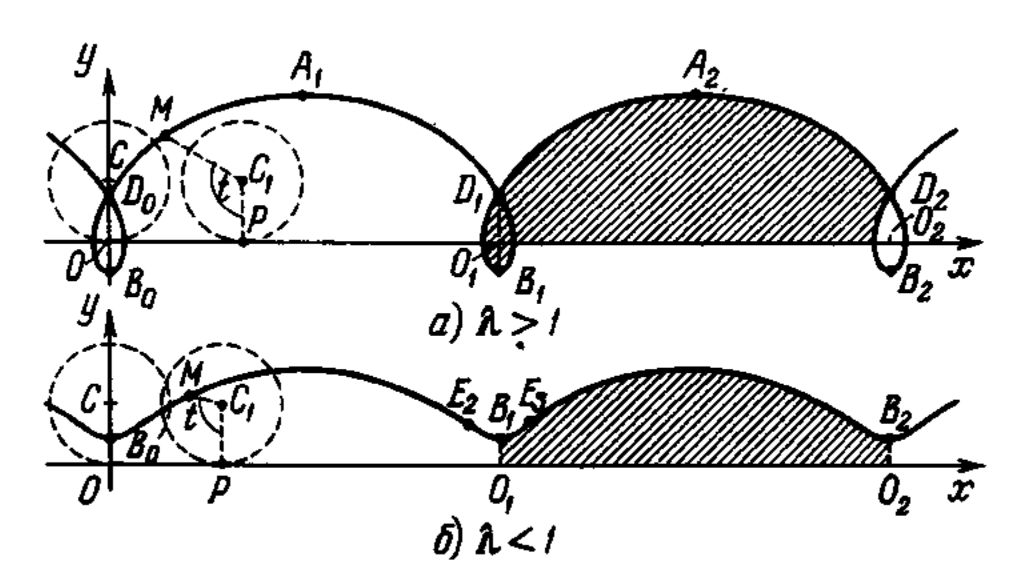


Рис. 1.58

$(1+\lambda)a)$ – максимум с радиусом кривизны $R_A = a(1+\lambda)^2/\lambda$ и $B_k(2k\pi a, (1-\lambda)a)$ – минимум с радиусом кривизны $R_B = a(1-\lambda)^2/\lambda$. Длина дуги B_kB_{k+1}: $a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,dt$. Площадь, заштрихованная на рис. 1.58: $S = \pi a^2(2+\lambda^2)$. Радиус кривизны: $R(t) = \dfrac{a(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t-\lambda)}$. Узловые точки D_k удлиненной циклоиды: $(2k\pi a,\ a(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2}))$, где t_0 – наименьший положительный корень уравнения $t - \lambda\sin t = 0$. Укороченная циклоида имеет точки перегиба:

$$E^{2k}(a(-\arccos\lambda + 2k\pi - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}),\ a(1-\lambda^2)),$$
$$E_{2k+1}(a(\arccos\lambda + 2k\pi - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}),\ a(1-\lambda^2)).$$

Эпициклоиды (рис. 1.59). Направляющая кривая – окружность радиуса b; окружность радиуса a катится без скольжения вне ее. Уравнения в параметрической форме:

$$x = (a+b)\cos\varphi - a\cos((a+b)\varphi/a),$$
$$y = (a+b)\sin\varphi - a\sin((a+b)\varphi(a),$$
$$-\infty < \varphi < +\infty,\quad \varphi = \angle COA_1.$$

Вид кривых зависит от отношения $m = b/a$.

а) m – целое положительное число. Кривая состоит из m равных друг другу дуг, «обходящих» направляющую окружность (рис. 1.59, *а*). Достаточно рассмотреть изменения φ от нуля до 2π, так как кривая далее переходит сама в себя. При $m = 1$ получается *кардиоида* (см. 1.3.1.2). Точки возврата A_k при $1 \leqslant k \leqslant m$ получаются при значениях параметра $\varphi_{A_k} = 2(k-1)\pi/m$; вершины B_k – при $\varphi_{B_k} = (2k-1)\pi/m$.

б) $m = p/q$, p и q – положительные, целые, взаимно простые числа. Кривая состоит из p равных друг другу пересекающихся дуг (рис. 1.59, *б*). Кривая замкнута. Промежуток изменения параметра: $0 \leqslant \varphi < 2q\pi$.

в) Если m иррациональное, то кривая состоит из бесконечного числа равных друг другу дуг. Кривая не замкнута. Длина дуги между двумя точками возврата: $8(a+b)/m$. Площадь между

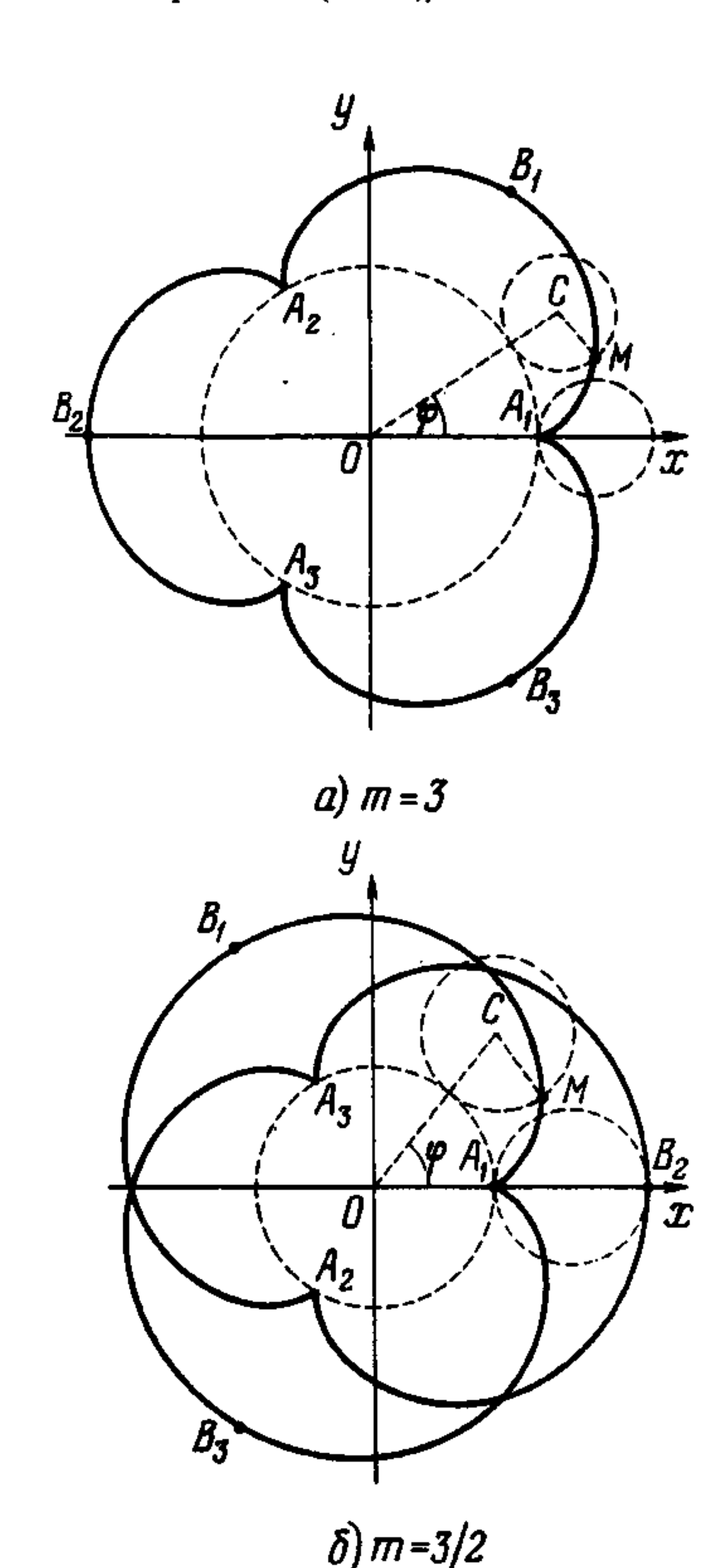


Рис. 1.59

дугой и направляющей окружностью: $S = \pi a^2(2a+3b)/b$. Радиус кривизны:

$$R(\varphi) = \frac{4a(a+b)\sin(b\varphi/(2a))}{2a+b};$$

в вершинах B_k:

$$R_{B_k} = \frac{4a(a+b)}{(2a+b)}.$$

Гипоциклоиды (рис. 1.60). Направляющая кривая — окружность радиуса b; окружность радиуса a катится без скольжения внутри нее. Уравнения в параметрической форме:

$$x = (b-a)\cos\varphi + a\cos((b-a)\varphi/a),$$
$$y = (b-a)\sin\varphi - a\sin((b-a)\varphi/a),$$
$$b > a, \ -\infty < \varphi < \infty.$$

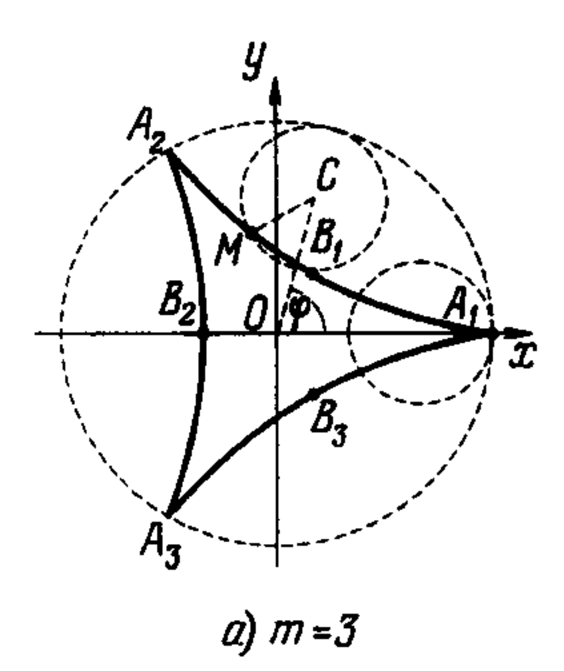
Так как $b > a$, то всегда $m = b/a > 1$. При $m = 2$ гипоциклоида вырождается в диаметр направляющей окружности. (О числе равных друг другу дуг кривых и параметрических интервалов см. эпициклоиды. Там же см. и значения параметров точек возврата и вершин.) Длина дуги одной ветви (между двумя точками возврата): $8(b-a)/m$. Площадь между одной ветвью и направляющей окружностью: $S = \pi a^2(3b-2a)/b$. Радиус кривизны:

$$R(\varphi) = \frac{4a(b-a)\sin(b\varphi/(2a))}{b-2a};$$

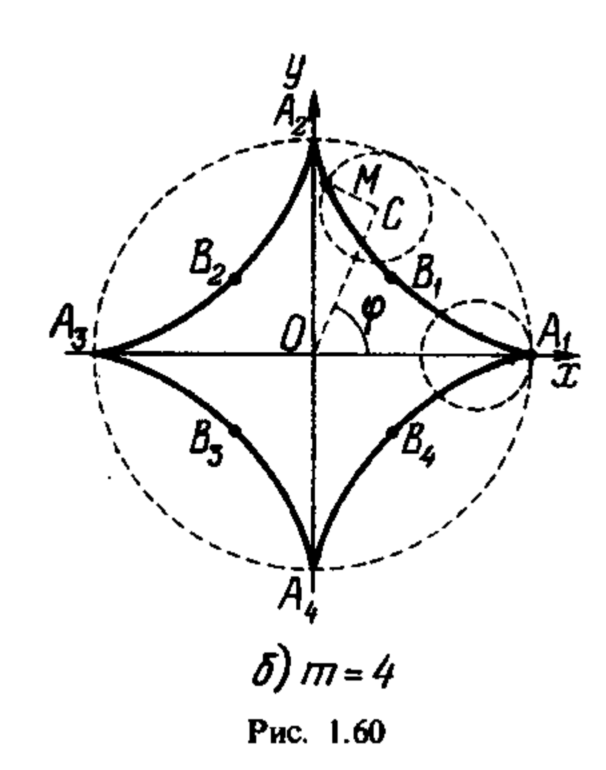
и вершинах B_k:

$$R_{B_k} = \frac{4a(b-a)}{b-2a}.$$

При $m = 3$ гипоциклоида с тремя ветвями (рис. 1.60, *а*); длина кривой: $s = 16a$; площадь, ограниченная кривой: $2\pi a^2$. В частном случае $m = 4$ получается *астроида* (рис. 1.60, *б*). Уравнения в параметрической форме: $x = b\cos^3\varphi$, $y = b\sin^3\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; в декартовых координатах: $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$, или $(x^2+y^2-b^2)^3 + 27x^2y^2b^2 = 0$ (алгебраическая кривая 6-го порядка). Длина кривой равна $s = 6b = 24a$; площадь, ограниченная кривой: $S = 3\pi b^2/8 = 6\pi a^2$.



а) m=3



б) m=4

Рис. 1.60

Удлиненная и укороченная эпи- и гипоциклоиды (рис. 1.61 и 1.62). Уравнения в параметрической форме удлиненных и укороченных эпициклоид:

$$x = (a+b)\cos\varphi - \lambda a\cos\frac{(a+b)\varphi}{a},$$
$$y = (a+b)\sin\varphi - \lambda a\sin\frac{(a+b)\varphi}{a},$$
$$a > 0, \ b > 0, \ \lambda a = \overline{CM}, \ -\infty < \varphi < +\infty$$

(для удлиненной эпициклоиды $\lambda > 1$, рис. 1.61, *а*; для укороченной $\lambda < 1$, рис. 1.61, *б*).

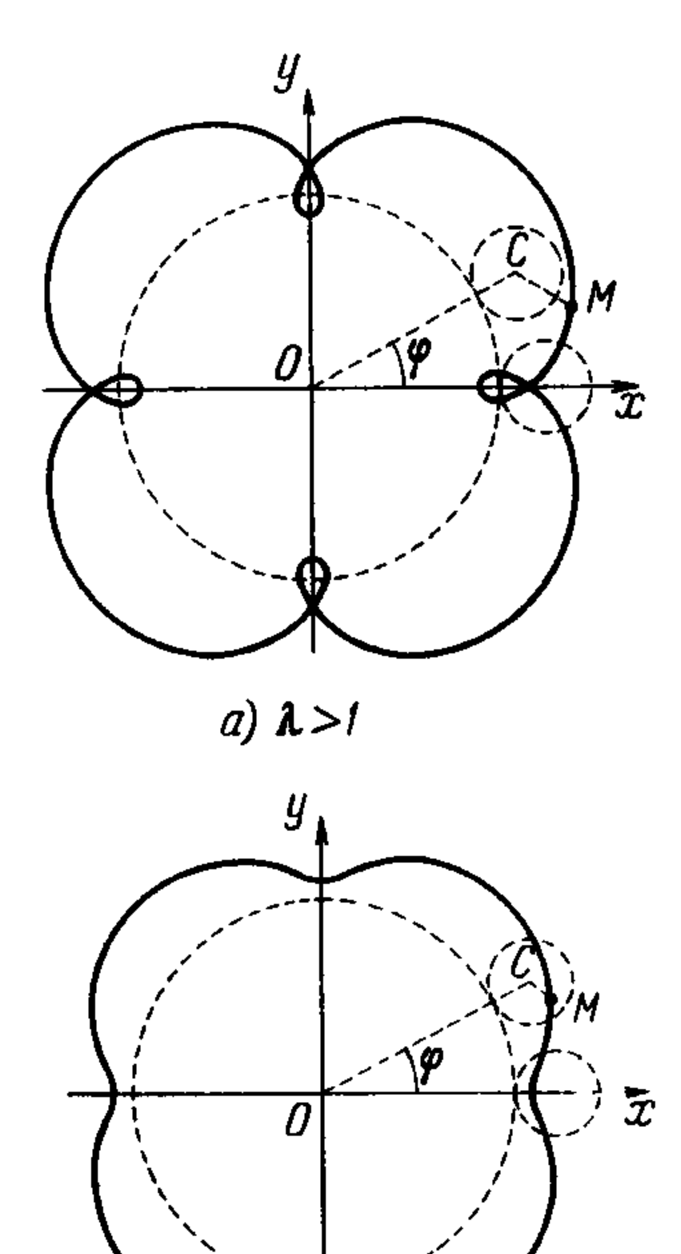


Рис. 1.61

Параметрические уравнения удлиненной и укороченной гипоциклоид:

$$x = (b-a)\cos\varphi + \lambda a\cos\frac{(b-a)\varphi}{a},$$
$$y = (b-a)\sin\varphi - \lambda a\sin\frac{(b-a)\varphi}{a},$$
$$b > a > 0, \ \lambda a = \overline{CM}, \ -\infty < \varphi < +\infty$$

(для удлиненной гипоциклоиды $\lambda > 1$, рис. 1.61, *а*; для укороченной $\lambda < 1$, рис. 1.62, *б*). Частные случаи:

а) гипоциклоида $b = 2a$: $x = a(1+\lambda)\cos\varphi$, $y = a(1-\lambda)\sin\varphi, \lambda \neq 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Кривая — *эллипс* с полуосями $a(1+\lambda)$ и $|a(1-\lambda)|$ (см. 2.6.6.1);

б) эпициклоида $b = a$:

$$x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi),\ y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi),$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

есть *улитка Паскаля* (см. 1.3.1.2; следует, однако,

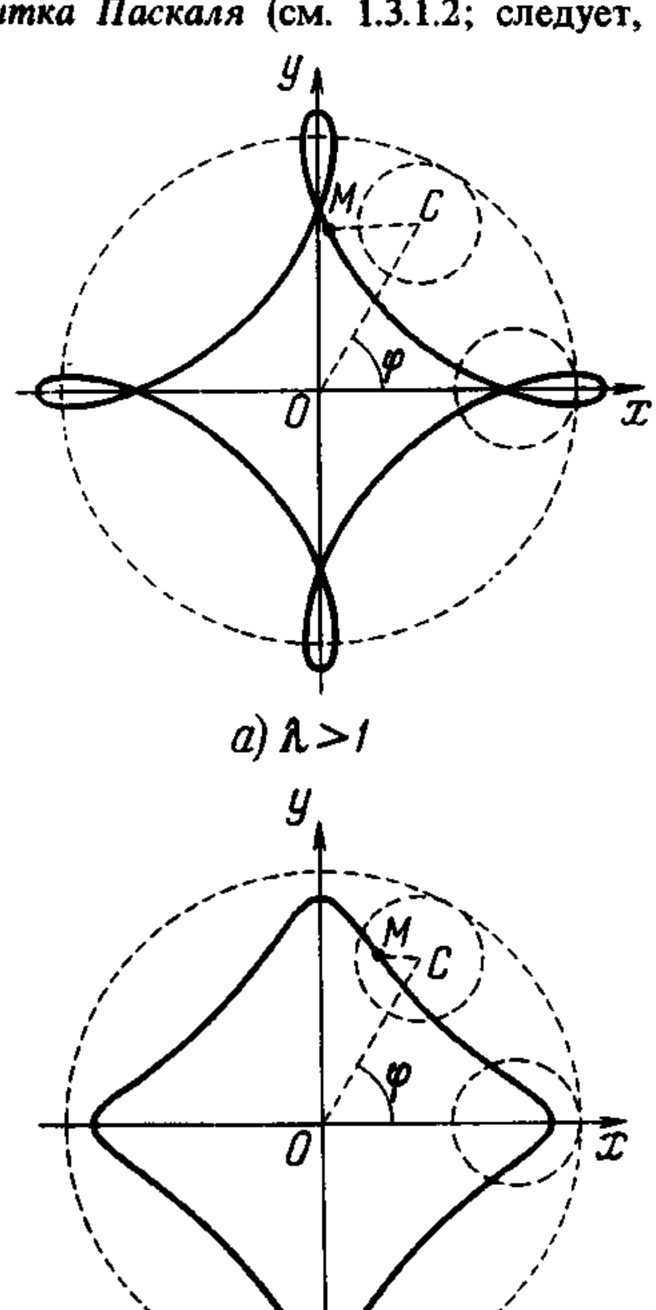


Рис. 1.62

обратить внимание на другое положение кривой относительно координатной системы).

1.3.3. СПИРАЛИ

Архимедовы спирали (рис. 1.63). Кривая представляет собой путь, описываемый некоторой точкой, движущейся с постоянной скоростью v

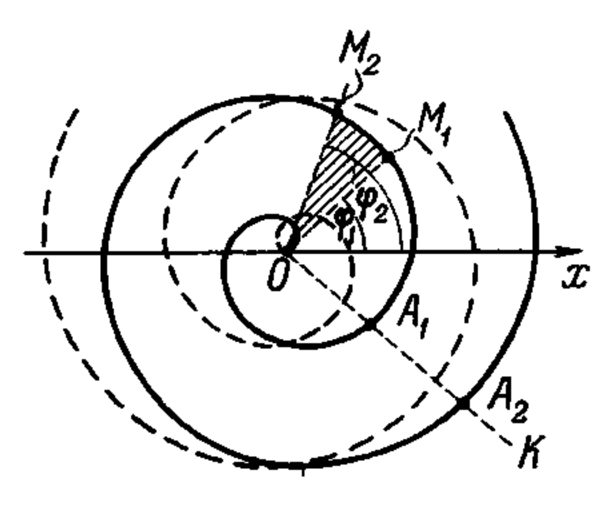


Рис. 1.63

по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω. Уравнение в полярных координатах: $\rho = a\varphi$, $a = v/\omega > 0$, $-\infty < \varphi < \infty$. Первая ветвь: $0 \leqslant \varphi < +\infty$; вторая: $-\infty < \varphi \leqslant 0$ (на рис. 1.63 изображена штриховой линией). Каждый луч OK пересекает кривую в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, находящихся друг от друга на расстоянии $\overline{A_iA_{i+1}} = 2\pi a$. Длина дуги OM: $s = a(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{Arsh}\varphi)/2$; для больших φ имеем $\lim\limits_{\varphi\to+\infty} s/\varphi^2 = a/2$. Площадь сектора M_1OM_2: $a^2(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)/6$. Радиус кривизны: $R(\varphi) = a(\varphi^3 + 1)^{3/2}/(\varphi^2+2)$.

Гиперболические спирали (рис. 1.64). Уравнения в параметрическом виде: $x = (a\cos t)/t$, $y = (a\sin t)/t$, $-\infty < t < 0$ и $0 < t < +\infty$. Кривые

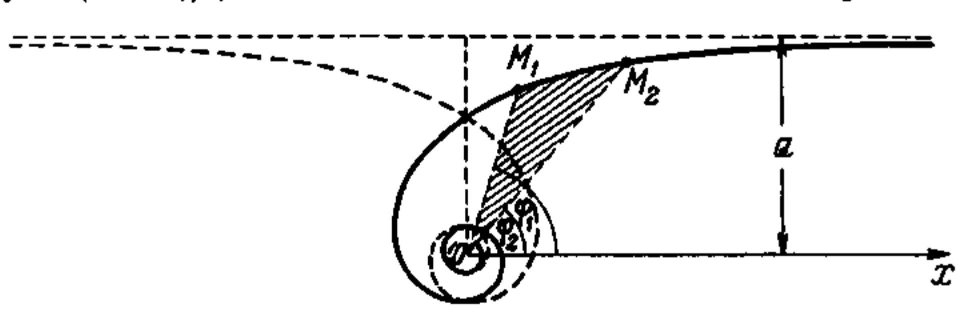


Рис. 1.64

состоят из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси y. Первая ветвь: $-\infty < t < 0$ (на рис. 1.64 штриховая линия); вторая ветвь: $0 < t < +\infty$. В полярных координатах уравнение первой ветви: $\rho = a/|\varphi - \pi|$, $-\infty < \varphi < \pi$; второй ветви: $\rho = a/\varphi$, $0 < \varphi < +\infty$. Для обеих ветвей прямая $y - a = 0$ – асимптота ($\varphi \to -\pi$ и $\varphi \to 0$), а точка O – асимптотическая точка ($\varphi \to -\infty$ и $\varphi \to +\infty$). Площадь заштрихованного сектора M_1OM_2: $S = a^2(1/\varphi_2 - 1/\varphi_1)/2$. Существует $\lim\limits_{\varphi_1\to\infty} S = a^2/(2\varphi_2)$. Радиус кривизны (вторая ветвь):

$$R(\varphi) = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3.$$

Логарифмические спирали (рис. 1.65). Уравнение в полярных координатах: $\rho = ae^{k\varphi}$, $a > 0$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Кривая пересекает все лучи,

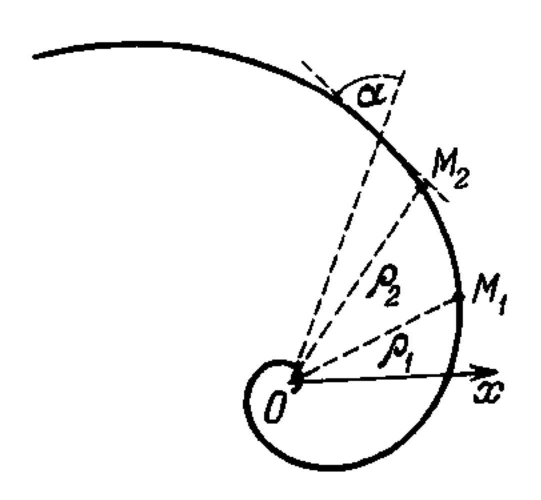


Рис. 1.65

выходящие из точки O, под одним и тем же углом α. При этом $k = \operatorname{ctg}\alpha$. При $\alpha = \pi/2$, т. е. при $k = 0$, кривая вырождается в окружность. Полюс O – асимптотическая точка кривой. Длина дуги M_1M_2: $s = (\rho_2 - \rho_1)\sqrt{1+k^2}/k$; длина дуги OM от начала до точки M с полярным радиусом ρ: $s_0 = \rho\sqrt{1+k^2}/k$. Радиус кривизны: $R(\rho) = \sqrt{1+k^2}\rho$.

Развертка (эвольвента) окружности (рис. 1.66; ср. также 4.3.1.5). Если A – некоторая

определенная точка на окружности радиуса a с центром в O, а M — произвольная точка эвольвенты, то длина дуги AB равна длине отрезка MB. Уравнения в параметрической форме:

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi,\ y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi,$$
$$-\infty < \varphi < +\infty,\ \varphi = \angle MOA.$$

Кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно оси x (при $-\infty < \varphi \leqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi < +\infty$), с общей точкой в

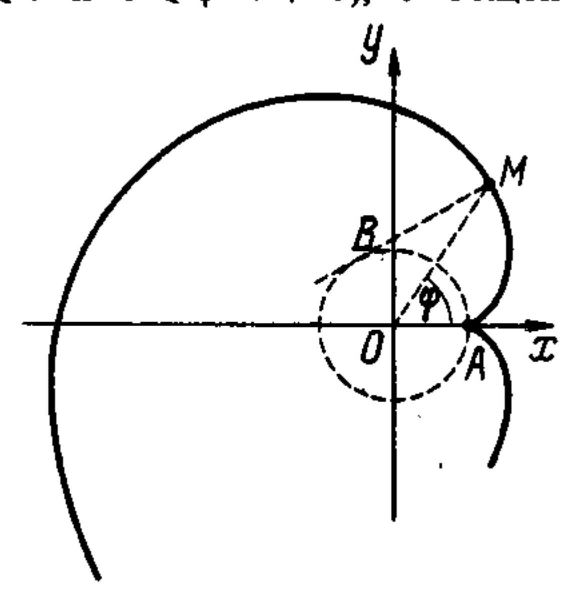


Рис. 1.66

точке возврата $A(a, 0)$. Длина дуги AM: $s = a\varphi^2/2$. Радиус кривизны: $R(\varphi) = a|\varphi|$. Все центры кривизны лежат на окружности радиуса a с центром в O.

Клотоида (рис. 1.67). Кривая проходит через точку O, причем величина, обратная радиусу

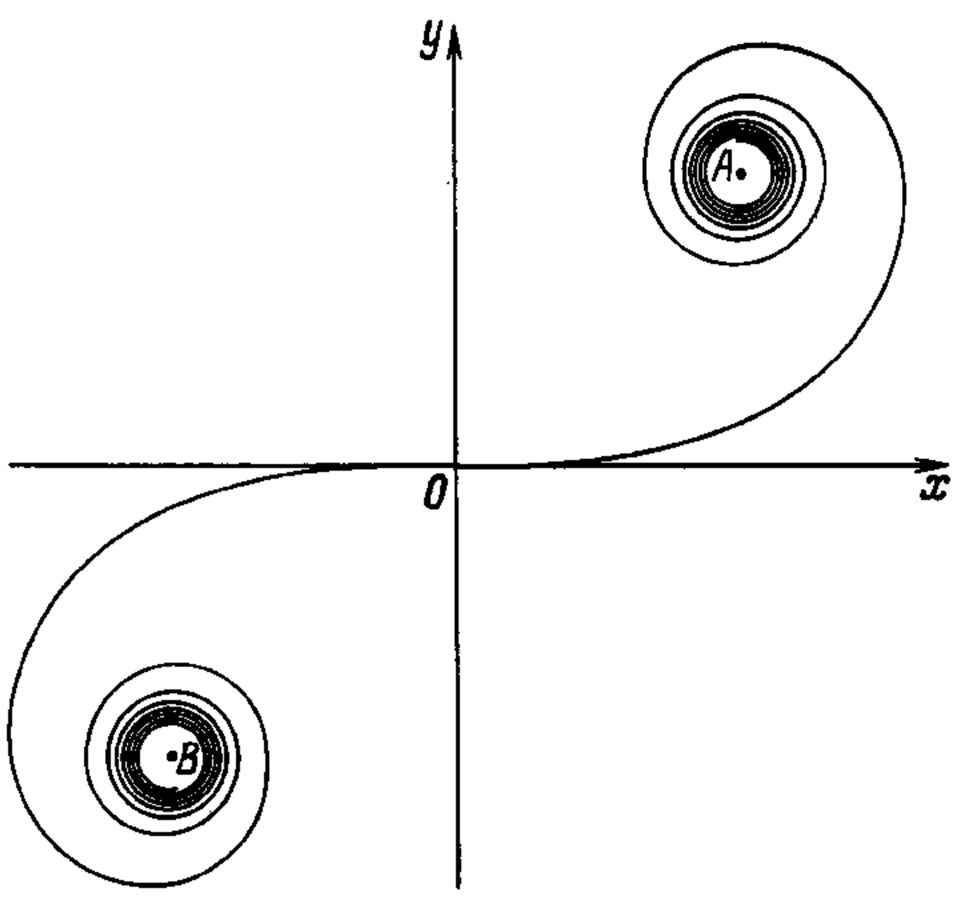


Рис. 1.67

кривизны (сама кривизна), в каждой точке M кривой пропорциональна длине дуги кривой $s = OM$, т. е. $1/R = sa^2$ (множитель пропорциональности $1/a^2$). Уравнения в параметрической форме*):

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi u^2}{2}du,\ y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi u^2}{2}du,$$
$$-\infty < t < +\infty,\ t = s/(a\sqrt{\pi}),\ s = \overset{\smile}{OM},\ a > 0,$$

*) Эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

Точка O — центр симметрии кривой. Имеются две асимптотические точки:

$$A(a\sqrt{\pi}/2,\ a\sqrt{\pi}/2),\ B(-a\sqrt{\pi}/2,\ -a\sqrt{\pi}/2).$$

1.3.4. ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ И ТРАКТРИСА

Цепная линия (рис. 1.68). Форму цепной линии принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках.

Уравнение в декартовых координатах: $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $a > 0$. Кривая подобна графику функции $\bar{y} = \mathrm{ch}\,\bar{x}$ (см. 1.2.2.3) (преобразование подобия: $x = a\bar{x}$, $y = a\bar{y}$). Вблизи вершины $A(0, a)$ кривую

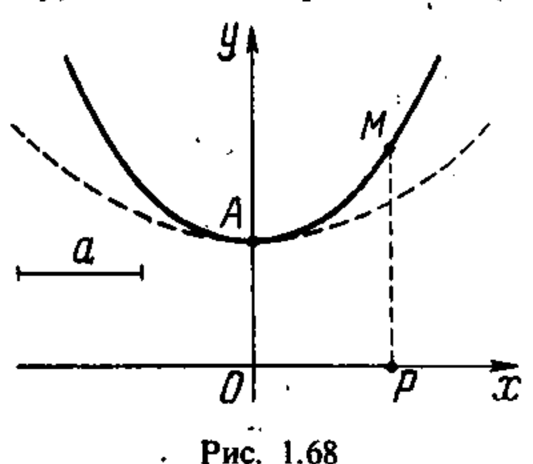


Рис. 1.68

можно приблизить параболой $y = a + x^2/(2a)$ (на рис. 1.68 штриховая линия). Длина дуги AM: $s(x) = a\,\mathrm{sh}(x/a)$. Величина площади криволинейной трапеции $OAMP$: $S(x) = as(x) = a^2\,\mathrm{sh}(x/a)$, где $M(x)$ — текущая точка кривой с абсциссой x. Радиус кривизны: $R = y^2/a = a\,\mathrm{ch}^2(x/a)$.

Трактриса. Пусть M — произвольная точка кривой, P — точка пересечения касательной в M с осью x; тогда $|PM| = a$, или, иными словами: если к одному концу нерастяжимой нити длины a прикреплена точка M, а другой конец нити движется по оси x, то M описывает трактрису (линию влечения, рис. 1.69). Уравнение правой ветви в декартовых координатах:

$$x = a\ln((a + \sqrt{a^2 - y^2})/y) - \sqrt{a^2 - y^2} =$$
$$= a\,\mathrm{Arch}(a/y) - \sqrt{a^2 - y^2},\ a > 0,\ 0 < y \leqslant a.$$

Уравнение левой ветви получается заменой x

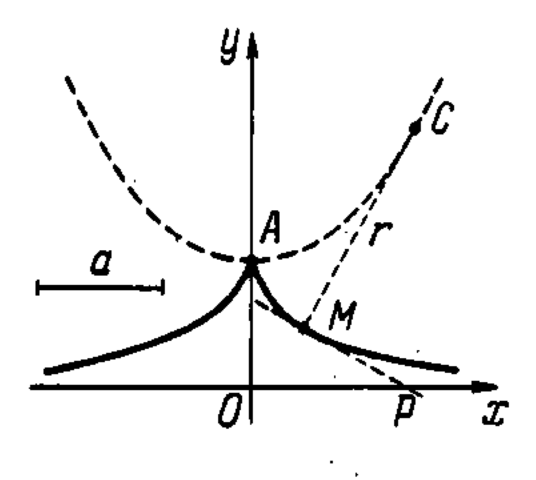


Рис. 1.69

на $-x$. Оба уравнения возведением обеих частей в квадрат можно привести к одному. Точка $A(0, a)$ — точка возврата, ось x — асимптота, ось y — ось симметрии. Длина дуги AM: $s(y) = a\ln(a/y)$; при этом $\lim_{y\to 0}|s(y) - x(y)| = a(1 - \ln 2) \approx 0{,}3069\,a$.

Радиус кривизны: $R(y) = a\sqrt{a^2 - y^2}/y$; соответствующая кривая центров кривизны (эволюта, см. 4.3.1.5) — цепная линия (на рис. 1.69 штриховая линия) с уравнением $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

2.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

2.1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1.1.1. Представление чисел в позиционной системе счисления. Для представления чисел применяют цифры или, точнее говоря, цифровые ряды или (цифровые) слова, которые образуются путем упорядочения конечного числа знаков из конечного множества основных знаков (алфавита системы счисления).

Представление натуральных чисел. Различают два типа систем счисления: *непозиционные* (примером которых может служить римская система счисления) и *позиционные.* В позиционной системе счисления выбирают некоторое натуральное число p, большее единицы, и используют его в качестве базисного числа (p-ичная система счисления); для p, равного единице, позиционной системы счисления не существует. Вводят p основных знаков, называемых *цифрами.* Эти знаки используют для образования цифровых последовательностей, которые служат для представления натуральных чисел. (Будем обозначать цифры так: $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$.) Каждой цифровой последовательности, образованной только из одной цифры, однозначно сопоставим одно из $p-1$ первых натуральных чисел или нуль. Тогда всякое натуральное число a имеет точно одно представление в p-ичной системе счисления:

$$a = b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + \ldots + b_0 p^0,$$

где s обозначает однозначно определенное натуральное число, $b_0, \ldots, b_s$ – цифры, причем b_s – цифра, отличная от цифры, соответствующей нулю. Ряд знаков $b_s b_{s-1} \ldots b_0$ является цифровым представлением числа a. Число нуль представляется последовательностью, состоящей из одной цифры, соответствующей нулю. В позиционной системе представляемое число образуется аддитивно, причем каждая цифра b_j имеет *числовое значение* (число, которое соответствует цифре b_j) и *позиционное значение* (вес) p^j, если b_j стоит на j-м месте, считая справа (счет начинают с нуля, а не с единицы!). Аддитивный вклад этой цифры в значение числа равен $b_j p^j$.

Десятичная система: $p = 10$, цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например,

$$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 320091.$$

Двоичная система (*бинарная,* или *диадная,* система): $p = 2$, цифры 0, L*). Например,

$$L \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + L \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + L \cdot 2^1 + L \cdot 2^0 = \mathrm{L0L00LL}.$$

*) Чаще используются цифры 0 и 1.

Записанная в двоичной системе счисления последовательность L0L00LL обозначает число, значение которого в десятичной системе есть 83; действительно, $64 + 16 + 2 + 1 = 83$.

Чтобы иметь возможность представлять в позиционной системе также и некоторые рациональные числа, позиционные значения цифр в записи числа распространяют на степени p с отрицательными показателями. Для выделения позиционного значения (веса) p^0 необходим дополнительный знак (знак дробности), в качестве которого обычно берется запятая (иногда точка). Этот знак размещается в цифровой последовательности непосредственно справа от цифры с позиционным значением p^0. В соответствии с этим цифровая последовательность $b_s b_{s-1} \ldots b_0,\ b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-r}$ обозначает число, заданное p-ичным представлением

$$b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + \ldots + b_0 p^0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2} + \ldots + b_{-r} p^{-r}.$$

Цифра b_{-r} может иметь числовое значение нуль.

Примеры. Десятичная система: $23{,}040 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3}$.

Двоичная система: $\mathrm{L0,\ 0LL} = L \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + L \cdot 2^{-2} + L \cdot 2^{-3}$. Запись числа L0, 0LL в десятичной системе есть 2,375; действительно, $2 + 0{,}25 + 0{,}125 = 2{,}375$.

Каждое число, представимое в позиционной системе счисления последовательностью цифр конечной длины, является *рациональным числом.* Наоборот, в каждой позиционной системе можно представить точно только некоторое подмножество рациональных чисел (зависящее от выбора p). Например, рациональное число 1/3 не может быть представлено в десятичной системе счисления в виде конечной последовательности цифр; 1/25 в десятичной системе записывается как 0,04, а в двоичной системе счисления 1/25 конечной последовательностью цифр представлено быть не может.

Если a/b – рациональное число (a и b – взаимно простые натуральные числа), то a/b может быть точно представлено в позиционной системе с базисом p тогда и только тогда, когда каждый простой множитель в разложении числа b является простым множителем в разложении p.

Таким образом, в десятичной системе представимы только такие рациональные числа a/b (a, b – взаимно простые), у которых b содержит лишь простые множители 2 и 5.

2.1.1.2. Погрешности и правила округления чисел. Как было замечено в 2.1.1.1, не каждое рациональное и тем более не каждое действительное число можно представить в позиционной системе в виде конечной цифровой последовательности. Поэтому приходится применять *приближенные значения* представляемого числа, содержащие ограниченное число цифр. К этому прибегают и тогда, когда точное число содержит конечное, но слишком большое число цифр.

Простейшим способом получения приближенного значения числа является отбрасывание цифр в его точном изображении (обрыв), начиная с некоторого разряда. При этом погрешность приближения, т. е. разность $z-a$, где z – точное число, a – его приближение, всегда положительна и не превосходит единицы разряда последней сохраняемой цифры.

Примеры приближенных значений чисел, полученных отбрасыванием разрядов:

1,570 – приближенное значение для $\pi/2$ ($\approx 1{,}570796\ldots$);

1,414 – приближенное значение для $\sqrt{2}$ ($\approx 1{,}414213\ldots$);

0,210 – приближенное значение для 27/128 ($\approx 0{,}210875$).

Отбрасывание разрядов является простейшим способом *округления* чисел. Применяются и другие способы округления, из которых наиболее употребителен следующий:

1) Если за последней сохраняемой цифрой следует цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то никаких изменений в приближенное значение числа, представленного последовательностью предшествующих ей цифр, не вносится (*округление с недостатком*).

2) Если за последней сохраняемой цифрой следует 9, 8, 7, 6 или 5, то к ней прибавляется единица. Если последняя сохраняемая цифра 9, то она заменяется на 0 и на единицу повышается цифровое значение предшествующей ей цифры. Если эта цифра также 9, то действуют таким же образом до тех пор, пока не встретится цифра, отличная от 9 (*округление с избытком*).

Иногда применяется дополнительное правило:

3) Если за последней сохраняемой цифрой следует лишь цифра 5 или цифра 5, за которой все остальные цифры нули, и если последняя сохраняемая цифра имеет четное значение, осуществляется округление с недостатком; в противном случае – округление с избытком.

Примеры приближенных значений чисел, полученных таким округлением:

1,571 – приближенное значение для $\pi/2$;

1,414 – приближенное значение для $\sqrt{2}$;

0,211 – приближенное значение для 27/128;

10,000 – приближенное значение для 9,9995;

9,998 – приближенное значение для 9,9985.

В то время как при отбрасывании разрядов приближенное значение a числа z никогда не превосходит z, при округлении приближенное значение может быть больше или меньше числа z. Если a_r – приближенное значение z, полученное при округлении с недостатком или избытком с r десятичными разрядами после запятой, то *погрешность округления* равна $|a_r - z| \leqslant 0{,}5\cdot 10^{-r}$. Приближенные значения, полученные при округлении, не обязательно должны иметь только значащие цифры (ср. 10,000 и 9,9995). Цифры в записи приближенного значения a числа z называются *верными цифрами*, если $|a-z|$ не превосходит половины позиционного значения последней цифры числа a. Запись приближенного значения, полученная путем отбрасывания и округления, состоит только из верных цифр.

Эти правила обеспечивают погрешность, не превосходящую по абсолютной величине половины единицы разряда последней сохраненной цифры. Все цифры округленного числа в таком случае оказываются *верными*, хотя фактически они могут и не совпадать с соответствующими цифрами в записи точного числа (см. примеры).

Приближенное число обычно характеризуют количеством сохраненных разрядов после запятой или количеством значащих цифр. К значащим цифрам относятся все цифры, кроме нулей слева. Так, например, числа 253; 70,2; 0,00375 имеют по три значащие цифры. При записи приближенных чисел все значащие цифры должны быть верными, если погрешность числа не указывается каким-либо другим способом.

При округлении чисел, бóльших 10, не следует писать нули, не являющиеся верными цифрами, а нужно выделять множитель вида 10^n. Так, например, число 139796,7, округленное до трех значащих цифр, следует записывать в виде $1{,}40\cdot 10^5$ или $14{,}0\cdot 10^4$.

2.1.2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

2.1.2.1. Абсолютные и относительные погрешности. Приближенные значения чисел появляются не только в результате обрыва и округления. Каждое измеряемое значение некоторой величины в общем случае также есть приближенное значение этой величины (ср. 7.1.1). Если a обозначает приближенное значение числа z, то $a-z$ называется *истинной погрешностью* a, а $(a-z)/z$ – *истинной относительной погрешностью* a. Но так как в большинстве случаев z неизвестно, то неизвестны как истинная, так и истинная относительная погрешности. Напротив, часто можно указать граничную величину истинной погрешности, т. е. положительное число Δa, для которого выполняется неравенство $|a-z| \leqslant \Delta a$, или $a-\Delta a \leqslant z \leqslant a+\Delta a$; Δa называется *пределом (границей) погрешности*, или *предельной абсолютной погрешностью*, или сокращенно *абсолютной погрешностью* a; $\delta a = \Delta a/a$ – *предельной относительной погрешностью* или сокращенно *относительной погрешностью* a. Относительная погрешность a часто указывается в процентах.

Примеры. 1) Если a_r – приближенное значение числа z, полученное путем обрыва (ср. 2.1.1.2), причем a_r содержит r знаков после запятой, то в качестве абсолютной погрешности может быть выбрано $\Delta a_r = 10^{-r}$. Если a_r получено округлением, то абсолютная погрешность равна $\Delta a_r = 0{,}5\cdot 10^{-r}$.

2) Число 3,14 есть приближенное значение числа π. Так как 3,14159 также является приближенным значением π с пятью цифрами после запятой, то 0,0016 может быть выбрано в качестве абсолютной погрешности. Тогда относительная погрешность равна $\frac{0{,}0016}{3{,}14} = 0{,}00051$, или 0,051 %.

Формула	Относительная погрешность не превышает		
	0,1%	1%	10%
	Интервал $-d < x < d$ обозначается $\pm d$; интервал $a < x < b$ обозначается $a \div b$		
$\sin x \approx x$	$\pm 0{,}077$	$\pm 0{,}245$	$\pm 0{,}786$
$\sin x \approx x - x^3/6$	$\pm 0{,}580$	$\pm 1{,}005$	$\pm 1{,}632$
$\cos x \approx 1$	$\pm 0{,}045$	$\pm 0{,}141$	$\pm 0{,}451$
$\cos x \approx 1 - x^2/2$	$\pm 0{,}386$	$\pm 0{,}662$	$\pm 1{,}036$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$\pm 0{,}054$	$\pm 0{,}172$	$\pm 0{,}517$
$\operatorname{tg} x \approx x + x^3/3$	$\pm 0{,}293$	$\pm 0{,}519$	$\pm 0{,}895$
$\sqrt{a^2 + x} \approx a + x/2a$	$-0{,}085a^2 \div 0{,}093a^2$	$-0{,}247a^2 \div 0{,}328a^2$	$-0{,}607a^2 \div 1{,}545a^2$
$1/\sqrt{a^2 + x} \approx 1/a - x/2a^3$	$-0{,}051a^2 \div 0{,}052a^2$	$-0{,}157a^2 \div 0{,}166a^2$	$-0{,}448a^2 \div 0{,}530a^2$
$1/(a + x) \approx 1/a - x/a^2$	$\pm 0{,}031a$	$\pm 0{,}099a$	$\pm 0{,}301a$
$e^x \approx 1 + x$	$\pm 0{,}045$	$-0{,}134 \div 0{,}148$	$-0{,}375 \div 0{,}502$
$\ln(1 + x) \approx x$	$\pm 0{,}002$	$\pm 0{,}020$	$-0{,}176 \div 0{,}230$

2.1.2.2. Приближенные границы погрешности функции. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$ – функция переменных $x_1, \ldots, x_k$. Часто требуется знать предельную абсолютную погрешность Δf:

$$|f(a_1, \ldots, a_k) - f(x_1, \ldots, x_k)| \leqslant \Delta f,$$

при условии, что для значений переменных $x_1, \ldots, x_k$ известны предельные абсолютные погрешности Δa_i. Если $f(x_1, \ldots, x_k)$ имеет непрерывные частные производные f'_{x_i} по переменным x_i, $i = 1, \ldots, k$, то обычно полагают (ср. 3.1.6.3)

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{k} \Delta a_i \, |f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_k)|.$$

Примеры. 1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2 \; (f'_{x_1} = 1, f'_{x_2} = 1);$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$:

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2 \; (f'_{x_1} = 1, f'_{x_2} = -1);$$

3) $f(x) = c \cdot x$ (c – постоянная):

$$\Delta(c \cdot a) = \Delta a \cdot |c| \; (f'_x = c);$$

4) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$:

$$\Delta(a_1 \cdot a_2) \approx \Delta a_1 \cdot |a_2| + \Delta a_2 \cdot |a_1|$$

$$(f'_{x_1} = x_2, f'_{x_2} = x_1),$$

$$\frac{\Delta(a_1 \cdot a_2)}{|a_1 \cdot a_2|} \approx \frac{\Delta a_1}{|a_1|} + \frac{\Delta a_2}{|a_2|};$$

5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$:

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \approx \Delta a_1 \cdot \frac{1}{|a_2|} + \Delta a_2 \cdot \frac{|a_1|}{a_2^2}$$

$$(f'_{x_1} = 1/x_1, f'_{x_2} = -x_1/x_2^2),$$

$$\frac{\Delta(a_1/a_2)}{|a_1/a_2|} \approx \frac{\Delta a_1}{|a_1|} + \frac{\Delta a_2}{|a_2|};$$

6) $f(x) = x^n$: $\Delta(a^n) \approx \Delta a \cdot |n \cdot a^{n-1}|$

$$(f'_x = nx^{n-1}), \qquad \frac{\Delta(a^n)}{|a^n|} \approx |n| \cdot \frac{\Delta a}{|a|};$$

7) $f(x) = \sin x$:

$$\Delta(\sin a) \approx \Delta a \cdot |\cos a| \quad (f'_x = \cos x).$$

Если функция $f(x)$ задана таблицей, то Δf находят посредством линейной интерполяции из таблицы в том случае, если Δa меньше, чем величина шага x в таблице вблизи a. Чаще всего Δf можно найти прямо из таблицы.

Пример. Для $a = 1{,}30$ и $\Delta a = 0{,}01$ найдем $\Gamma(a)$ из табл. 1.1.2.1: $\Gamma(1{,}30) = 0{,}89747$. Вследствие равенств $\Gamma(1{,}29) = 0{,}89904$ и $\Gamma(1{,}31) = 0{,}89600$ можно положить $\Delta(\Gamma(1{,}30)) = 0{,}002$ и за приближенное значение $\Gamma(1{,}30)$ принять число 0,897.

2.1.2.3. Приближенные формулы. Во многих случаях сложные функции можно приблизить более простыми. Для этого часто используют первые члены разложения в ряд Тейлора (ср. 3.1.14.6). В таблице на этой странице указаны некоторые приближенные формулы и относительные погрешности в соответствующих интервалах.

2.1.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2.1.3.1. Нахождение нулей функции $f(x)$. Для определения приближенного значения нуля функции $f(x)$ может применяться график этой функции (ср. 1.2). Иногда, как показывает следующий пример, целесообразно представить функцию в виде суммы двух слагаемых.

Пример. Найти приближенное значение нуля функции $f(x) = \sin x - x + 3$. Так как $\sin x - x + 3 = 0$ в случае,

когда $\sin x = x - 3$, то абсциссы точек пересечения графиков функций $g(x) = \sin x$ и $h(x) = x - 3$ как раз и есть нули $f(x)$. Функция $\sin x$ затабулирована (ср. 1.1.1.10), ее график легко построить. График функции $h(x) = x - 3$ — прямая, которую также легко построить (ср. 1.2.1.1).

Полученные приближенные значения могут быть улучшены посредством правила ложного положения и методом Ньютона (ср. 7.1.2.3).

2.1.3.2. Графическое дифференцирование. Если имеется график функции $f(x)$, то точки графика функции $f'(x)$ могут быть получены следующим способом.

1) На оси x в области задания функции $f(x)$ выбираем последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) На отрицательной части оси x вне области задания функции $f(x)$ выбираем точку P — полюс построения. Длина b отрезка PO называется *полюсным расстоянием.*

3) В точках кривой $f(x)$ с абсциссами x_i строим нормали к кривой. Для этого пригодно прямоугольное карманное зеркало (лучше всего металлическое), которое вертикально ставят на плоскость чертежа. Если кривая без излома переходит в свое зеркальное отражение, то ребро зеркала покажет направление нормали.

4) На каждую из полученных нормалей опускаем перпендикуляры из P, которые пересекают ось y в точках Q_i. Эти перпендикуляры проходят параллельно касательным в точках $(x_i, f(x_i))$.

5) Точка пересечения прямой, проходящей через Q_i параллельно оси x, с прямой $x = x_i$ является точкой графика $f'(x)$ (рис. 2.1).

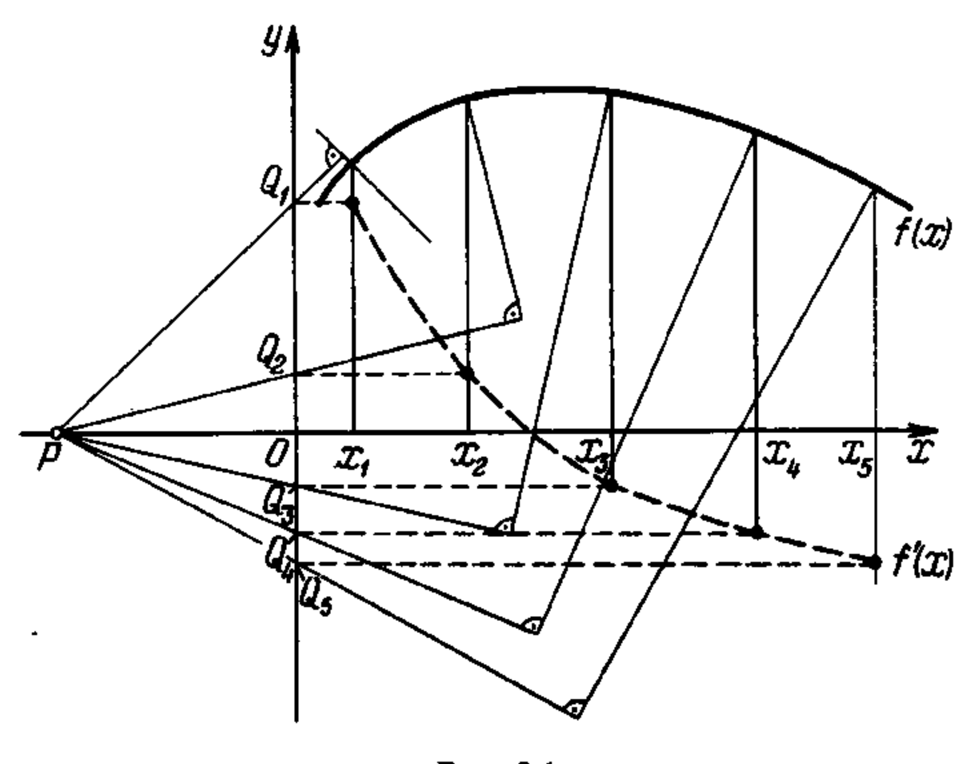


Рис. 2.1

Масштаб $f'(x)$ зависит от используемых масштабов m_x по оси x и m_y по оси y и от полюсного расстояния b. Если ξ и η — длины отрезков между точками с координатами $(0, 0)$ и $(x, 0)$ и соответственно между $(0, 0)$ и $(0, y)$, то $x = m_x\xi$ и $y = m_y\eta$. Тогда, обозначив ординаты точек построенной кривой через η', для наклонов прямых, построенных параллельно касательным, получим

$$\frac{\eta'}{b} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{m_x}{m_y}\frac{dy}{dx};$$

таким образом,

$$y' = \frac{m_y}{m_x b}\eta',$$

т. е.

$$m_{y'} = \frac{m_y}{m_x b}.$$

2.1.3.3. Графическое интегрирование. Если имеется график функции $f(x)$, то график функции $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ можно приближенно заменить ломаной следующим способом.

1) Разделим отрезок $I = [x_0, x]$ промежуточными точками разбиения на частичные отрезки I_k. При этом следует обратить внимание на то, чтобы относительные экстремумы функции $f(x)$ не лежали внутри частичных отрезков.

2) Для каждого частичного отрезка часть плоскости между осью x и кривой $f(x)$ заменим (приблизительно) равновеликим прямоугольником, проведя параллель к оси x так, чтобы отброшенная часть площади была примерно равной добавленной (заштрихованы на рис. 2.2). Пусть

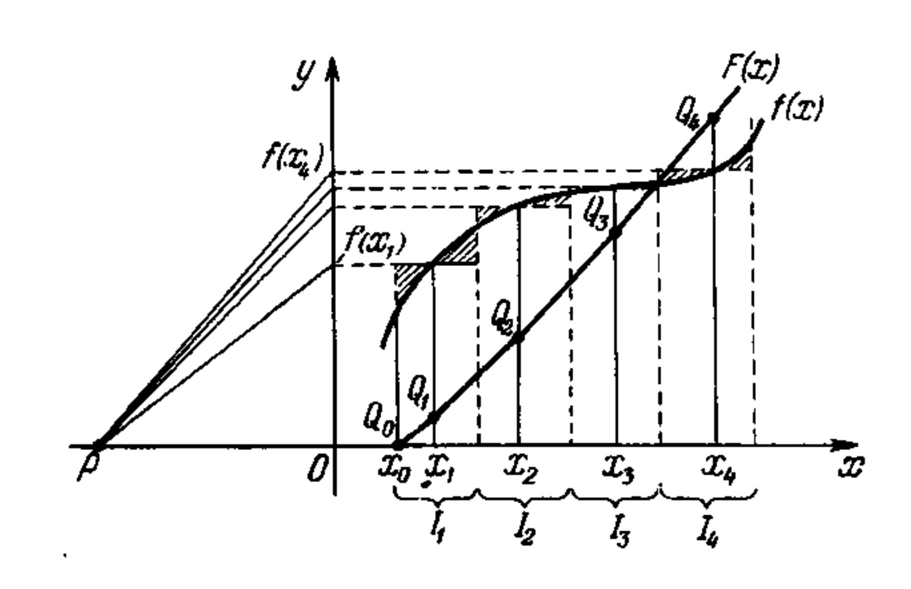


Рис. 2.2

x_k есть абсцисса точки пересечения, определенная однозначно (вследствие 1) прямой, параллельной оси x, с графиком $f(x)$ на частичном отрезке I_k; тогда точка пересечения этой же прямой с осью y имеет координаты $(0, f(x_k))$.

3) Выберем на отрицательной полуоси x и вне области задания функции $f(x)$ точку P — полюс построения. Пусть b обозначает длину отрезка PO (полярное расстояние).

4) Проведем через точку $Q_0 = (x_0, 0)$ параллель к прямой, проходящей через точки P и $(0, f(x_1))$. Пусть эта параллель пересекает прямую $x = x_1$ в точке Q_1. Через Q_1 проведем параллель к прямой, проходящей через точки P и $(0, f(x_2))$. Пусть эта параллель пересекает прямую $x = x_2$ в точке Q_2 и т. д. Ломаная $Q_0Q_1\ldots Q_n$ есть приближенный график функции $F(x)$.

Пусть снова (как и в случае графического дифференцирования) $x = m_x\xi$, $y = m_y\eta$ и H_k — длины отрезков между точками $(x_k, 0)$ и Q_k. Тогда для $Y = F(x)$ выполняется соотношение $Y = m_Y H$. Если по методу графического дифференцирования с тем же полюсом P в точках с абсциссами x_k $(k > 0)$ построить точки кривой производной функции $F(x)$, то получим точки $(x_k, f(x_k))$. Отсюда для масштабов следует, что

$$m_y = m_Y/(m_x b),$$

т. е.

$$m_Y = m_x m_y b.$$

2.2. КОМБИНАТОРИКА

2.2.1. ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

2.2.1.1. Факториал и гамма-функция. Функция $f(n)$, для которой

$$f(0) = 1, \quad f(n+1) = (n+1) f(n)$$

при всех целых неотрицательных n, называется *n-факториалом* и обозначается $n!$. Для любого натурального n имеем $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Примеры. $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Значения функций $n!$ и $1/n!$ см. в табл. 1.1.1.5.

Для приближенного вычисления $n!$ в случае очень больших чисел n пользуются *формулой Стирлинга*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

или

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

Определение гамма-функции $\Gamma(x)$ *по Эйлеру.* Для всех действительных чисел $x > 0$ (ср. 3.1.9.4)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Определение гамма-функций $\Gamma(x)$ *по Гауссу.* Для всех действительных чисел x, кроме $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}.$$

При $x > 0$ оба определения дают одинаковую функцию.

Основные свойства гамма-функции (см. также 3.1.9.4).

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x},$$

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x}.$$

Некоторые специальные значения гамма-функции: $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Таблицу значений функции см. в 1.1.2.1. График функции см. на рис. 2.3.

Полюсы $\Gamma(x)$: $x_p = 0, \ -1, \ -2, \ -3, \ldots$ Вследствие первых двух свойств для всех натуральных чисел n имеем $\Gamma(n+1) = n!$. Поэтому гамма-функция может рассматриваться как обобщение факториала. Для приближенного вычисления значения функции $\Gamma(x)$ при больших положительных значениях x может быть использована *формула Стирлинга*: $\Gamma(x+1) \approx (x/e)^x \sqrt{2\pi x}$.

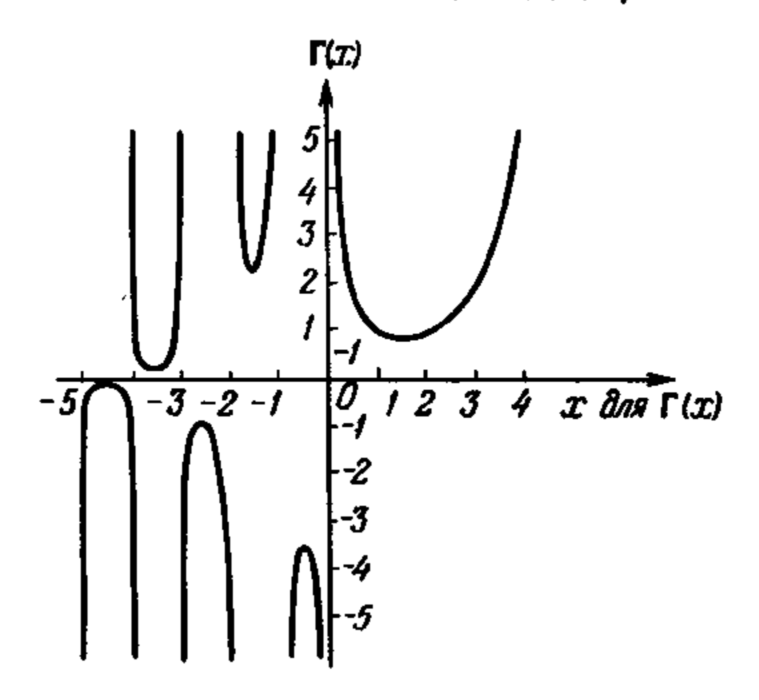


Рис. 2.3

2.2.1.2. Биномиальные коэффициенты. Для всех целых неотрицательных чисел n, k функция C_n^k (или $\binom{n}{k}$):

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{для } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{для } 0 \leqslant n < k, \end{cases} \tag{2.1}$$

называется *биномиальным коэффициентом*. Читается: C из n по k (или n над k).

Значения биномиальных коэффициентов могут быть последовательно определены из так называемого *треугольника Паскаля:*

n	C_n^k
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
...	....

Каждый коэффициент образуется путем сложения двух стоящих над ним (справа и слева). Крайние значения известны для любого n: $C_n^0 = C_n^n = 1$. В строке с номером n слева направо стоят значения $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$.

Область определения биномиальных коэффициентов можно расширить: именно, для всех действительных a и для всех целых $k \geqslant 0$ функция

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)}{k!} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

также называется *биномиальным коэффициентом.*

Для целых $a \geqslant 0$ оба определения совпадают.

Примеры. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$,

$$\binom{-2}{3} = \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} = -4, \quad \binom{2}{5} = 0,$$

$$\binom{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-3)}{4!} = \frac{13-9\sqrt{2}}{12}.$$

Свойства биномиальных коэффициентов. Для целых $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ справедливо свойство симметрии:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad \text{или} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \qquad (2.3)$$

Для действительных a, b имеют место теоремы сложения:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1},$$

$$\binom{a}{0} + \binom{a+1}{1} + \binom{a+2}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{a+k}{k} = \binom{a+k+1}{k},$$

$$\binom{a}{0}\binom{b}{k} + \binom{a}{1}\binom{b}{k-1} + \ldots + \binom{a}{k}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{k}. \qquad (2.4)$$

Если $a = b = n$, где n – целое неотрицательное, то из (2.3) и (2.4) следует (ср. также 2.2.2.1), что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

2.2.1.3. Полиномиальный коэффициент. Определенная для всех натуральных n и всех наборов неотрицательных целых чисел $[k_1, k_2, \ldots, k_r]$, для которых $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, функция $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, или $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$:

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!}, \qquad (2.5)$$

называется *полиномиальным коэффициентом.*

Примечание. Биномиальный коэффициент C_n^k есть частный случай полиномиального коэффициента $C_n(k_1, k_2)$, где $k_1 = k$, $k_2 = n - k$.

Примеры. $C_6(2, 1, 3) = \frac{6!}{2!1!3!} = 60$,

$$C_{12}(2, 3, 3, 4) = \frac{12!}{2!3!3!4!} = 277\,200.$$

2.2.2. ФОРМУЛЫ БИНОМА И ПОЛИНОМА

2.2.2.1. Формула бинома Ньютона. Для всех действительных чисел a, b и для всех натуральных чисел n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n. \qquad (2.6)$$

Примечание. Биномиальные коэффициенты формулы (2.6) составляют в треугольнике Паскаля строку с номером n.

Если заменить b на $-b$, то из формулы (2.6) следует

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Пример. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Из (2.6) получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \text{ при } a = b = 1, \qquad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \text{ при } a = 1,\ b = -1. \qquad (2.8)$$

Вычитанием или сложением (2.7) и (2.8) получим равенства

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^m = 2^{n-1},$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^m = 2^{n-1};$$

при этом в первом случае m – наибольшее нечетное число, а во втором – наибольшее четное число, не превосходящее n.

2.2.2.2. Формула полинома. Для любых отличных от нуля действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и любого натурального n

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n =$$

$$= \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r}. \qquad (2.9)$$

При этом суммирование распространяется на все наборы неотрицательных целых чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, для которых $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

При $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = r^n.$$

Пример. $(a+b+c)^3 = C_3(3, 0, 0)a^3 + C_3(2, 1, 0)a^2b + C_3(2, 0, 1)a^2c + C_3(1, 2, 0)ab^2 + C_3(1, 1, 1)abc + C_3(1, 0, 2)ac^2 + C_3(0, 3, 0)b^3 + C_3(0, 2, 1)b^2c + C_3(0, 1, 2)bc^2 + C_3(0, 0, 3)c^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

2.2.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КОМБИНАТОРИКИ

Во многих математических исследованиях встречаются комбинаторные задачи, своеобразие которых целесообразно показать на примерах.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг? (Ср. 2.2.4.1.)

2. Как велико число различных отображений, переводящих множество из n элементов в себя? (Ср. 2.2.4.1.)

3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 1, 5, 5, 9? (Ср. 2.2.4.5.)

4. В турнире принимают участие восемь команд. Сколько различных предсказаний относительно распределения трех первых мест (по результатам соревнований) можно сделать? (Ср. 2.2.5.1.)

5. Сколько различных трехбуквенных слов можно составить из 32 букв алфавита, не обращая внимания на то, имеют ли смысл составленные из букв слова или нет? (Ср. 2.2.5.2.)

6. Сколькими способами можно из множества k (различных) элементов выбрать r элементов? (Ср. 2.2.6.1.)

7. Как велико число различных результатов бросаний двух не отличимых друг от друга кубиков? (Ср. 2.2.6.2.)

Приведенные примеры показывают, что в задачах комбинаторики интересуются вообще числом различных выборок определенных объектов, причем в зависимости от вида дополнительных требований следует различать, какие выборки считаются одинаковыми и какие различными.

2.2.4. ПОДСТАНОВКИ

2.2.4.1. Подстановки. Каждая последовательность k различных предметов с учетом порядка называется *перестановкой* этих предметов. Если пронумеровать места этих предметов слева направо: $1, 2, \ldots, k$, то можно сформулировать следующее определение:

взаимно однозначное отображение p^k конечного упорядоченного множества $M = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ из k элементов на себя называется *подстановкой* элементов множества M.

Перестановки из k элементов множества M отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов.

Число $P_k = P(p^k)$ всех перестановок p^k из k различных элементов равно

$$P_k = k!. \tag{2.10}$$

Примеры. Для примеров 1 и 2 п. 2.2.3 из (2.10) следует: имеется $10! = 3\,628\,800$ различных способов расстановки на полке 10 книг и $n!$ взаимно однозначных отображений, переводящих множество из n элементов в себя.

2.2.4.2. Группа подстановок k элементов. Если выбрать $M = \{1, 2, \ldots, k\}$, то каждую подстановку p^k этих элементов можно записать как матрицу из двух строк:

$$p^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \end{pmatrix},$$

где

$$\{s_1, \ldots, s_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{2.11}$$

$$p^k(i) = s_i \quad \text{для всех} \quad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Это делает возможным определение *произведения* $p_1^k \cdot p_2^k$ двух подстановок k элементов как последовательного проведения обоих преобразований:

$$(p_1^k \cdot p_2^k)(i) = p_2^k(p_1^k(i)).$$

Для этого записывают обе подстановки в виде матриц и переставляют столбцы второго множителя так, чтобы первая строка второго множителя совпадала со второй строкой первого множителя. Матрица произведения состоит из первой строки первого множителя и преобразованной второй строки второго множителя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_k \end{pmatrix}.$$

Пример 1.

$$p_1^4 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{pmatrix}, \quad p_2^4 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&1&4&2 \end{pmatrix},$$

$$p_1^4 \cdot p_2^4 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&1&4&3 \\ 1&3&2&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Для каждых двух подстановок p_1^k и p_2^k элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ произведение $p_1^k \cdot p_2^k$ есть однозначно определенная подстановка p^k.

2) Произведение есть ассоциативная (но не коммутативная) бинарная операция: $(p_1^k \cdot p_2^k) \cdot p_3^k = p_1^k \cdot (p_2^k \cdot p_3^k)$.

3) Для подстановки $p_e^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$ (*тождественная подстановка*) при всех p^k имеет место равенство $p_e^k \cdot p^k = p^k \cdot p_e^k = p^k$.

4) Для каждой подстановки $p^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \end{pmatrix}$ существует *обратная подстановка* $(p^k)^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$, для которой выполняется соотношение $(p^k)^{-1} \cdot p^k = p^k \cdot (p^k)^{-1} = p_e^k$.

Вследствие 1)–4) и (2.10) все подстановки p^k элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ образуют (см. 2.4.1.6) группу порядка $k!$.

Эта группа называется *симметрической группой* S_k.

Пример 2. Элементы симметрической группы S_3:

$$p_e^3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \quad p_1^3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \quad p_2^3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix},$$

$$p_3^3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, \quad p_4^3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, \quad p_5^3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице подстановки p^k элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ встречаются два столбца $\begin{pmatrix} \ldots s_i \ldots s_j \ldots \\ \ldots t_i \ldots t_j \ldots \end{pmatrix}$, для которых $s_i < s_j$, а $t_i > t_j$ (или $s_i > s_j$, а $t_i < t_j$), то такая пара столбцов называется *инверсией* подстановки p^k.

Подстановка называется *четной* или *нечетной* в зависимости от того, четно или нечетно число встречающихся в ней инверсий.

Пример 3. Если $Z(p_i^k)$ – число инверсий, то для подстановок примера 2:

$$Z(p_e^3) = 0, \quad Z(p_1^3) = Z(p_2^3) = 1, \quad Z(p_3^3) = 3, \quad Z(p_4^3) = Z(p_5^3) = 2.$$

Отображение группы S_k во множество $\{-1, 1\}$, определенное следующим образом: $\chi(p^k) = 1$, если p^k – четная подстановка, и $\chi(p^k) = -1$, если p^k – нечетная подстановка, называется *характеристикой подстановки* группы S_k. Вследствие равенства $\chi(p_1^k \cdot p_2^k) = \chi(p_1^k) \cdot \chi(p_2^k)$ это отображение гомоморфно.

Множество всех четных подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$ образует подгруппу группы S_k порядка $k!/2$. Эта подгруппа называется *знакопеременной группой*.

2.2.4.3. Подстановки с неподвижной точкой. Если p^k – подстановка множества $M = \{1, \ldots, k\}$, то

каждый элемент $i \in M$, для которого $p^k(i) = i$, называется *неподвижной точкой подстановки* p^k.

Пример. Для подстановок примера 2 п. 2.2.4.2 справедливо следующее: p_1^3 имеет неподвижную точку 3, p_2^3 – точку 1, p_3^3 – точку 2, p_e^3 имеет неподвижные точки 1, 2 и 3; p_4^3 и p_5^3 таковых не имеют.

Число $F(p^k)$ всех подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$, имеющих по крайней мере одну неподвижную точку, равно

$$F(p^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i (k-i)!, \tag{2.12}$$

где C_k^i – биномиальные коэффициенты. Число $G(p^k)$ всех подстановок множества $\{1, \ldots, k\}$, имеющих в точности одну неподвижную точку, равно

$$G(p^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i i (k-i)!. \tag{2.13}$$

Пример. Пять человек занимают места за столом, не обращая внимания на разложенные на столе именные карточки. В общей сложности они могут разместиться $5! = 120$ способами. В

$$F(p^5) = C_5^1 \cdot 4! - C_5^2 \cdot 3! + C_5^3 \cdot 2! - C_5^4 \cdot 1! + C_5^5 \cdot 0! = 76$$

случаях по крайней мере один человек и в

$G(p^5) =$

$$= C_5^1 \cdot 1 \cdot 4! - C_5^2 \cdot 2 \cdot 3! + C_5^3 \cdot 3 \cdot 2! - C_5^4 \cdot 4 \cdot 1! + C_5^5 \cdot 5 \cdot 0! = 45$$

случаях в точности один человек займет отведенное ему место.

2.2.4.4. Подстановки с заданным числом циклов. Если матрицу подстановки p^k перестановкой столбцов можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & \ldots & s_k \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_r & s_1 & t_{r+1} & \ldots & t_k \end{pmatrix},$$

то p^k задает взаимно однозначное отображение $s_i \to s_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, $s_r \to s_1$, множества $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ на себя, которое называется *циклом длины* r и обозначается $Z_r = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$. В соответствии с этим каждой неподвижной точке соответствует цикл длины 1.

Каждую подстановку p^k можно однозначно (с точностью до порядка сомножителей) представить в виде произведения циклов, не имеющих общих элементов.

Примеры.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 4, 3, 5) \cdot (2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1, 2, 3) \cdot (4, 5) \cdot (6).$$

Для числа $P(k, s)$ подстановок p^k, которые могут быть представлены в виде произведения s циклов, имеют место рекуррентные формулы

$$P(k, k) = 1, \quad P(k, 1) = (k-1)! \quad \text{при } k \geqslant 1, \tag{2.14}$$
$$P(k, s) = P(k-1, s-1) + (k-1) \cdot P(k-1, s) \quad \text{при } k > s \geqslant 2.$$

Пример. Имеется $P(3, 3) = 1$ подстановка группы S_3 (ср. пример 2 п. 2.2.4.2) с тремя циклами: p_e^3; $P(3, 1) = 2$ подстановки с одним циклом: p_4^3 и p_5^3; $P(3, 2) = P(2, 1) + 2 \cdot P(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ подстановки с двумя циклами: p_1^3, p_2^3 и p_3^3.

2.2.4.5. Перестановки с повторениями. Если рассматривать упорядоченные k-наборы из множества M, которые состоят не только из различных элементов множества M, то получим перестановки с повторениями.

Пусть $M = \{s_1, \ldots, s_p\}$ – непустое множество из p элементов и $i_1, i_2, \ldots, i_p$ – натуральные числа такие, что $\sum_{j=1}^{p} i_j = k$. Каждый упорядоченный набор k чисел $p_{i_1, i_2, \ldots, i_p}^k$, содержащий элемент s_j ровно i_j раз $(1 \leqslant j \leqslant p)$, называется *перестановкой множества* M *с повторением*.

Примечание. При $i_1 = i_2 = \ldots = i_p = 1$ получим перестановки множества из p элементов.

Число $C_k(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ различных перестановок множества M с повторениями равно*)

$$C_k(i_1, i_2, \ldots, i_p) = \frac{k!}{i_1! i_2! \ldots i_p!}, \tag{2.15}$$

где $\sum_{j=1}^{p} i_j = k$.

Пример. Имеется $C_6(3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$ различных шестизначных чисел, содержащих трижды цифру 1, дважды цифру 5 и один раз цифру 9 (ср. пример 3 п. 2.2.3).

2.2.5. РАЗМЕЩЕНИЯ

2.2.5.1. Размещения. Любой упорядоченный набор r различных элементов множества M, состоящего из k элементов, называется *размещением* a_r^k из k элементов по r.

Примечание. Каждое размещение a_r^k есть взаимно однозначное отображение упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, r\}$ во множество M. Из определения следует, что $r \leqslant k$. При $r = k$ получаем подстановки множества M.

Число $A_k^r = A(a_r^k)$ различных размещений есть

$$A_k^r = \frac{k!}{(k-r)!} = k(k-1)\ldots(k-r+1). \tag{2.16}$$

Примеры. 1) Имеется A_4^2 различных взаимно однозначных отображений множества $\{1, 2\}$ во множество $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, т. е. $A_4^2 = 12$.

2) Имеется $A_8^3 = 336$ различных способов распределения трех первых мест при восьми командах, участвующих в соревновании (ср. пример 4 п. 2.2.3).

2.2.5.2. Размещения с повторениями. Любой упорядоченный набор r элементов множества M, содержащего k элементов, называется *размещением с повторениями* $\tilde{a}_r^k$ из k элементов по r.

Примечание. Каждое размещение с повторениями $\tilde{a}_r^k$ есть однозначное отображение упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, r\}$ в M. При этом возможно, что $r > k$.

Число $A(\tilde{a}_r^k)$ различных размещений с повторениями есть

$$A(\tilde{a}_r^k) = k^r. \tag{2.17}$$

Пример. Число различных трехбуквенных слов, которые можно составить из 32 букв алфавита, есть $A(\tilde{a}_3^{32}) = 32^3 = 32\,768$ (ср. пример 5 п. 2.2.3).

*) Ср. 2.2.1.3.

2.2.6. СОЧЕТАНИЯ

2.2.6.1. Сочетания. Любое подмножество из r элементов множества, содержащего k элементов, называется *сочетанием* c_r^k из k элементов по r.

Примечание. Если объединить все размещения a_r^k из k элементов по r, состоящие из одних и тех же элементов (не учитывая расположения), в классы эквивалентности, то каждому классу будет соответствовать ровно одно сочетание c_r^k и наоборот.

Примеры. 1) Пары $\{s_1, s_2\}$, $\{s_1, s_3\}$, $\{s_1, s_4\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_2, s_4\}$, $\{s_3, s_4\}$ исчерпывают все сочетания из четырех элементов по два.

2) Имеется одно сочетание из k элементов по 0 (т. е. не содержащее ни одного элемента) – это пустое множество.

Число $C_k^r = C(c_r^k)$ всех различных сочетаний равно

$$C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}. \tag{2.18}$$

Пример. В числовом лото надо выбрать 5 чисел из 90. Для этого существует $C_{90}^5 = 43\,949\,268$ способов (ср. пример 6 п. 2.2.3).

2.2.6.2. Сочетания с повторениями. Объединим все размещения $\tilde{a}_r^k$ с повторением из k элементов по r, состоящие из одинакового количества одних и тех же элементов (без учета расположения), в классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности называется *сочетанием с повторением* $\tilde{c}_r^k$ из k элементов по r.

Примечание. Два размещения a_r^k и $a_r'^k$ или $\tilde{a}_r^k$ и $\tilde{a}_r'^k$ принадлежат одному сочетанию c_r^k или $\tilde{c}_r^k$ соответственно только тогда, когда существует перестановка p^r множества $\{1, 2, \ldots, r\}$ такая, что для всех $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ имеет место равенство

$$a_r^k(i) = a_r'^k(p^r(i)) \quad \text{или} \quad \tilde{a}_r^k(i) = \tilde{a}_r'^k(p^r(i)).$$

Ср. примечания в 2.2.5.1, 2.2.5.2 и 2.2.6.1.

Число $f_k^r = C(\tilde{c}_r^k)$ различных сочетаний с повторением из k элементов по r равно

$$f_k^r = C_{k+r-1}^r = C_{k+r-1}^{k-1} = \frac{(k+r-1)!}{r!(k-1)!}. \tag{2.19}$$

Пример. При наличии двух неразличимых кубиков можно получить $f_6^2 = C_7^2 = 21$ различный результат бросаний (ср. пример 7 п. 2.2.3).

2.3. КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

2.3.1. ОБОЗНАЧЕНИЕ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – (конечная) последовательность действительных чисел (ср. 2.3.2), то можно составить конечную последовательность сумм и произведений.

Для конечных сумм и произведений чисел приняты обозначения:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n. \tag{2.20}$$

Входящая в выражения (2.20) переменная i называется *индексом суммирования (индексом умножения)*, а целые числа 1 и n – *пределами суммирования (пределами умножения)*. Значение суммы (произведения) не зависит от обозначения индекса суммирования (индекса умножения) – это так называемая *немая* переменная:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Иногда бывает необходимо перейти к новому индексу суммирования с одновременным изменением пределов суммирования. Так, например, полагая в первой сумме $i = k + r$, где r – целое число, а k – новый индекс, получим, что новые пределы по индексу k равны соответственно $1 - r$ и $n - r$ и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1-r}^{n-r} a_{k+r}.$$

2.3.2. КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Конечная (действительная) *числовая последовательность* есть однозначное отображение множества $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 1$, во множество действительных чисел. При этом образ натурального числа $i \in A_n$ обозначается a_i и называется *членом последовательности*. Последовательность обозначается посредством $[a_i]_1^n$. Последовательность может быть задана прямым перечислением ее членов или каким-нибудь алгебраическим выражением.

Примеры. 1) Последовательность, заданная прямым перечислением членов:

$$[a_i]_1^5 = 4,\ -1,\ 3/5,\ 4,\ 4.$$

2) Последовательность, заданная алгебраическим выражением:

$$[3i - i^2]_1^6 = 2,\ 2,\ 0,\ -4,\ -10,\ -18.$$

Если задана последовательность $[a_i]_1^n = a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 1$, то из нее можно образовать другую последовательность:

$$[d_i]_1^{n-1} = [a_{i+1} - a_i]_1^{n-1} = a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \ldots,\ a_n - a_{n-1}; \tag{2.21}$$

она называется *последовательностью первых разностей* последовательности $[a_i]_1^n$. Если $n > 2$, то из последовательности первых разностей можно снова образовать последовательность первых разностей, которую называют *последовательностью вторых разностей* исходной последовательности. Если продолжать так дальше, то процесс оборвется на последовательности $(n-1)$-х разностей, так как она состоит только из одного члена.

Если $[d_i]_1^{n-1}$ – последовательность первых разностей последовательности $[a_i]_1^n$, то

$$d_1 = a_2 - a_1,\ d_1 + d_2 = a_3 - a_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} d_i = a_n - a_1. \tag{2.22}$$

Если $a_1 = 0$, то a_n равно сумме $n-1$ членов последовательности первых разностей.

Конечная последовательность $[a_i]_1^n$ называется *постоянной*, если существует такое действительное a, что $a_i = a$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. В соответствии с этим конечная последовательность длины $n = 1$ постоянна.

2.3.2.1. Арифметическая прогрессия. Конечная последовательность называется *арифметической прогрессией 1-го порядка*, если последовательность ее первых разностей постоянна ($a_i - a_{i-1} = d$ — *разность арифметической прогрессии*). Последовательность называется *арифметической прогрессией m-го порядка*, если последовательность m-х разностей постоянна, а $(m-1)$-х не постоянна.

Если $[a_i]_1^n$ — арифметическая прогрессия 1-го порядка и d — ее разность, то

$$a_i = a_1 + (i-1)d,$$

а сумма членов равна

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i = n(a_1 + a_n)/2 = na_1 + (n-1)nd/2.$$

Если $[a_i]_1^n$ — арифметическая прогрессия порядка m, то существует многочлен

$$P_m(i) = c_m i^m + \ldots + c_1 i + c_0$$

такой, что для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется равенство $a_i = P_m(i)$.

При $m = 1$ для последовательности $[a_i]_1^n$ с постоянной разностью d этот многочлен имеет вид

$$a_i = di + (a_1 - d).$$

Пример. Последовательность $[i^2]_1^n = 1, 2^2, \ldots, n^2$ есть арифметическая прогрессия 2-го порядка, $P_2(i) = i^2$. Последовательность первых разностей имеет вид $[d_i]_1^{n-1}$, где $d_i = (i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$. Последовательность вторых разностей записывается в виде $[d_i]_1^{n-2}$, где $d_i = 2(i+1) + 1 - (2i+1) = 2$.

Если рассматривать $[i^2]_1^n$ как последовательность первых разностей последовательности $[a_i]_1^{n+1}$, то $[a_i]_1^{n+1}$ есть арифметическая прогрессия 3-го порядка. Тогда существует многочлен третьей степени по i такой, что при всех i выполняется равенство $a_i = c_3 i^3 + c_2 i^2 + c_1 i + c_0$. Если выбрать $a_1 = 0$, то первые четыре члена последовательности $[a_i]_1^{n+1}$ будут равны 0, 1, 5, 14. Из системы уравнений $i^3 c_3 + i^2 c_2 + i c_1 + c_0 = a_i$ при $i = 1, 2, 3, 4$ (или из одной из интерполяционных формул (ср. 7.1.2.6.1)) для неизвестных коэффициентов c_3, c_2, c_1, c_0 получаем

$$c_3 = 1/3, \quad c_2 = -1/2, \quad c_1 = 1/6, \quad c_0 = 0$$

и, далее,

$$a_i = \frac{1}{3} i^3 - \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{6} i,$$
$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

2.3.2.2. Геометрическая прогрессия. Каждая последовательность $[a_i]_1^n$, у которой частное от деления двух соседних членов постоянно: $a_{i+1}/a_i = q$ для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, называется *геометрической прогрессией*. Число q называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Общий вид членов геометрической прогрессии:

$$a_i = a_1 q^{i-1}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\};$$

сумма всех членов геометрической прогрессии ($q \neq 1$) равна

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} =$$
$$= a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

2.3.3. НЕКОТОРЫЕ КОНЕЧНЫЕ СУММЫ

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (p+n) = \dfrac{(n+1)(2p+n)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

7) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

9) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

2.3.4. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ *)

Если заданы n (не обязательно различных) действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то число

$$m_A = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}$$

называется *средним арифметическим* чисел $a_1, \ldots, a_n$, а $m_Q = \sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$ — *средним квадратичным* чисел $a_1, \ldots, a_n$. Если a и b — неотрицательные действительные числа, то

$$m_G = \sqrt{ab}$$

называется *средним геометрическим* чисел a и b или *средним пропорциональным* чисел a и b.

Из равенства $m_G^2 = ab$ следует, что $a : m_G = m_G : b$.

Для среднего арифметического $m_A(a, b)$ и среднего геометрического $m_G(a, b)$ неотрицательных чисел a и b справедливы следующие утверждения:

1) $m_G(a, b) \leqslant m_A(a, b)$;

2) $a, m_A(a, b), b$ — арифметическая прогрессия 1-го порядка; $a, m_G(a, b), b$ — геометрическая прогрессия. Если a и b — длины отрезков, то отрезки длин $m_A(a, b)$ и $m_G(a, b)$ можно построить циркулем и линейкой (рис. 2.4 и 2.5).

*) О средних значениях см. также 3.1.1.4.

Золотое сечение. Если $a > 0$, то разложение этого числа на два положительных слагаемых x и $a - x$ называется *золотым сечением* числа a,

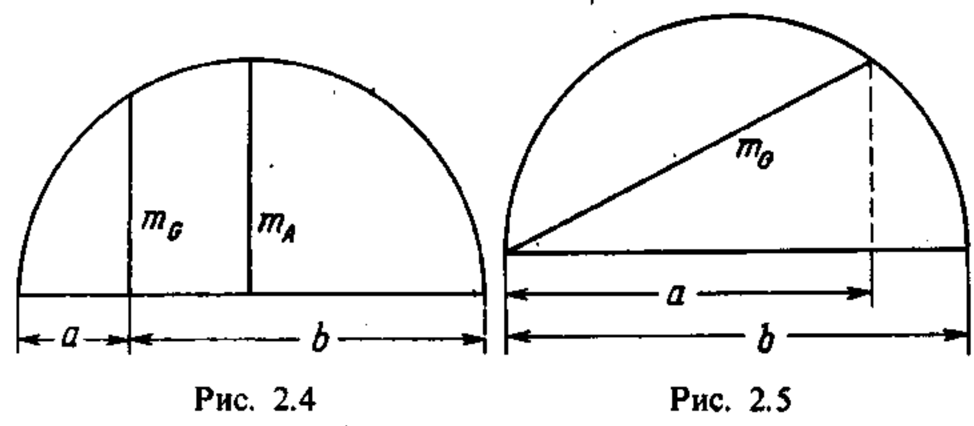


Рис. 2.4 Рис. 2.5

если x является средним геометрическим чисел a и $a - x$. Из равенства $x = \sqrt{a(a-x)}$ следует:

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a \approx 0{,}618a.$$

Если считать a длиной отрезка, то отрезок длиной x определяется построением, приведенным на рис. 2.6.

Из равенства $x^2 = a(a - x) = a^2 - ax$ следует, что $a^2 = x^2 + ax = x(x + a)$, в соответствии с чем a

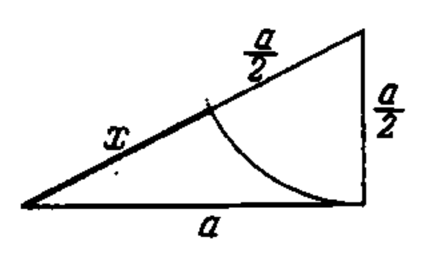


Рис. 2.6

есть среднее геометрическое чисел x и $x + a$. Таким образом, если x делит число a в золотом сечении, то a в свою очередь делит в золотом сечении число $x + a$.

2.4. АЛГЕБРА

2.4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

2.4.1.1. Алгебраические выражения. В современной математике *алгеброй* называют науку о системах объектов («величин»), над которыми определены операции, аналогичные сложению и умножению действительных чисел. Различные объекты могут иметь различные *имена*, а для обозначения операций над ними применяются различные *знаки*. Существенной частью алгебры является *грамматика алгебраических выражений*, определяющая правила построения выражений из имен объектов, знаков операций и вспомогательных знаков (так называемых разделителей). Мы ограничимся употреблением простейшей системы обозначений, при которой величины обозначаются отдельными буквами, быть может, с подстрочными индексами (например, x, y_3, a_{152})*). Будем считать также определенными основные действия: сложение ($+$), вычитание ($-$), умножение ($\cdot$ или $\times$)**) и деление ($:$ или $/$). Умножение и деление считаются действиями более старшими, чем действия сложения и вычитания. В выражениях, содержащих несколько знаков действий, выполняются сначала все более старшие действия, а затем младшие. Действия одинакового старшинства выполняются по порядку, слева направо. Для изменения порядка действий могут применяться скобки. Правильные выражения должны содержать одинаковое количество открывающих и закрывающих скобок; которые всегда могут быть объединены в систему вложенных пар. Первыми должны выполняться действия внутри самых внутренних скобок (не содержащих скобок внутри себя), затем внутри скобок следующего уровня и т. д. Для удобства иногда употребляются скобки разного вида, как-то: ( ), [ ], { }, однако они должны встречаться парами и не нарушать систему вложенности; например, выражение $(a \cdot \{b + c) - d\}$ неправильное. Если допускается нелинейная запись, то изменение порядка действий при делении может быть показано записью «в два этажа» – с горизонтальной чертой в качестве знака деления (а также косой чертой), т. е. записи

$$(a + b):(c + d) - f \text{ и } \frac{a+b}{c+d} - f \text{ (и } (a + b)/(c+d) - f)$$

равноценны.

Возведение в целую степень определяется как повторное умножение и обозначается знаком ↑ или подстрочной записью показателя степени: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ обозначается $a \uparrow n$ или a^n. Возведение в степень рассматривается как действие более старшее, чем умножение и деление. Например, $a \uparrow m/n$ совпадает с $(a \uparrow m)/n$, а не с $a \uparrow (m/n)$*).

2.4.1.2. Значения алгебраических выражений. Если не ограничиваться свойствами алгебраических выражений самих по себе как абстрактных выражений, то возникают вопросы, связанные с интерпретацией этих выражений на некоторой конкретной системе допустимых объектов, которые могут замещать алгебраические величины. Мы ограничимся рассмотрением алгебраических выражений над какими-либо системами чисел, допускающими упомянутые выше действия (см. 3.1.1 и 3.4.2). Поскольку при этом алгебраические выражения могут быть вычисляемы, если входящим в них величинам придавать числовые значения, их иногда называют *арифметическими выражениями.*

Следует заметить, что основными действиями являются сложение и умножение.

Если рассматривать только натуральные (целые положительные) числа, то вычитание – действие, обратное сложению, – не всегда окажется выполнимым и потребует введения нуля и отрицательных целых чисел; деление (на число, отличное от нуля) – действие, обратное умножению, – окажется выполнимым, если мы введем в рассмотрение рацио-

---

*) В алгоритмических языках (см. 7.2.1), допускающих только линейную запись (в одну строку), используются имена из нескольких букв и цифр, начинающиеся всегда с буквы, например: *y3*, *abc*, *beta1*.

**) Если употребляются только однобуквенные имена, знак умножения может быть опущен, например, вместо $3 \cdot a \cdot b$ можно писать $3ab$.

*) Возведение в нецелую степень определено ниже (см. 2.4.1.4).

нальные числа. Существуют разнообразные системы чисел, допускающих вычисление произвольных рациональных (т. е. использующих только четыре арифметических действия) выражений, например числа вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b – рациональные.

При рассмотрении алгебраических выражений во многих случаях выделяют некоторые *основные величины (переменные)*, отличая их от других, называемых *коэффициентами* или *параметрами*. При этом возможно считать допустимыми для основных величин и для параметров различные системы чисел. Так, например, рассматривая алгебраические уравнения (см. 2.4.2) с целыми или действительными коэффициентами, можно искать корни среди целых, действительных или комплексных чисел.

Алгебраические выражения можно преобразовывать, заменяя одно выражение другим. Такие преобразования называются *допустимыми (тождественными)*, если после преобразования выражение будет сохранять свое значение при подстановке любых чисел допустимых систем. При преобразованиях используются основные свойства арифметических действий (здесь и далее в этом пункте знак равенства употребляется в смысле тождественности):

коммутативность (перестановочность):

$$a+b=b+a, \quad a\cdot b=b\cdot a;$$

ассоциативность (сочетательность):

$$a+(b+c)=(a+b)+c, \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c;$$

дистрибутивность (распределительность):

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Из этих свойств вытекают формулы действий над степенями:

$$x^m\cdot x^n=x^{m+n}, \quad (x\cdot y)^m=x^m\cdot y^m, \quad (x^m)^n=x^{m\cdot n},$$

$$x^m/x^n=x^{m-n}, \quad (x/y)^m=x^m/y^m.$$

Некоторые формулы преобразований:

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2,$$

$$(x+y+\ldots+t+u)^2=x^2+y^2+\ldots+t^2+u^2+$$
$$+2xy+\ldots+2xt+2xu+\ldots+2yu+\ldots+2tu,$$

$$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3,$$

$$(x\pm y)^n \quad \text{(см. 2.2.2.1)},$$

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2,$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+$$
$$+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$

$$x^{2k}-y^{2k}=(x+y)(x^{2k-1}-x^{2k-2}y+x^{2k-3}y^2-$$
$$-\ldots+xy^{2k-2}-y^{2k-1}),$$

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-$$
$$-\ldots-xy^{2k-1}+y^{2k}).$$

2.4.1.3. Многочлены. Если в алгебраическом выражении основные величины (переменные) участвуют только в действиях сложения, вычитания и умножения, включая возведение в целую степень, то такие выражения называются *целыми рациональными* (см. 2.5.1). Используя свойства арифметических действий, любое целое рациональное выражение можно представить в виде *многочлена* (суммы одночленов):

$$A_1\cdot X_1+A_2\cdot X_2+\ldots+A_n\cdot X_n,$$

где A_i – коэффициенты выражения, не содержащие переменных, а X_i – произведения степеней переменных. Многочлен обычно располагают в порядке убывания или возрастания степеней какой-нибудь переменной либо суммы степеней всех переменных. Одночлены, в которых выражения X_i тождественны, т. е. содержат одинаковые переменные в одних и тех же степенях, называются *подобными* и обычно *приводятся* – объединяются в один, коэффициент в котором равен сумме коэффициентов приводимых одночленов. Сумма степеней всех переменных в одночлене называется *степенью* этого *одночлена*. Наибольшая из степеней одночленов называется *степенью многочлена*.

Сумма, разность и произведение многочленов также являются многочленами. Степень суммы или разности не превосходит наибольшей из степеней слагаемых, степень произведения равна сумме степеней сомножителей.

Деление многочленов (с остатком). Если $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены по x степеней n и m соответственно, $n\geqslant m$, то всегда существуют однозначно определенные многочлены $T(x)$ степени $n-m$ и $R(x)$ степени, меньшей чем m, такие, что тождественно $P(x)=Q(x)\cdot T(x)+R(x)$. Для нахождения *частного* $T(x)$ и *остатка* $R(x)$ выполняют деление $P(x)$ на $Q(x)$.

Пример.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4 & x^2-2ax+3a^2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4-6ax^3+9a^2x^2} & 3x^2-4ax+5a^2 \\
\quad -4ax^3+13a^2x^2-24a^3x & \\
\quad \underline{-4ax^3+8a^2x^2-12a^3x} & \\
\qquad 5a^2x^2-12a^3x+10a^4 & \\
\qquad \underline{5a^2x^2-10a^3x+15a^4} & \\
\qquad\qquad -2a^3x-5a^4 &
\end{array}$$

Таким образом, $3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4=$ $=(x^2-2ax+3a^2)(3x^2-4ax+5a^2)+(-2a^3x-5a^4)$.

Если $R(x)\equiv 0$ (нулевой многочлен), то многочлен $Q(x)$ называется *делителем* многочлена $P(x)$. Для нахождения общего наибольшего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ применяется *алгоритм Евклида*. Выполняется цепочка делений до получения остатка, равного нулю:

$$P(x)=Q(x)\cdot T_1(x)+R_1(x),$$
$$Q(x)=R_1(x)\cdot T_2(x)+R_2(x),$$
$$R_1(x)=R_2(x)\cdot T_3(x)+R_3(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{m-2}(x)=R_{m-1}(x)\cdot T_m(x)+R_m(x),$$
$$R_{m-1}(x)=R_m(x)\cdot T_{m+1}(x).$$

Предшествующий ему остаток $R_m(x)$ является общим наибольшим делителем. Если он не содержит x, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ называются *взаимно простыми*.

2.4.1.4. Иррациональные выражения.

Обобщение понятия о степени. Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень. Корнем m-й степени

из x (обозначается $\sqrt[m]{x}$) называется величина y, m-я степень которой равна x: $(\sqrt[m]{x})^m = x$. При m четном $\sqrt[m]{x}$ существует (среди действительных чисел) только при $x \geqslant 0$, причем допустимы два значения корня – положительное и отрицательное. Для определенности знак корня в этом случае будем всегда брать положительным, так что $\sqrt[m]{x^m} = |x|$. При m нечетном существует единственное значение $\sqrt[m]{x}$, знак которого совпадает со знаком x.

Из определения следует, что

$$\sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}, \quad \sqrt[m]{x/y} = \sqrt[m]{x}/\sqrt[m]{y}$$

при условии, что соответствующие корни существуют.

Выражения, содержащие знак корня (радикал), называются *иррациональными*.

Примеры преобразований иррациональных выражений

1) $\sqrt{x/(2y)} = \sqrt{2xy/(4y^2)} = \sqrt{2xy}/(2|y|)$ (при $y \neq 0$, $xy \geqslant 0$);

2) $\sqrt[3]{x/(4yz^2)} = \sqrt[3]{2xy^2z/(8y^3z^3)} = \sqrt[3]{2xy^2z}/(2yz)$ (при $y \neq 0$, $z \neq 0$);

3) $1/(x + \sqrt{y}) = (x - \sqrt{y})/((x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})) = (x - \sqrt{y})/(x^2 - y)$ (при $y \geqslant 0$, $x^2 - y \neq 0$);

4) $1/(x + \sqrt[3]{y}) = (x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})/((x + \sqrt[3]{y})(x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})) = (x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})/(x^3 + y)$ (при $x^3 + y \neq 0$);

5) $\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{(x + u)/2} + \sqrt{(x - u)/2}$,

где $u = \sqrt{x^2 - y}$ (при $y \geqslant 0$, $x^2 - y \geqslant 0$).

Понятие возведения в степень может быть обобщено на нулевой, отрицательные и дробные показатели при помощи формул (для допустимых значений x)

$$x^0 = 1,\ x^{-n} = 1/x^n,\ x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m},\ x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m}.$$

Приведенные в 2.4.1.2 формулы для действий со степенями остаются в силе.

Пример. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[12]{x^7})(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x^5}) = (x^{1/2} + x^{2/3} + x^{3/4} + x^{7/12})(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4} + x^{5/12}) = x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{13/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x = x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3}$.

2.4.1.5. Неравенства. Два алгебраических выражения, соединенные одним из знаков $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, $\neq$, образуют *неравенство*. Неравенство называется *тождественным* или *универсальным*, если оно выполняется (в арифметическом смысле) для любых действительных значений входящих в неравенство величин. Неравенство называется *выполнимым*, если существует непустое множество значений входящих в неравенство величин, при подстановке которых неравенство оказывается справедливым, и *невыполнимым*, если таких значений не существует.

Примеры. Неравенство $x^2 + 1 > 0$ – тождественное; $x^2 + y^2 + 5 < 0$ – невыполнимое; $2x + 4 \geqslant 0$ – выполнимое (оно справедливо при $x \geqslant -2$).

Некоторые универсальные неравенства.

1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

2) $|a| + |b| \geqslant |a - b| \geqslant ||a| - |b||$.

3) $|(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n| \leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n}$ (равенство имеет место только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$).

4) *Неравенство Коши – Буняковского*:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha a_k = \beta b_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и некоторых α, β, $|\alpha| + |\beta| > 0$).

5) *Неравенство Минковского* (при $p \geqslant 1$):

$$(|a_1 + b_1|^p + |a_2 + b_2|^p + \ldots + |a_n + b_n|^p)^{1/p} \leqslant (|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p} + (|b_1|^p + |b_2|^p + \ldots + |b_n|^p)^{1/p}.$$

Выполнимые неравенства.

1) $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

при $a_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)

Среднее геометрическое положительных чисел меньше их среднего арифметического или равно ему (см. 2.3.1). Равенство имеет место, только если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2) *Неравенство Чебышева.* При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

3) *Обобщенные неравенства Чебышева.* При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, k натуральном

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \leqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k}{n}}.$$

При $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \sqrt[k]{\frac{b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k}{n}} \geqslant \sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k}{n}}.$$

Неравенства называются *эквивалентными*, если они выполнимы для одних и тех же значений входящих в них величин или если они невыполнимы.

Основные свойства неравенств (эквивалентные преобразования).

1) Если $A_1 < A_2$, то $A_2 > A_1$.

2) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 \leqslant A_1$, то $A_1 = A_2$.

3) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 \leqslant A_3$, то $A_1 \leqslant A_3$.

4) Если $A_1 < A_2$ и $A_2 \leqslant A_3$ или $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 < A_3$, то $A_1 < A_3$.

5) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_3 \leqslant A_4$, то $A_1 + A_3 \leqslant A_2 + A_4$.

6) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_3 > 0$, то $A_1A_3 \leqslant A_2A_3$.

7) Если $A_1 \leqslant A_2$ и $A_3 < 0$, то $A_1A_3 \geqslant A_2A_3$.

8) Если $0 < A_1 \leqslant A_2$ или $A_1 \leqslant A_2 < 0$, то $1/A_1 \geqslant 1/A_2$.

Решить неравенство, содержащее неизвестную величину,— значит определить множество значений неизвестного, при которых неравенство выполнимо,— *множество решений неравенства*. Для отыскания решения используются эквивалентные преобразования.

Примеры решения неравенств.

1) $5x + 3 \leqslant 8x + 1$. Используя свойство 5), прибавим к обеим частям неравенства $-8x - 3$; получим $-3x \leqslant -2$. Используя свойства 6) и 7), получим решение $x \geqslant 2/3$.

2) Неравенство первой степени $ax + b \geqslant 0$*). При $a > 0$ имеем $x \geqslant -b/a$, при $a < 0$ имеем $x \leqslant -b/a$, а при $a = 0$ неравенство тождественно для $b \geqslant 0$ и невыполнимо для $b < 0$.

3) $x^2 \leqslant a$. При $a < 0$ неравенство невыполнимо, при $a = 0$ получаем $x = 0$, при $a > 0$ решением является множество значений, определяемое двойным неравенством $-\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.

4) $x^2 \geqslant a$. При $a \leqslant 0$ неравенство тождественно, при $a > 0$ решением является множество значений x, определяемое следующими условиями: или $x \geqslant \sqrt{a}$, или $x \leqslant -\sqrt{a}$.

5) Неравенство второй степени $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ ($a \neq 0$) может быть преобразовано к виду $a((x + p/2)^2 + D) \geqslant 0$, где $p = b/a$, $D = (4ac - b^2)/(4a^2)$. При $D \geqslant 0$ неравенство тождественно при $a > 0$ и невыполнимо при $a < 0$. При $D < 0$, используя свойства неравенств и примеры 3) и 4), получим, обозначив $x_1 = -p/2 - \sqrt{-D}$, $x_2 = -p/2 + \sqrt{-D}$, что $x \leqslant x_1$ или $x \geqslant x_2$ при $a > 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ при $a < 0$.

2.4.1.6. Элементы теории групп. Алгебраическая система G, в которой определена одна операция, ставящая в соответствие двум любым элементам системы какой-либо третий элемент этой системы, называется *группой*, если эта операция (обозначаемая $*$) обладает следующими свойствами:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ для всех $a, b, c \in G$ — ассоциативность;

2) существует «нейтральный» элемент e такой, что $e * a = a * e = a$ для всех $a \in G$;

3) для каждого $a \in G$ существует обратный элемент x такой, что $a * x = x * a = e$.

Если, кроме того, для любых элементов a и b выполнено соотношение $a * b = b * a$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

*) Знак неравенства $\leqslant$ можно перевести в $\geqslant$ умножением неравенства на -1. Если вместо $\geqslant$ стоит $>$, то при решении возможность равенства должна быть отброшена.

В качестве знака операции обычно употребляют знак $+$ (аддитивная группа) или $\cdot$ (мультипликативная группа). Для аддитивной группы нейтральный элемент называется *нулем*, а обратный к a элемент обозначается $-a$. Для мультипликативной группы нейтральный элемент называется *единицей*, а обратный элемент обозначается a^{-1}.

Коммутативная аддитивная группа называется *кольцом*, если в ней определена, кроме операции сложения, вторая операция — *умножение*, обладающая *дистрибутивностью*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для любых элементов a, b и c.

Примером кольца может служить $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

Если операция умножения в кольце обладает свойством ассоциативности $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ или коммутативности $a \cdot b = b \cdot a$, то кольцо называется соответственно *ассоциативным* или *коммутативным*.

Если в ассоциативном и коммутативном кольце существует единичный элемент e, т. е. $a \cdot e = e \cdot a = a$ для любого a, и для каждого элемента a, отличного от нуля, существует обратный элемент a^{-1} (т. е. кольцо, из которого исключен нуль, образует мультипликативную группу), то кольцо называется *полем*. Примерами полей могут служить множество всех рациональных чисел, множество всех действительных чисел и множество всех комплексных чисел.

Отображение алгебраической системы G в другую систему G' называется *гомоморфизмом*, если каждому элементу $a \in G$ соответствует определенный элемент $a' \in G'$, причем если $c = a * b$, то $c' = a' *' b'$ ($*$ — операция, определенная в G, $*'$ — операция, определенная в G'). Если такое отображение взаимно однозначно, оно называется *изоморфизмом*.

2.4.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.4.2.1. Уравнения. Пусть G обозначает множество чисел, так называемую *основную область*, и a, b, $c, \ldots, x$, y, z — переменные. Это знаки, вместо которых могут стоять элементы основной области или ее подмножества, так называемой *основной области переменных*, или *области изменения*. Из чисел и переменных могут быть построены алгебраические выражения (см. 2.4.1), например: 8, $-3/5$, $(2x - 1)/a$ ($a \neq 0$), $\sqrt[3]{a^2 - 1}$. Определение выражения можно распространить на неалгебраические выражения, к которым относятся, например, a^β (β действительное), e^x, $\log_a y$, $\sin x$, $\arccos z$.

Под *областью определения* X выражения с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующими областями изменения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ понимают множество всех последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in X_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), для которых данное выражение переходит в число из области G, если переменные x_i заменить на ξ_i.

Если G — множество всех действительных чисел, то выражение $(2x + 1)/5$ имеет, например, в качестве области определения всю область изменения x, в то время как область определения выражения $5/(2x + 1)$ содержит все числа области изменения x, за исключением $-1/2$.

Два выражения $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *эквивалентными* по отношению к области определения X, если соотношение $T_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = T_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ выполняется для всех последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in X$ (ср. 2.4.1.5). Переход от выражения T_1 к эквивалентному выражению T_2 называется *эквивалентным преобразованием выражений*. Это понятие зависит от областей определения выражений; так, $\sqrt{a^2} = a$ для неотрицательных действительных чисел есть эквивалентное преобразование, но не является таковым для множества всех действительных чисел.

Пример. Выражения $3x/2 + 5x/2$ и $4x$ эквивалентны по отношению к множеству всех действительных чисел, в то время как $a + b + 1$ и $a + (b^2 - 1)/(b - 1)$ не эквивалентны по отношению к этому множеству, так как выражение $a + (b^2 - 1)/(b - 1)$ не определено при $b = 1$.

Если два выражения T_1, T_2, содержащие переменные, связать знаком равенства: $T_1 = T_2$, то получается *уравнение*; T_1 и T_2 называются соответственно левой и правой частями уравнения. Если выражения T_1 и T_2 не содержат переменных, то имеется высказывание о равенстве, которое либо истинно, либо ложно. Уравнение представляет собой высказывание, которое переходит в истинное или ложное только после замены переменных их значениями.

Решение. Множество решений. Пусть $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть уравнение с n переменными, и пусть X – соответствующая область определения. Тогда каждая последовательность чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, элементы ξ_i которой, будучи подставленными вместо соответствующих переменных x_i в уравнение, переводят его в истинное высказывание, называется *решением* или *корнем* этого уравнения. Решить уравнение – значит найти все его решения, т. е. найти его множество решений.

Пример. (3, 2) есть решение уравнения $3x_1 - 2x_2 = 5$ (x_1, x_2 действительны), множество решений есть $\{((5 + 2t)/3, t);\ t$ – произвольное действительное число$\}$.

Уравнение называется *разрешимым* или *неразрешимым* в зависимости от того, имеет оно решение или нет. Если все последовательности чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in X$ являются решениями уравнения, то оно называется *тождеством относительно* X. Так, уравнение $x^2 = 2$ для рациональных x неразрешимо, а для действительных x разрешимо. Уравнение $\sqrt{a^2} = a$ есть тождество по отношению к множеству всех неотрицательных действительных чисел.

Уравнения с параметрами. Иногда в уравнении с n переменными часть переменных можно рассматривать в качестве так называемых *неизвестных* m переменных $(0 < m < n)$, а остальные – в качестве *параметров*. Тогда решения уравнения могут зависеть от параметров.

Пример. Если в уравнении $5x - 2y = z + 1$ все переменные считаются неизвестными уравнения, то это есть уравнение относительно переменных x, y и z и, например, тройка (1, 0, 4) есть решение этого уравнения. Если же z рассматривать как параметр, то получается уравнение относительно x и y, решением которого является, например, $(z + 3, 2z + 7)$.

Эквивалентные уравнения: Два уравнения с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащими одной и той же области изменения, называются *эквивалентными* над этой областью изменения, если их множества решений совпадают. Например, уравнения $x^2 = 4$ и $x^3 = 8$ эквивалентны над множеством натуральных чисел, но не эквивалентны над множеством целых чисел, так как в последнем случае множества решений суть $\{-2, 2\}$ и $\{2\}$ соответственно.

Уравнения, тождественные по отношению к одинаковым областям изменения, всегда эквивалентны (это справедливо и для двух неразрешимых уравнений); если два уравнения эквивалентны третьему, то они эквивалентны друг другу (*транзитивность* эквивалентности) (ср. 2.4.1.5).

2.4.2.2. Эквивалентные преобразования. *Эквивалентное преобразование* – это преобразование, которое переводит уравнение в эквивалентное. Преобразование, переводящее уравнение G_1 в уравнение G_2, эквивалентно тогда и только тогда, когда для множеств решений L_1 и L_2 уравнений G_1 и G_2 выполняется равенство $L_1 = L_2$. Если, напротив, $L_1 \neq L_2$, то преобразование называется *неэквивалентным*.

Примеры (областью изменения в дальнейшем всегда будет множество действительных чисел).

1) Преобразование уравнения G_1: $3x - 4 = 8 + 5x$ в уравнение G_2: $2x = -12$ является эквивалентным, так как $L_1 = L_2 = \{-6\}$.

2) Если уравнение $\dfrac{12 + 4x}{x + 3} = \dfrac{2x - 1}{5 - x}$ переписывают в виде $(12 + 4x)(5 - x) = (2x - 1)(x + 3)$, то производят неэквивалентное преобразование, так как $L_1 = \{7/2\} \subset \{7/2, -3\} = L_2$; в этом случае $L_1 \subset L_2$. Если в качестве области изменения брать, например, множество положительных действительных чисел, то указанное преобразование является эквивалентным, так как в этом случае $L_1 = L_2 = \{7/2\}$.

3) Еще один пример неэквивалентного преобразования подобного типа дает переход от $\sqrt{x + 7} = 2x - 1$ к $x + 7 = (2x - 1)^2$, так как $L_1 = \{2\} \subset \{2, -3/4\} = L_2$.

4) При неэквивалентных преобразованиях решения могут и теряться, т. е. $L_1 \supset L_2$. Например, если перейти от уравнения G_1: $x^3 - 4x^2 = 5x$ к уравнению G_2: $x^2 - 4x - 5 = 0$, то получим $L_1 = \{-1, 0, 5\} \supset L_2 = \{-1, 5\}$.

Теоремы об эквивалентных преобразованиях уравнений (ср. 2.4.1.5).

1. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнению $T'_1 = T'_2$, если T_1 эквивалентно T'_1 и T_2 эквивалентно T'_2.

2. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнению $T_2 = T_1$.

3. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнениям $T_1 + T_3 = T_2 + T_3$ и $T_1 - T_3 = T_2 - T_3$, если T_3 есть выражение, определенное во всей области определения уравнения $T_1 = T_2$.

4. Уравнение $T_1 = T_2$ эквивалентно уравнениям $T_1T_3 = T_2T_3$ и $T_1 : T_3 = T_2 : T_3$, если T_3 определено и отлично от нуля во всей области определения уравнения $T_1 = T_2$.

Чтобы решить уравнение, т. е. чтобы определить множество его решений, в общем случае посредством эквивалентных преобразований составляют цепочку уравнений: первое есть заданное уравнение, а последнее – уравнение такой простой структуры, что его решение можно найти непосредственно. По построению каждые два соседних уравнения цепочки эквивалентны друг другу; вслед-

ствие транзитивности эквивалентности все уравнения цепочки эквивалентны друг другу; в частности, исходное уравнение эквивалентно последнему уравнению. Следовательно, найдя множество решений последнего уравнения, мы находим также множество решений исходного уравнения.

Примеры. 1) $\frac{5}{x} + \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x+2}$ (x – действительное);

2) $5(x+2)(2-x) + 2x(x+2) = 3x(2-x)$;

3) $-5x^2 + 20 + 2x^2 + 4x = 6x - 3x^2$;

4) $20 = 2x$; 5) $x = 10$.

Проделанные преобразования эквивалентны для всех $x \neq -2, 0, 2$. Следовательно, искомое множество решений имеет вид $L_1 = L_5 = \{10\}$.

2.4.2.3. Алгебраические уравнения.

Общее понятие. Каноническая форма. Любое уравнение $P(x_1,\ldots,x_n) = 0$, где $P(x_1,\ldots,x_n)$ есть многочлен (отличный от нулевого) относительно $x_1,\ldots,x_n$, называется *алгебраическим уравнением* относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$. Коэффициенты многочлена могут при этом быть как постоянными, так и параметрами (т. е. переменными, отличными от $x_1,\ldots,x_n$) или функциями таких параметров.

В соответствии со сказанным, например, $3x^2 - x + 5 = 0$, $\pi x - 1 = 0$ – алгебраические уравнения относительно x, а $x^2 + 2y^2 - xy - 3 = 0$ – алгебраическое уравнение относительно x и y. Уравнение $y^3 - y\sin x - 2\sin^2 x - 7 = 0$ не является алгебраическим относительно x и y, но если x рассматривается как параметр, то и это уравнение будет алгебраическим относительно y.

Неалгебраическими уравнениями являются, например, $\sqrt{4x-7} + 5 = 1 - 2x^3$, $\frac{x-5}{x^2 - 8x + 15} = \frac{1}{x-3}$, $\sin x - e^x + 5 = 0$.

Среди неалгебраических уравнений те уравнения, в которые переменные, рассматриваемые как неизвестные, входят под знаками трансцендентных функций (см. 2.5.2), называются *трансцендентными уравнениями* (см. 2.4.3).

Иногда неалгебраические уравнения можно преобразовать в алгебраические (не обязательно эквивалентные исходным).

Примеры. Уравнение $\frac{4}{x} = \frac{2x-1}{5-x}$ эквивалентно алгебраическому уравнению $2x^2 + 3x - 20 = 0$.

Уравнение $\frac{x-5}{x^2 - 8x + 15} = \frac{1}{x-3}$ никакому алгебраическому уравнению не эквивалентно; оно выполнено для всех x, кроме $x = 3$ и $x = 5$.

Уравнение $7 - x = \sqrt{x-1}$ можно преобразовать в алгебраическое уравнение $x^2 - 15x + 50 = 0$, но это уравнение не эквивалентно исходному. Алгебраическое уравнение имеет множество решений $\{5, 10\}$, в то время как исходное уравнение выполняется только при $x = 5$.

Всякое *алгебраическое уравнение* относительно x можно записать в виде

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0;$$

$$A_0 \neq 0,\ n \geqslant 1;$$

A_i называются *коэффициентами* уравнения, n – его *степенью*.

Если все коэффициенты A_i являются параметрами, то уравнение называется *общим алгебраическим уравнением относительно x степени n*.

Если алгебраическое уравнение разделить на $A_0 \neq 0$, то, обозначая $A_i/A_0 = a_i$ ($i = 1, 2,\ldots,n$), получим *каноническую* форму алгебраического уравнения n-й степени относительно x:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Корни алгебраических уравнений *до четвертой степени включительно* выражаются через коэффициенты при помощи конечного числа алгебраических операций. В этом случае каждое решение выражается в радикалах, т. е. представляет собой выражение, содержащее только знаки арифметических операций и извлечения корней; показатели этих корней – целые числа $p \geqslant 2$, а подкоренные выражения суть рациональные функции коэффициентов или сами содержат радикалы.

Алгоритмы решения алгебраических уравнений с одним неизвестным. *Линейные уравнения* (уравнения 1-й степени). Каждое линейное уравнение есть алгебраическое уравнение 1-й степени, т. е. неизвестное встречается только в 1-й степени. Существуют также уравнения, эквивалентные линейному.

Например, уравнение $(x-1)(x+3) = (x+8)(x-2)$ над множеством $\mathbf{R}$ действительных чисел эквивалентно линейному уравнению $4x - 13 = 0$. Уравнение [illegible] $= \frac{3}{x-1}$ над множеством $\mathbf{R} \setminus \{1, 3, 5\}$ эквивалентно линейному уравнению $x - 13 = 0$. Иррациональное уравнение $\sqrt[3]{x+2} = 1$ над множеством всех действительных чисел эквивалентно уравнению $x + 1 = 0$.

Линейное уравнение с одним неизвестным x и областью изменения $\mathbf{R}$ имеет вид $ax + b = 0$, $a \neq 0$, ax – линейный член, b – свободный член. Это уравнение имеет одно решение: $x = -b/a$. При изменении множества, над которым определяется решение, изменяется и разрешимость уравнения. Так, уравнение $2x + 5 = 0$ неразрешимо над множеством натуральных чисел.

Квадратные уравнения (уравнения 2-й степени). Каждое алгебраическое уравнение 2-й степени называется *квадратным уравнением*. Квадратное уравнение относительно x с областью изменения $\mathbf{R}$ (или множеством комплексных чисел $\mathbf{C}$) имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$$

где ax^2 – квадратный, bx – линейный и c – свободный члены. После деления на a получаем каноническую форму: $x^2 + px + q = 0$, где $p = b/a$, $q = c/a$ – действительные параметры.

Число действительных решений квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ зависит от знака *дискриминанта* $D = q - (p/2)^2$:

если $D < 0$, то имеется два решения (два действительных корня);

если $D = 0$, то имеется одно решение (два действительных совпадающих корня);

если $D > 0$, то нет действительных решений (два комплексных корня).

Если в качестве области изменения неизвестного взять множество комплексных чисел, то квадратное уравнение всегда имеет два решения: действительные – в случае $D \leqslant 0$ и комплексно сопряженные – в случае $D > 0$.

Вследствие того, что $4ac - b^2 = 4a^2D$, в качестве дискриминанта можно использовать выражение $\Delta = 4ac - b^2$, знак которого определяет вид решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение квадратного уравнения.

1-й способ. *Применение формулы.*

а) Для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

б) Для уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ имеем

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q} = -p/2 \pm \sqrt{-D}.$$

Эти формулы справедливы всегда, если в качестве области изменения неизвестного выбрано множество комплексных чисел. Если область изменения есть множество действительных чисел, то надо потребовать еще, чтобы выполнялось неравенство $D \leqslant 0$ (или $\Delta \leqslant 0$).

2-й способ. *Разложение на линейные множители.* В случае, если удается разложить квадратный трехчлен на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ (или $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$), уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (или $x^2 + px + q = 0$) имеет множество решений $L = \{\alpha, \beta\}$.

Кубические уравнения (уравнения 3-й степени). Уравнение 3-й степени, или кубическое уравнение, имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ a \neq 0,$$

где a, b, c, d – действительные, при этом ax^3 – кубический, bx^2 – квадратный, cx – линейный и d – свободный члены. После деления на a уравнение принимает канонический вид:

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0, \qquad (*)$$

где $r = b/a$, $s = c/a$, $t = d/a$.

Делая в уравнении $(*)$ замену неизвестного $y = x + (r/3)$ $(x = y - (r/3))$, получаем так называемое *приведенное уравнение*:

$$y^3 + py + q = 0,$$

где $p = \dfrac{3s - r^2}{3}$, $q = \dfrac{2r^3}{27} - \dfrac{rs}{3} + t$.

Число действительных решений кубического уравнения зависит от знака *дискриминанта* $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$ (эта величина получается умножением на $(-1/108)$ дискриминанта, введенного в 1.2.1.1):

Решение кубического уравнения.

1-й способ. *Разложение левой части на линейные множители.* Если удается найти разложение $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, то уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет множество решений $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Достаточно найти разложение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x^2 + \rho x + \sigma)$ (выделение линейного множителя); тогда одно решение есть $x_1 = \alpha$, а два других находятся путем решения квадратного уравнения $x^2 + \rho x + \sigma = 0$. Очевидно, выделение линейного множителя всегда возможно, если известно одно решение уравнения или это решение можно подобрать (см. 2.4.2.4).

2-й способ. *Применение формулы Кардано.* Формула Кардано для кубического уравнения $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ относится к его приведенному виду $y^3 + py + q = 0$. В этом случае

$$y_1 = u + v,$$

$$y_2 = -\frac{u + v}{2} + \frac{u - v}{2} i\sqrt{3} = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v,$$

$$y_3 = -\frac{u + v}{2} - \frac{u - v}{2} i\sqrt{3} = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{D}}, \qquad v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{D}},$$

$$D = (p/3)^3 + (q/2)^2, \qquad \varepsilon_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2.$$

Посредством замены $x_k = y_k - (r/3)$ $(k = 1, 2, 3)$ из y_k получим решения x_k данного кубического уравнения.

В случае $D < 0$ кубическое уравнение имеет три действительных решения. Если применять приведенные выше формулы, то корни будут выражаться через комплексные величины. Избежать этого можно следующим образом (см. также 3-й способ). Положим $\rho = \sqrt{-p^3/27}$, $\cos\varphi = -q/(2\rho)$. Тогда решениями приведенного уравнения $y^3 + py + q = 0$ будут

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3),$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3 + 2\pi/3),$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\varphi/3 + 4\pi/3),$$

от которых заменой $x_k = y_k - (r/3)$ снова можно перейти к решениям заданного кубического уравнения $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$.

	x действительное	x комплексное
$D > 0$	Одно действительное решение	Одно действительное и два комплексно сопряженных решения
$D < 0$	Три действительных решения	Три действительных решения
$D = 0$	Одно действительное решение и одно действительное двукратное решение или одно действительное трехкратное решение (последнее в случае $p = q = 0$)	Одно действительное решение и одно действительное двукратное решение или одно действительное трехкратное решение (последнее в случае $p = q = 0$)

Пример. Кубическое уравнение $x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$ заменой $x = y + 2$ преобразуем к приведенному виду $y^3 + 9y - 26 = 0$ (здесь $p = 9$, $q = -26$, $D = 27 + 169 = 196$). Применение формулы Кардано дает $y_1 = 2$, $y_2 = -1 + 2i\sqrt{3}$, $y_3 = -1 - 2i\sqrt{3}$; следовательно, $x_1 = 4$, $x_2 = 1 + 2i\sqrt{3}$, $x_3 = 1 - 2i\sqrt{3}$.

3-й способ. *Применение вспомогательных величин, которые могут быть вычислены при помощи таблиц.* В приведенном уравнении $y^3 + py + q = 0$ положим $R = (\operatorname{sign} q)\sqrt{|p|/3}$. Вспомогательная величина φ и при ее помощи корни y_1, y_2, y_3 определяются в зависимости от знаков p и $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$ из таблицы:

	$p<0$, $D<0$	$p<0$, $D>0$	$p>0$
	$\cos\varphi = \dfrac{q}{2R^3}$	$\operatorname{ch}\varphi = \dfrac{q}{2R^3}$	$\operatorname{sh}\varphi = \dfrac{q}{2R^3}$
y_1	$-2R\cos\dfrac{\varphi}{3}$	$-2R\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$	$-2R\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$
y_2	$-2R\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$	$R\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}R\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$	$R\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}R\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$
y_3	$-2R\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}\right)$	$R\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}R\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$	$R\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}R\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$

Пример. $y^3 - 9y + 4 = 0$, $p = -9$, $q = 4$, $D = -23 < 0$, $R = \sqrt{3} = 1{,}7321$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849$, $\varphi = 67°22'$.

$$y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}4641 \cdot 0{,}9242 = -3{,}201,$$

$$y_2 = -2\sqrt{3}\cos 142°27' = (-3{,}4641)\cdot(-0{,}7929) = 2{,}747,$$

$$y_3 = -2\sqrt{3}\cos 262°27' = (-3{,}4641)\cdot(-0{,}1314) = 0{,}455.$$

Приближенное решение уравнения см. 7.1.2.3. *Уравнение 4-й степени* имеет вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,\ a \neq 0,$$

где a, b, c, d, e — действительные; посредством замены $y = x + b/(4a)$ данное уравнение переводим в *приведенное уравнение*

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

где p, q и r — рациональные функции коэффициентов a, b, c, d, e.

Вид решения этого уравнения зависит от вида решения его *кубической резольвенты*

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Если область изменения неизвестного есть множество **C** комплексных чисел, то имеет место следующее:

Решение уравнения 4-й степени.

1-й способ. *Разложение на линейные множители.* Если удается произвести разложение многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-\alpha)\times(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$, то уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

имеет множество решений $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Достаточно найти разложение левой части уравнения 4-й степени в произведение двух квадратных трехчленов: тогда решение уравнения 4-й степени сводится к решению двух квадратных уравнений.

2-й способ. Если z_1, z_2, z_3 — корни кубической резольвенты, то

$$y_1 = (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_2 = (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_3 = (-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_4 = (-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2$$

суть решения приведенного уравнения $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ (при этом знаки перед радикалами $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ выбирают так, чтобы выполнялось равенство $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q$). Далее посредством замены $x = y - b/(4a)$ находят решения исходного уравнения 4-й степени.

Пример. Уравнение $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ имеет кубическую резольвенту $z^3 - 50z^2 + 769z - 3600 = 0$ с решениями $z_1 = 9$, $z_2 = 16$, $z_3 = 25$; для того чтобы $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -60$, знаки перед всеми корнями надо взять, например, отрицательными, т. е. $\sqrt{z_1} = -3$, $\sqrt{z_2} = -4$, $\sqrt{z_3} = -5$. Отсюда получим корни исходного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -6$.

3-й способ. Если в уравнении

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Кубическая резольвента	Уравнение 4-й степени
Все корни действительны и положительны*)	Четыре действительных корня
Все корни действительны, из них один положительный и два отрицательных*)	Две пары комплексно сопряженных корней
Один действительный корень и два комплексно сопряженных корня	Два действительных корня и два комплексно сопряженных корня

*) Согласно теореме Виета, произведение корней z_1, z_2, z_3, равное q^2, должно быть всегда положительным ($q \neq 0$).

выполняется равенство $b = d = 0$, то мы имеем так называемое *биквадратное уравнение* $ax^4 + cx^2 + e = 0$. Посредством замены переменного $x^2 = t$ это уравнение переводится в квадратное уравнение $at^2 + ct + e = 0$. Из решений t_1, t_2 этого уравнения, полагая $x^2 = t$, получают корни исходного уравнения 4-й степени.

Если коэффициенты уравнения $x^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$ удовлетворяют соотношению $r^3 + 8t = 4rs$, то уравнение 4-й степени может быть решено при помощи квадратного уравнения: $x^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = \left(x^2 + \frac{rx}{2}\right)^2 + \left(s - \frac{r^2}{4}\right) \times \left(x^2 + \frac{rx}{2}\right) + u = 0$. После замены $x^2 + \frac{rx}{2} = t$ заданное уравнение 4-й степени переходит в уравнение $t^2 + \left(s - \frac{r^2}{4}\right)t + u = 0$, решая которое, получаем затем решения исходного уравнения.

Приближенное решение уравнения см. 7.1.2.3.

Уравнения высших степеней. Уравнения 5-й и более высоких степеней в общем случае принципиально неразрешимы в радикалах. Чаще всего их решают приближенными методами (см. 7.1.2.3). Если можно подобрать решение x_1, то выделением линейного множителя $(x - x_1)$ решение заданного уравнения сводится к решению уравнения меньшей степени.

Частные виды уравнений высших степеней. m решений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *двучленного уравнения* $x^m = a$ ($m > 1$ целое, a положительное) получают при помощи формулы Муавра (см. 3.4.2.5) в виде

$$x_{k+1} = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Уравнение $x^{2m} + ax^m + b = 0$ заменой переменного $x^m = y$ переводится в квадратное уравнение $y^2 + ay + b = 0$. Если оно имеет решения y_1, y_2, то при помощи двучленных уравнений $x^m = y_1$ или $x^m = y_2$ находят корни исходного уравнения.

2.4.2.4. Общие теоремы. Если x_1 – корень уравнения

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

то многочлен $P_n(x)$, стоящий в левой части уравнения, делится на $(x - x_1)$ без остатка и получаемое частное есть многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n - 1$:

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x).$$

В общем случае остаток от деления $P_n(x)$ на $(x - x_1)$ равен $P_n(x_1)$:

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x) + P_n(x_1).$$

Если $P_n(x)$ делится без остатка на $(x - x_1)^k$, но уже не делится на $(x - x_1)^{k+1}$, то x_1 называется *k-кратным корнем* уравнения $P_n(x) = 0$ (корнем *кратности* k). В этом случае x_1 есть общий корень полинома $P_n(x)$ и его производных вплоть до $(k-1)$-го порядка.

Основная теорема алгебры. Каждое алгебраическое уравнение n-й степени

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

коэффициенты которого a_i ($i = 1, \ldots, n$) – действительные или комплексные числа, имеет ровно n корней, действительных или комплексных, если k-кратный корень считать за k корней.

Если корни многочлена $P_n(x)$ равны $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и кратности их равны соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n\right)$, то многочлен *представим в виде произведения:*

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x - x_r)^{\alpha_r},$$

и соответствующее уравнение имеет вид

$$(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x - x_r)^{\alpha_r} = 0.$$

Решение уравнения $P_n(x) = 0$ можно упростить путем перехода к уравнению, имеющему те же самые корни, что и $P_n(x) = 0$, но уже однократные (простые). Так как кратные корни многочлена $P_n(x)$ являются также корнями производной $P_n'(x)$, то определяют наибольший общий делитель $T(x)$ многочленов $P_n(x)$ и $P_n'(x)$. Тогда уравнение $Q(x) = 0$, где $Q(x) = P_n(x)/T(x)$, имеет те же самые корни, что и $P_n(x) = 0$, но каждый из них имеет кратность 1.

Уравнение с действительными коэффициентами. Если уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_1 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$), то оно имеет также корень $\bar{x}_1 = \alpha - i\beta$ и притом той же кратности, что x_1. Поэтому число строго комплексных корней уравнения с действительными коэффициентами всегда четно. Следовательно, уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

В разложении на множители левой части уравнения $P_n(x) = 0$ с действительными коэффициентами наряду с множителем $(x - x_\gamma)^\beta$, где x_γ – комплексный корень, имеется также и множитель $(x - \bar{x}_\gamma)^\beta$. Объединив каждую такую пару множителей, получим разложение левой части на *действительные* множители:

$$P_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots$$
$$\ldots(x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2 + p_lx + q_l)^{\beta_l},$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{l} \beta_j.$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – действительные корни уравнения, а l пар комплексно сопряженных решений – корни квадратных множителей $x^2 + p_ix + q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, l$). Отсюда следует, что $(p_i/2)^2 - q_i < 0$. Так как каждый из квадратных множителей $x^2 + p_ix + q_i$ положителен при любых действительных значениях x, то справедливо следующее утверждение: если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ не имеет действительных корней, то при любых x левая часть имеет знак коэффициента a_0. Из этого следует утверждение: если в уравнении четной степени $a_n/a_0 < 0$, то уравнение имеет по меньшей мере два действительных корня разного знака.

Теорема Виета. Для уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

имеет место следующая зависимость между корнями уравнения (с учетом кратности) и его коэффициентами a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_ix_j = a_2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j,k \\ i<j<k}}^{n} x_ix_jx_k = -a_3,$$

. . . .

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Таким образом, если уравнение имеет целочисленные коэффициенты и целочисленное решение, то это решение является делителем свободного члена.

Теорема Виета для квадратного и кубического уравнений.

$$x^2 + px + q = 0: \qquad x^3 + rx^2 + sx + t = 0:$$

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = -r,$$

$$x_1x_2 = q, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = s,$$

$$x_1x_2x_3 = -t.$$

Теорема Штурма. При помощи теоремы Штурма можно определить число действительных корней уравнения с действительными коэффициентами. Прежде чем сформулировать теорему Штурма, опишем используемый здесь алгоритм. Отделим кратные корни заданного уравнения $P(x) = 0$, т. е. перейдем к уравнению $Q(x) = 0$, которое имеет те же корни, что и данное, но кратности 1. (Напомним, что $Q(x) = P(x)/T(x)$, где $T(x)$ – наибольший общий делитель $P(x)$ и $P'(x)$.) Затем составим последовательность $Q(x)$, $Q'(x)$, $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ следующим образом (*алгоритм Евклида*):

$$Q(x) = R_1(x)Q'(x) - Q_1(x),$$

$$Q'(x) = R_2(x)Q_1(x) - Q_2(x),$$

$$Q_1(x) = R_3(x)Q_2(x) - Q_3(x),$$

. . . .

$$Q_{m-2}(x) = R_m(x)Q_{m-1}(x) - Q_m(x),$$

$$Q_{m-1}(x) = R_{m+1}(x)Q_m(x)$$

(деление с остатком); Q_i – остатки от деления, взятые с противоположным знаком (см. 2.4.1.3). Так как в последовательности $Q(x)$, $Q'(x)$, $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ степени многочленов монотонно уменьшаются, то процесс деления оборвется после конечного числа шагов. Как известно, посредством такого деления с остатком отыскивается наибольший общий делитель исходных многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$. Но так как по предположению $Q(x)$ имеет только простые корни, то наибольший общий делитель $Q_m(x)$ многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ есть постоянная.

Положив в многочленах $x = \xi$ (ξ – действительное число), получим последовательность действительных чисел $Q(\xi)$, $Q'(\xi)$, $Q_1(\xi), \ldots, Q_m(\xi)$. Если в этой последовательности два соседних числа имеют различные знаки, то говорят о перемене знака. Пусть $w(\xi)$ означает число перемен знака, причем если некоторые из чисел $Q_i(\xi)$ – нули, то при подсчете числа перемен знаков их пропускают.

Теорема Штурма утверждает: если a и b $(a < b)$ не являются корнями $Q(x)$, то разность $w(a) - w(b)$ равна числу действительных корней $Q(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Чтобы найти число всех действительных корней уравнения, нужно найти промежуток, содержащий все корни, и применить к нему теорему Штурма. Для этого служит

Правило Ньютона. Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

$$a_0 > 0,$$

– уравнение n-й степени. Число g такое, что $P(x) > 0$, $P'(x) > 0, \ldots, P^{(n-1)}(x) > 0$ для всех $x > g$, есть верхняя граница действительных корней уравнения $P(x) = 0$. Число h есть нижняя граница действительных корней этого уравнения, если $(-h)$ есть верхняя граница действительных корней уравнения $P(-x) = 0$.

Пример. Найти число действительных корней уравнения $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$. Имеем

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \quad P'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$P''(x) = 12x^2 - 10, \quad P'''(x) = 24x.$$

Заметим, что $P'''(x) > 0$ для всех $x > g$, если $g \geqslant 0$. Далее, $P''(x) > 0$ и $P'(x) > 0$ для $g \geqslant 1$, но $P(1) < 0$. Так как $P(x) > 0$ при $x > 2$, то $g = 2$ есть верхняя граница всех действительных корней этого уравнения. Если этот метод применить к $P(-x) = x^4 - 5x^2 - 8x - 8$, то в качестве верхней границы получим 3, т. е. $h = -3$ есть нижняя граница всех действительных корней заданного уравнения. Следовательно, все действительные корни данного уравнения лежат в промежутке $[-3, 2]$; определим их число при помощи теоремы Штурма. Прежде всего заметим, что $P(x)$ не имеет кратных корней. Вычислим многочлены

$$P(x) = Q(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8,$$

$$P'(x) = Q'(x) = 4x^3 - 10x + 8,$$

$$Q_1(x) = 5x^2 - 12x + 16,$$

$$Q_2(x) = -3x + 284,$$

$$Q_3(x) = -1.$$

Так как в дальнейшем важен только знак этих многочленов, то для упрощения вычисления многочленов Q_i делимое или делитель можно умножать на постоянный положительный множитель. При $x = -3$ получаем последовательность 4, -70, 97, 293, -1; при $x = 2$ – последовательность 4, 20, 12, 278, -1. Таким образом, $w(-3) = 3$, $w(2) = 1$, и уравнение имеет $w(-3) - w(2) = 2$ действительных корня. Если вычислить еще, например, $w(0) = 2$, то мы найдем, что один корень находится в интервале $(-3, 0)$, другой – в интервале $(0, 2)$.

Правило знаков Декарта. Число положительных корней (подсчитанное с учетом их кратности) уравнения

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

не больше числа перемен знака в последова-

тельности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициентов $P(x)$ и может отличаться от него лишь на четное число. Если уравнение имеет только действительные корни, то число его положительных корней равно числу перемен знака в ряду коэффициентов.

Пример. Коэффициенты уравнения $x^4+2x^3-x^2+5x-1=0$ имеют знаки $+\ +\ -\ +\ -$, т. е. знак изменяется трижды. Согласно правилу Декарта, это уравнение имеет или три, или один положительный корень. Так как при замене x на $-x$ корни уравнения меняют знаки, а при замене x на $x+h$ их величины изменяются на h, то при помощи правила Декарта можно оценить число отрицательных корней, а также число корней, бо́льших h. В нашем примере заменой x на $-x$ получим, что $x^4-2x^3-x^2-5x-1=0$, т. е. уравнение имеет один отрицательный корень. Замена x на $x+1$ дает уравнение $x^4+6x^3+11x^2+13x+6=0$, т. е. все положительные корни нашего уравнения (число которых один или три) меньше 1.

В частности, каждое уравнение четной степени, первый и последний коэффициенты которого имеют различные знаки, имеет по меньшей мере один положительный и один отрицательный корни. Каждое уравнение нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень того же знака, что и $(-a_n/a_0)$; число его действительных корней другого знака — четное число (или нуль).

Правило Декарта позволяет также оценить число действительных корней уравнения $P(x)=0$ в промежутке $[a, b]$. Для этого надо применить правило знаков приведенным выше способом к уравнению $P(y)=0$, где $y=(a-x)/(x-b)$.

2.4.2.5. Система алгебраических уравнений. Если заданы m уравнений с n неизвестными и требуется найти последовательности из n чисел, которые одновременно удовлетворяют каждому из m уравнений, то мы имеем *систему уравнений*. Если все m уравнений линейны, то говорят о *системе линейных уравнений*; такие системы могут решаться методами линейной алгебры (см. 2.4.4.3). Проиллюстрируем на примерах методы решения для некоторых часто встречающихся типов нелинейных систем уравнений.

Примеры. 1) Даны уравнение 1-й степени и уравнение 2-й степени, каждое с двумя неизвестными:

$$x^2+y^2+3x-2y=4,$$
$$x+2y=5.$$

Линейное уравнение решается относительно одного из двух неизвестных ($x=5-2y$) и полученное выражение подставляется в квадратное уравнение. Получаем квадратное уравнение относительно одного неизвестного $y^2-\frac{28}{5}y+\frac{36}{5}=0$, которое решается, как обычно: $y_1=2$, $y_2=18/5$. Получаем множество решений заданной системы уравнений: $L=\{(1, 2); (-11/5, 18/5)\}$.

2) Даны два уравнения 2-й степени с двумя неизвестными:

$$x^2+y^2=5,$$
$$xy=2.$$

Так как $y=2/x$, то из первого уравнения получаем биквадратное уравнение $x^4-5x^2+4=0$, которое посредством замены $x^2=t$ переводим в квадратное уравнение относительно t. Из множества решений квадратного уравнения $t_1=1$, $t_2=4$ находим корни биквадратного уравнения, а затем (вспомнив, что $y=2/x$) и множество решений исходной системы уравнений:

$$L=\{(1, 2); (-1, -2); (2, 1); (-2, -1)\}.$$

3) Даны два уравнения 2-й степени с двумя неизвестными:

$$x^2+y^2+3x-2y=17,$$
$$x^2+y^2+x-y=12.$$

Вычитанием уравнений получим, что $2x-y=5$. Если от заданной системы уравнений перейти к эквивалентной, содержащей любое из исходных уравнений и полученное линейное уравнение, то будем иметь случай, рассмотренный в примере 1). Для исходной системы уравнений получаем множество решений $\{(3, 1); (6/5, 13/3)\}$.

4) На плоскости xOy требуется найти уравнение окружности, проходящей через три точки, например (26, 4), (9, 21), (17, 17); получаем три уравнения 2-й степени с тремя неизвестными:

$$(26-c)^2+(4-d)^2=r^2,$$
$$(9-c)^2+(21-d)^2=r^2,$$
$$(17-c)^2+(17-d)^2=r^2,$$

где c, d — неизвестные координаты центра, r — неизвестный радиус. Взяв любые два из этих уравнений и вычитая одно из другого, получим линейное уравнение с двумя неизвестными. Вычитание второго уравнения из первого дает $-c+d+5=0$, вычитание третьего из первого дает $-9c+13d+57=0$. Полученная система имеет решение $c=2$, $d=-3$. Подставив эти значения в одно из исходных уравнений, получим $r=25$.

2.4.3. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общее понятие. Примеры. Уравнение, в котором неизвестное входит в аргумент трансцендентных функций, называется *трансцендентным уравнением* (см. 2.4.2.3). К трансцендентным уравнениям принадлежат показательные уравнения, логарифмические уравнения и тригонометрические уравнения. В общем случае трансцендентные уравнения могут быть решены только при помощи приближенных методов. В некоторых особых случаях трансцендентные уравнения можно все же свести к алгебраическим уравнениям.

Показательные уравнения (приводимые к алгебраическим).

1. Неизвестное находится только в показателях степеней выражений, над которыми не производится операций сложения и вычитания. Тогда логарифмирование общего уравнения (с произвольным основанием) приводит к цели.

Пример. $3^x=4^{x-2}\cdot 2^x$; $\quad x\log 3=(x-2)\log 4+x\log 2$, откуда

$$x=\frac{2\log 4}{\log 4-\log 3+\log 2}=\frac{\log 16}{\log(8/3)}.$$

2. Неизвестное x входит только в показатели степени выражений, основания которых являются целыми степенями одного и того же числа k. Тогда заменой неизвестного $y=k^x$ можно получить уравнение, алгебраическое относительно y.

Пример. $2^{x-1}=8^{x-2}-4^{x-2}$. Основания выражений, содержащих x, суть целые степени 2; заменой неизвестного $y=2^x$ переводим исходное уравнение в уравнение $y^3-4y^2-32y=0$ с решениями $y_1=8$, $y_2=-4$, $y_3=0$. Отсюда получаем, что $x_1=3$; других действительных корней не существует.

Трансцендентные уравнения, содержащие неизвестное только в аргументе гиперболических функций, можно привести к уравнениям рассмотренного вида, если гиперболические функции выразить через показательные.

Пример. $3\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$, $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 3$, $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$. Заменой переменного $y = e^x$ получим уравнение $y^2 - 9y + 2 = 0$, алгебраическое относительно y, с решениями $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$, откуда следует, что $x_1 = \ln y_1 \approx \approx 2{,}1716$ и $x_2 = \ln y_2 \approx -1{,}4784$.

Логарифмические уравнения (приводимые к алгебраическим).

1. Пусть неизвестное x входит только в аргумент логарифма или уравнение содержит логарифмы от одного и того же выражения $A(x)$, где $A(x)$ – многочлен. Тогда замена переменного вида $y = \log_b A(x)$ приводит к алгебраическому относительно y уравнению. Из решений этого уравнения получаем решения исходного уравнения при помощи таблицы логарифмов.

Пример. $4 - \lg\left(\frac{5}{2}x\right) = 3\sqrt{\lg\left(\frac{5}{2}x\right)}$. Полагая $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5}{2}x\right)}$, получаем $4 - y^2 = 3y$ с множеством решений $\{1, -4\}$. Из $1 = \sqrt{\lg\left(\frac{5}{2}x\right)}$ следует $\frac{5}{2}x = 10$, т. е. $x = 4$; решение $y_2 = -4$ для исходного уравнения – постороннее.

2. Пусть неизвестное x входит только в аргумент логарифмов одного и того же основания a, и все уравнение есть линейная комбинация выражений вида $m_i \log_a P_i(x)$ (m_i – рациональные числа, P_i – многочлены относительно x). Тогда уравнение можно привести к виду $\log_a Q(x) = A$, где $Q(x)$ – многочлен, или, потенцируя, к алгебраическому уравнению $Q(x) - a^A = 0$.

Пример. $2\log_5(3x - 1) - \log_5(12x + 1) = 0$, $\log_5 \frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 0 = \log_5 1$, $\frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что $L = \{2\}$ есть множество решений исходного уравнения.

3. Пусть неизвестное x входит только в аргумент логарифма, и уравнение содержит только логарифмы с одним и тем же аргументом, но с различными основаниями. Тогда в некоторых случаях уравнение можно решить после приведения логарифмов к одному основанию и использования свойств логарифмов.

Пример. $\log_2(x-1) + \log_3(x-1) + \log_4(x-1) = 3 + \log_3 4$, $\frac{\log_4(x-1)}{\log_4 2} + \frac{\log_4(x-1)}{\log_4 3} + \log_4(x-1) = 3 + \log_3 4$, $\log_4(x-1)(\log_2 4 + \log_3 4 + 1) = 3 + \log_3 4$, $\log_4(x-1) = 1$, $x = 5$.

Тригонометрические уравнения (приводимые к алгебраическим). Пусть неизвестное x или $nx + a$ (n – целое) входит только в аргументы тригонометрических функций. Тогда, применяя тригонометрические формулы, приводим уравнение к виду, содержащему лишь одну тригонометрическую функцию аргумента x. Эту функцию полагаем равной y и решаем алгебраическое относительно y уравнение. Решив его, определяем (в общем случае при помощи таблиц) неизвестное x. При этом, ввиду периодичности тригонометрических функций, следует принимать во внимание многозначность решения. При переходе от данного уравнения к уравнению, содержащему только одну тригонометрическую функцию относительно x, иногда бывают необходимы неэквивалентные преобразования (например, возведение в квадрат при наличии радикалов). Поэтому необходимо сделать проверку, чтобы исключить появившиеся посторонние решения.

Пример. $4\sin x = 4\cos^2 x - 1$; $4\sin x = 4(1 - \sin^2 x) - 1$; после замены переменной $y = \sin x$ получим $4y^2 + 4y - 3 = 0$ с решениями $y_1 = 1/2$, $y_2 = -3/2$. Решение y_2 не дает действительных решений заданного уравнения ($|\sin x| \leqslant 1$); y_1 дает $x = \pi/6 + 2k\pi$ и $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

2.4.4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.4.4.1. Векторные пространства.

2.4.4.1.1. Понятие векторного пространства. Непустое множество V, для элементов которого определено сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$ на действительные числа, называется действительным *векторным пространством* $V = [V, +, \cdot]$ или *линейным пространством**), а элементы V называются *векторами*, если выполнены следующие аксиомы:

1) Для любых двух элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ существует один элемент $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ – сумма $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (внутренний закон композиции).

2) *Ассоциативность*. Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V$ справедливо равенство $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

3) *Коммутативность*. Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

4) Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ существует $\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5) Для любого $\mathbf{a} \in V$ и любого действительного числа α имеется элемент $\alpha \cdot \mathbf{a} \in V$ – произведение элемента $\mathbf{a}$ на число α (внешний закон композиции)**).

6) *Ассоциативность*. Для любого $\mathbf{a} \in V$ и любых действительных чисел α, β справедливо равенство $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$.

7) Для любого $\mathbf{a} \in V$ справедливо равенство $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

8) *Дистрибутивность*. Для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ и любых действительных чисел α, β справедливы равенства $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ и $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Замечание. При определении умножения вместо поля действительных чисел можно положить в основу другие поля K. Тогда говорят о *векторном пространстве над полем* K; в частности, о «действительном векторном пространстве» или о «комплексном векторном пространстве», если K есть соответственно поле действительных или поле комплексных чисел.

Примеры. 1) Векторное пространство упорядоченных пар (x, y) действительных чисел x, y с законами композиции

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

*) Векторными пространствами иногда называются только линейные пространства, имеющие конечный базис (см. 2.4.4.1.4).

**) Элемент $\alpha \cdot \mathbf{a}$ обычно обозначается $\alpha\mathbf{a}$.

2) Векторное пространство конечных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел с законами композиции

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

3) Векторное пространство многочленов $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ с законами композиции

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i \quad (n \geqslant m),$$
$$\alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i.$$

4) Векторное пространство функций, непрерывных на замкнутом отрезке, с законами композиции $[f+g](x) = f(x) + g(x)$, $[\alpha f](x) = \alpha \cdot f(x)$.

5) Векторное пространство геометрических векторов на плоскости, причем сложение и умножение на действительное число определены обычным образом (см. 4.2.1).

Правила действий с элементами векторных пространств. Из аксиом 1)–8) следует, что действия с элементами векторного пространства производятся, в сущности, так же, как и с числами; по отношению к сложению и умножению на действительные числа справедливы, грубо говоря, «обычные» правила, в частности:

1) Существует, и притом только один, *нейтральный* по отношению к сложению элемент $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ для любых $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{0}$ называется *нулевым вектором*.

2) Для каждого вектора $\mathbf{a} \in V$ существует единственный *обратный* по отношению к сложению элемент $(-\mathbf{a}) \in V$ такой, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$; вектор $(-\mathbf{a})$ называется *противоположным* вектору $\mathbf{a}$.

3) Уравнение $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, разрешимо единственным образом; решение $\mathbf{x} \in V$ называется *разностью* векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, пишут: $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. В частности, $\mathbf{0} - \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

4) Законы ассоциативности и коммутативности сложения, так же как и дистрибутивные законы, методом полной индукции можно обобщить на любое конечное число слагаемых.

5) Для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ и действительных чисел α, β выполняются соотношения:

а) $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$; б) $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$;

в) $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$; г) $-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

д) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$; е) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$,

ж) $(-\alpha)\mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a})$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$;

з) $\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$, $\quad (\alpha - \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{a}$.

2.4.4.1.2. Векторные подпространства. Пусть V – векторное пространство и U – непустое подмножество в V. Если U по отношению к тем же операциям сложения и умножения само является векторным пространством, то U называется *векторным подпространством* (пространства) V. Чтобы проверить, является ли U векторным подпространством V, не требуется доказывать истинность всех аксиом, так как имеет место *критерий*: U $(\varnothing \neq U \subseteq V)$ есть векторное подпространство V тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ и любого действительного α справедливы включения $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$ и $\alpha\mathbf{a} \in U$ (замкнутость U по отношению к операциям $+$ и $\cdot$).

Примеры. 1) Всякое векторное пространство имеет два тривиальных векторных подпространства, а именно: само себя и то, которое содержит нулевой вектор в качестве единственного элемента.

2) В векторном пространстве конечных последовательностей действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подмножество, содержащее все такие последовательности, что $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$ (c_i – фиксированные действительные числа), образует векторное подпространство по отношению к операциям сложения и умножения, определенным для последовательностей.

3) В векторном пространстве многочленов подмножество всех многочленов степени, меньшей n, образует векторное подпространство по отношению к операциям сложения и умножения, определенным для многочленов.

4) Пусть S – непустое множество векторного пространства. Всякое выражение вида $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{a}_r$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – произвольные действительные и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in S$, называется *линейной комбинацией* элементов S. Множество всех линейных комбинаций векторов из S образует векторное подпространство.

5) Если U_1 и U_2 – векторные подпространства одного и того же векторного пространства V, то их пересечение $U_1 \cap U_2$ также есть векторное подпространство пространства V. То же самое справедливо и для пересечения большего числа подпространств.

6) Пусть S – произвольное множество векторов векторного пространства V. Можно рассмотреть пересечение всех векторных подпространств пространства V, содержащих S. Это снова есть векторное подпространство, а именно наименьшее векторное подпространство, содержащее S. Его называют *линейной оболочкой* множества S и пишут: $\mathscr{L}(S) = \bigcap \{U_\sigma\colon U_\sigma$ – векторное подпространство V и $S \subseteq U_\sigma\}$.

Если $S = \varnothing$, то $\mathscr{L}(S)$ есть векторное подпространство из V, содержащее только нулевой вектор.

Если $S \neq \varnothing$, то $\mathscr{L}(S)$ наряду с S содержит в качестве векторного пространства всякую линейную комбинацию векторов из S. Так как множество всех линейных комбинаций S само образует векторное подпространство из V, содержащее S, а $\mathscr{L}(S)$ есть наименьшее векторное подпространство, обладающее этим свойством, то $\mathscr{L}(S)$ состоит как раз из всех линейных комбинаций векторов из S:

$$\mathscr{L}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\mathbf{a}_i;\ \lambda_i \in \mathbf{R};\ \mathbf{a}_i \in S;\ r \text{ – натуральное число} \right\}.$$

Из $S_1 \subseteq S_2$ следует $\mathscr{L}_1(S) \subseteq \mathscr{L}(S_2)$. Если U есть векторное подпространство из V, то $\mathscr{L}(U) = U$, и наоборот.

Если векторное подпространство U пространства V можно представить как линейную оболочку множества S векторов из V, то S называется *системой, порождающей* U.

7) В то время как для двух векторных подпространств U_1 и U_2 пространства V их пересечение вновь является векторным подпространством, для их объединения это в общем случае не так. Наименьшее векторное подпространство из V, содержащее $U_1 \cup U_2$, т. е. $\mathscr{L}(U_1 \cup U_2)$, называют *суммой* $U_1 + U_2$ (или *композицией*) U_1 и U_2. Оно состоит из всех векторов $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in U_1$, $\mathbf{x}_2 \in U_2$.

2.4.4.1.3. Линейная зависимость. Непустое конечное множество $S = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ элементов векторного пространства V называется *линейно зависимым*, если существуют действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Если это соотношение имеет место *только* при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, то множество S называется *линейно независимым*. Вектор $\mathbf{x} \in V$ называется *линейно зависимым* от S, когда он является линейной комбинацией векторов из S, т. е. если $\mathbf{x} \in \mathscr{L}(S)$. В случае, если $\mathbf{x} \notin \mathscr{L}(S)$, вектор $\mathbf{x}$ называется *линейно независимым* от S.

Примеры. 1) Вектор $\mathbf{x} = (3, -7, 0)$ векторного пространства упорядоченных троек действительных чисел линейно зависит от множества

$$S = \{(1, -1, 0); (0, 1, 1); (3, 0, 5); (2, -1, 3)\},$$

так как, например, $\mathbf{x} = 2(1, -1, 0) - 3(3, 0, 5) + 5(2, -1, 3)$, т. е. $\mathbf{x} \in \mathscr{L}(S)$.

2) Вектор $\mathbf{x} = (3, -7, 0)$ не является линейно зависимым от множества $S = \{(0, 1, 1); (0, -2, 5)\}$, так как каждая линейная комбинация векторов из S дает, очевидно, вектор, первая координата которого равна нулю, т. е. вектор $\mathbf{x}$ линейно независим от S.

3) Нулевой вектор линейно зависит от каждого множества S, так как $\mathbf{0} \in \mathscr{L}(S)$ для любого S.

Множество S векторов из V называется *линейно зависимым*, если существует по крайней мере один вектор $\mathbf{x} \in S$, который линейно зависит от $S \setminus \{\mathbf{x}\}$. Если любой вектор $\mathbf{x} \in S$ линейно не зависит от $S \setminus \{\mathbf{x}\}$, то S называется *линейно независимым*.

Примечание. В случае, когда S – непустое конечное множество, это определение эквивалентно определению, данному в начале пункта.

Из этого следует, в частности, что пустое множество $S = \varnothing$ линейно независимо. Множество $S = \{\mathbf{0}\}$, содержащее только нулевой вектор $\mathbf{0}$, линейно зависимо, так как

$$\mathbf{0} \in \mathscr{L}(S \setminus \{\mathbf{0}\}) = \mathscr{L}(\varnothing) = \{\mathbf{0}\}.$$

Из определения следует: каждое множество S, содержащее линейно зависимое подмножество S', само линейно зависимо. Действительно, если S' линейно зависимо, то по крайней мере для одного $\mathbf{x} \in S'$ справедливо $\mathbf{x} \in \mathscr{L}(S' \setminus \{\mathbf{x}\})$ и вследствие $\mathscr{L}(S' \setminus \{\mathbf{x}\}) \subseteq \mathscr{L}(S \setminus \{\mathbf{x}\})$ также и $\mathbf{x} \in \mathscr{L}(S \setminus \{\mathbf{x}\})$.

Справедливо утверждение: каждое подмножество S' линейно независимого множества S само является линейно независимым. Если $S' = \varnothing$, то S' линейно независимо, а в случае $S' \neq \varnothing$ утверждение следует из предыдущего утверждения.

В частности, любое конечное подмножество S' линейно независимого множества S само линейно независимо. И наоборот, из линейной независимости всех конечных подмножеств S' множества S следует линейная независимость S.

Примеры. 1) В векторном пространстве упорядоченных пар действительных чисел множество $\{(3, 0); (-1, 2); (7, 1)\}$ является линейно зависимым, так как справедливо равенство $5(3, 0) + (-1, 2) - 2(7, 1) = (0, 0)$.

2) В векторном пространстве многочленов множество $S = \{x^{3n},\ n$ – натуральное$\}$ линейно независимо ввиду того, что каждое конечное подмножество $\{x^{3\nu_1}, x^{3\nu_2}, \ldots, x^{3\nu_n}\}$ элементов из S линейно независимо, так как из предположения $\lambda_1 x^{3\nu_1} + \lambda_2 x^{3\nu_2} + \ldots + \lambda_k x^{3\nu_k} = 0$ (для любого x) следует, что все коэффициенты λ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ равны нулю.

3) В векторном пространстве многочленов множество

$$\{x^3 + 2x^2;\ 2x^3 + 2x^2 - 6x + 4;\ -x^2 + 3x;\ x^2 - 1\}$$

является линейно зависимым множеством векторов, так как, например,

$$2(x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 2x^2 - 6x + 4) - 2(-x^2 + 3x) - 4(x^2 - 1) = 0.$$

4) В векторном пространстве комплексных чисел над полем действительных чисел множество $\{1, i\}$ является линейно независимым множеством, так как соотношение $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$ выполняется с действительными λ_1 и λ_2 только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В векторном пространстве комплексных чисел над полем комплексных чисел множество $\{1, i\}$ линейно зависимо: $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$ при $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -1$.

Другие свойства линейной зависимости.

1. Если S линейно независимо, а $S \bigcup \{\mathbf{x}\}$ линейно зависимо, то $\mathbf{x}$ есть линейная комбинация векторов из S.

2. Если S линейно независимо, $\mathbf{x}$ линейно независимо от S, то $S \bigcup \{\mathbf{x}\}$ также линейно независимо.

3. Если S линейно независимо, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in S$, то из соотношения

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_k \mathbf{a}_k$$

следует, что $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_k = \mu_k$, т. е. к линейно независимому S всегда можно применить «принцип приравнивания коэффициентов».

Если S линейно зависимо, то это уже не так; например, для $\mathbf{a}_1 = (3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 1)$ имеем

$$7\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

2.4.4.1.4. Базис. Размерность. Если B – система векторов, порождающая векторное пространство V, то каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно представить в виде линейной комбинации векторов из B. Если, кроме того, система B линейно независима, то представление $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации векторов из B определено однозначно. Такая линейно независимая порождающая система B называется *базисом* пространства V.

Итак, если $V = [V, +, \cdot]$ есть векторное пространство, то каждое подмножество $B \subseteq V$ такое, что 1) $\mathscr{L}(B) = V$ и 2) B линейно независимо, называется *базисом* пространства V.

Примеры. 1) В векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ всех упорядоченных n-последовательностей действительных чисел множество $B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0);\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \ldots$ $\ldots;\ \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$ есть базис; он называется *каноническим базисом* пространства $\mathbf{R}^n$.

2) В векторном пространстве всех многочленов множество $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$ есть базис, так как B линейно независимо и каждый многочлен $p(x)$ можно записать в виде линейной комбинации элементов из B:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

3) В векторном пространстве всех решений уравнения $3x + 4y - z = 0$, например, множество $B = \{(1, 0, 3); (0, 1, 4)\}$ является базисом, так как B линейно независимо и каждое решение уравнения можно представить в виде $\mathbf{x} = (x, y, z) = \lambda_1(1, 0, 3) + \lambda_2(0, 1, 4)$ (см. 2.4.4.3).

4) Векторное пространство, состоящее только из нулевого вектора $\mathbf{0}$, имеет $B = \varnothing$ в качестве (единственного) базиса вследствие того, что $\mathscr{L}(\varnothing) = \{\mathbf{0}\}$, и линейной независимости $\varnothing$.

Справедливы следующие утверждения о существовании базиса и его свойствах.

1. Каждое векторное пространство имеет (по меньшей мере один) базис. Каждая порождающая система векторного пространства содержит базис. Из этого, в частности, следует: если V – векторное пространство, порождаемое конечной системой, т. е. имеет место равенство $V = \mathscr{L}(S)$, где S – конечное множество, то V имеет конечный базис.

2. Каждый базис B векторного пространства V есть минимальная порождающая система V, т. е. (а) $\mathscr{L}(B) = V$; (б) для всех B' таких, что $B' \subset B$, справедливо соотношение $\mathscr{L}(B') \neq V$. Наоборот,

каждое подмножество $B \subseteq V$, удовлетворяющее условиям (а) и (б), является базисом V.

3. Каждый базис B векторного пространства V есть максимальное линейно независимое подмножество пространства V в следующем смысле: (а) множество B линейно независимо; (б) для всех B' таких, что множество $B' \supset B$, B' линейно зависимо. Наоборот, каждое подмножество $B \subseteq V$, удовлетворяющее условиям (а) и (б), является базисом V.

4. Пусть B – базис векторного пространства V, и пусть S – линейно независимое подмножество, содержащее m векторов из V. Тогда в B всегда можно найти такое подмножество B^*, также состоящее из m векторов, что множество $(B \backslash B^*) \bigcup S$, в котором векторы из B^* заменены на векторы из S, снова будет базисом V. Другими словами, это означает, что некоторое подмножество из m векторов базиса можно заменить на заданное линейно независимое подмножество, состоящее из m векторов, без потери при этом свойства базиса. Таким образом, всегда можно построить базис, содержащий заданную линейно независимую систему векторов.

При помощи утверждений 2–4 можно построить базисы векторного пространства V, порождаемого конечной системой. Для этого или «сокращают» порождающую систему V последовательным отбрасыванием векторов, которые являются линейной комбинацией остальных векторов, до тех пор, пока «сокращенная» порождающая система не станет линейно независимой, или добавляют к линейно независимому множеству T^m вектор $\mathbf{x}_{m+1}$, который не является линейной комбинацией векторов из T^m, затем к $T^{m+1} = T^m \bigcup \{\mathbf{x}_{m+1}\}$ добавляют вектор $\mathbf{x}_{m+2}$, не являющийся линейной комбинацией векторов T^{m+1}, и т. д. до тех пор, пока «расширенное» линейно независимое множество T^n $(n \geq m)$ не станет порождающей системой V. Предположение, что «V порождается конечной системой», обеспечивает обрыв обоих процессов после конечного числа шагов. Векторное пространство, порождаемое конечной системой, называется *конечномерным*.

В частности, все базисы конечномерного векторного пространства состоят из одинакового количества векторов; число базисных векторов, одинаковое для всех базисов векторного пространства, называется его *размерностью* и обозначается $\dim V$. Векторное пространство, содержащее только нулевой вектор, имеет размерность нуль. Если векторное пространство не порождается конечной системой, то оно называется *бесконечномерным*.

Примеры. 1) Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ упорядоченных n-последовательностей действительных чисел имеет размерность n ($\dim \mathbf{R}^n = n$), так как канонический базис, а следовательно, и любой базис $\mathbf{R}^n$ содержат n векторов.

2) Векторное пространство перемещений на плоскости двумерно, так как каждые два непараллельных вектора образуют базис этого векторного пространства.

3) Векторное пространство многочленов бесконечномерно.

Если векторное пространство V имеет размерность $n \geq 1$, то каждый базис V есть линейно независимое множество из n векторов. И наоборот, каждое линейно независимое множество, содержащее n векторов из V, есть базис V. Это дает удобный для практических исследований *критерий базиса*, если известна размерность векторного пространства.

Соотношение $\dim V = n \geq 1$ выполняется тогда и только тогда, когда в V существует по крайней мере одно линейно независимое множество, состоящее из n векторов, в то время как все множества, содержащие $n+1$ векторов, линейно зависимы.

Пусть V – конечномерное векторное пространство, а U, U_1 и U_2 – векторные подпространства V. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\dim U \leq \dim V$ и $\dim U = \dim V$ только тогда, когда $U = V$;

2) из $U_1 \subseteq U_2$ и $\dim U_1 = \dim U_2$ следует $U_1 = U_2$;

3) $\dim (U_1 \bigcap U_2) + \dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Координаты. Пусть V – n-мерное пространство $(n \geq 1)$ и $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – базис V. Вследствие 1-го свойства базиса ($\mathscr{L}(B) = V$) каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно представить как линейную комбинацию векторов из B: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$, и вследствие линейной независимости B это представление $\mathbf{x}$ единственно (с точностью до порядка слагаемых). Если базисные векторы в B каким-нибудь образом упорядочить, то каждому вектору $\mathbf{x}$ можно взаимно однозначно поставить в соответствие упорядоченную n-последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел – его координаты.

Пусть V – n-мерное векторное пространство $(n \geq 1)$ и $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – базис V, базисные векторы которого $\mathbf{a}_i$ стоят в фиксированном порядке*). Если $\mathbf{x} \in V$, то однозначно определенные коэффициенты в представлении $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{a}_i$ в виде линейной комбинации векторов B называют *координатами* $\mathbf{x}$ *по отношению к* B и пишут: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$.

Вместо векторов V можно производить вычисления с сопоставленными им по отношению к B упорядоченными n-последовательностями координат в соответствии со следующими утверждениями. Упорядоченная n-последовательность координат, поставленная в соответствие сумме $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по отношению к B, получается как сумма упорядоченных n-последовательностей координат, сопоставленных по отношению к B векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Упорядоченная n-последовательность координат вектора $\alpha\mathbf{x}$ по отношению к B равна упорядоченной n-последовательности координат вектора $\mathbf{x}$ по отношению к B, умноженной на α.

Вследствие этого взаимно однозначное соответствие между n-мерным векторным пространством V и векторным пространством упорядоченных n-последовательностей действительных чисел является изоморфизмом. Справедливо следующее утверждение: каждое n-мерное векторное пространство изоморфно векторному пространству упорядоченных n-последовательностей действительных чисел.

Преобразование координат. При переходе от одного базиса $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

*) Всюду в дальнейшем будем понимать базис именно так.

векторного пространства V к другому базису $B^* = \{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$, конечно, изменяются координаты вектора $\mathbf{x} \in V$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)_{B^*}$. Если базисные векторы $\mathbf{a}_i^*$ базиса B^* связаны с базисными векторами $\mathbf{a}_i$ базиса B уравнениями $\mathbf{a}_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{a}_k\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, то для координат x_i и x_i^* одного и того же вектора $\mathbf{x}$ имеет место следующее соотношение: $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Матричный способ записи:

$$\text{Если} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \\ \mathbf{a}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \text{ то } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix},$$

где A есть матрица из элементов a_{ik}, а A^T – матрица, транспонированная по отношению к A. Говорят, что координаты $\mathbf{x}$ преобразуются *контраградиентно* по отношению к базисным векторам.

Пример. Пусть $\mathbf{R}^3$ есть векторное пространство упорядоченных троек действительных чисел, $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – канонический базис $\mathbf{R}^3$ и $B^* = \{\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)\}$ – другой базис $\mathbf{R}^3$. Тогда вектор $\mathbf{x} = (3, -1, 2)_B$ имеет по отношению к B^* координаты $\mathbf{x} = (2, -3, 4)_{B^*}$, так как $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1$, т. е. $x_1 = x_1^* + x_2^* + x_3^*$, $x_2 = x_1^* + x_2^*$, $x_3 = x_1^*$, откуда следует: $x_1^* = x_3 = 2$, $x_2^* = x_2 - x_3 = -3$, $x_3^* = x_1 - x_2 = 4$.

2.4.4.1.5. Евклидовы векторные пространства. Чтобы иметь возможность ввести в векторном пространстве понятия «длина вектора» и «угол между двумя векторами», его следует снабдить дополнительной структурой – метрикой. Это делается при помощи скалярного произведения.

Пусть $V = [V, +, \cdot]$ – действительное векторное пространство. Функция φ: $V \times V \to \mathbf{R}$, которая каждым двум векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V ставит в соответствие действительное число, называется *скалярным произведением* в V, если она обладает следующими свойствами:

1) дистрибутивностью: $\varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;

2) коммутативностью: $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3) однородностью: $\varphi(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (α – действительное);

4) положительной определенностью: $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Действительное векторное пространство $V = [V, +, \cdot, \varphi]$ с таким скалярным произведением φ называется *евклидовым векторным пространством*. Вместо $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ часто пишут $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Примеры. 1) В векторном пространстве V^2 упорядоченных пар чисел (x, y) скалярное произведение зададим, например, так:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 9x_1x_2 - 6x_1y_2 - 6y_1x_2 + 5y_1y_2.$$

Выполнение свойств 1) – 3) проверяют вычислением, а свойство 4) справедливо вследствие того, что

$$((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = 9x_1^2 - 12x_1y_1 + 5y_1^2 = (3x_1 - 2y_1)^2 + y_1^2 > 0$$

для всех $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$.

2) В векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ упорядоченных n-последовательностей действительных чисел скалярное произведение определим так:

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

3) В векторном пространстве всех непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций скалярное произведение определим соотношением $(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt$.

Модуль вектора. Пусть V – евклидово векторное пространство. Под *модулем* (*нормой*, *длиной*) $\|\mathbf{x}\|$ вектора $\mathbf{x} \in V$ понимают неотрицательное действительное число $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Вектор с модулем, равным 1, называется *единичным* вектором; для каждого вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ вектор $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ единичный.

Из свойств скалярного произведения вытекают следующие свойства модуля: для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и всех действительных чисел α

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$;

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (*неравенство треугольника*).

Если заменить в последней формуле $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, а затем $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, то получим, что $|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Знак равенства возможен только тогда, когда $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$, $\alpha \geqslant 0$.

Имеет место неравенство *Коши – Буняковского*: $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. Знак равенства возможен тогда и только тогда, когда множество $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ линейно зависимо.

На основании неравенства Коши – Буняковского *величину угла* между векторами $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ можно определить как действительное число φ, которое удовлетворяет двум условиям:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \text{ и } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Ортогональность. Два вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ евклидова векторного пространства V называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. В частности, нулевой вектор $\mathbf{0}$ ортогонален каждому вектору из V. m-последовательность $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ векторов $\mathbf{x}_i$ евклидова векторного пространства называется *ортогональной системой*, если она не содержит нулевого вектора и векторы $\mathbf{x}_i$ попарно ортогональны, т. е. $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ для любых i и j $(i \neq j)$; она называется *ортонормированной системой*, если, кроме того, все векторы $\mathbf{x}_i$ являются единичными, т. е. если

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Ортонормированная система, которая одновременно является базисом векторного пространства, называется *ортонормированным базисом*.

Свойства ортогональной системы.

1. Каждая ортогональная система линейно независима.

2. Если координаты двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ заданы относительно ортонормированного базиса B: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_B$, то их скалярное произведение равно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

3. Каждое евклидово векторное пространство конечной размерности имеет ортонормированный базис.

Такой ортонормированный базис можно получить *методом ортогонализации (Грама – Шмидта)* из любого базиса евклидова векторного пространства конечной размерности V путем «последовательной ортогонализации». Если $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – базис V, то из него получают ортогональную систему $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, где

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \text{ и } \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \mathbf{b}_i \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Тогда $\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_n}{\|\mathbf{b}_n\|} \right\}$ – ортонормированный базис V.

Пример. $\{(-1, 2, 3, 0); (0, 1, 2, 1); (2, -1, -1, 1)\}$ – базис векторного подпространства U векторного пространства упорядоченных четверок действительных чисел. Скалярное произведение определено соотношением $((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Тогда методом ортогонализации получим ортогональную систему $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 3, 0),$$

$$\mathbf{b}_2 = (0, 1, 2, 1) - \frac{4}{7}(-1, 2, 3, 0) = \frac{1}{7}(4, -1, 2, 7),$$

$$\mathbf{b}_3 = (2, -1, -1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 2, 3, 0) - \frac{1}{5}(4, -1, 2, 7) = = \frac{1}{10}(7, 2, 1, -4).$$

Если перейти, наконец, от $\mathbf{b}_i$ к соответствующим единичным векторам, то получим искомый ортонормированный базис векторного подпространства U в следующем виде:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 2, 3, 0); \frac{1}{\sqrt{70}}(4, -1, 2, 7); \frac{1}{\sqrt{70}}(7, 2, 1, -4) \right\}.$$

Ортогональные векторные подпространства. Два векторных подпространства U_1, U_2 евклидова векторного пространства V называются *взаимно ортогональными* (обозначается: $U_1 \perp U_2$), когда для любого $\mathbf{x} \in U_1$ и любого $\mathbf{y} \in U_2$ справедливо равенство $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Если U – векторное подпространство пространства V, то множество $U^\perp = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V \text{ и } (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{u} \in U\}$ называется *ортогональным дополнением* U в V. Ортогональное дополнение $U^\perp$ с определенными в V операциями вновь является векторным подпространством $U^\perp = [U^\perp, +, \cdot]$, при этом выполняется соотношение $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Если, кроме того, V – пространство конечной размерности, то $(U^\perp)^\perp = U$ и $U + U^\perp = V$, откуда следует, что $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$. Так как $U + U^\perp = V$, то каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u} \in U$, а $\mathbf{v} \in U^\perp$; учитывая, что $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$, разложение вектора $\mathbf{x}$ в сумму такого вида единственно. Вектор $\mathbf{u}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на U, а $\mathbf{v}$ – *ортогональной составляющей* вектора $\mathbf{x}$, *перпендикулярной* U. Для всех $\mathbf{a} \in U$ справедливо соотношение $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, т. е. перпендикуляр $\mathbf{v}$ имеет известное свойство «кратчайшего расстояния».

2.4.4.1.6. Гильбертово пространство. Многое из сказанного в 2.4.4.1.5 о евклидовом векторном пространстве остается справедливым и в том случае, если это пространство бесконечномерно, хотя некоторые утверждения, в которых упоминается размерность n, нуждаются в уточнении. Наиболее важным обобщением понятия евклидова пространства является *гильбертово пространство* H, определяемое следующими свойствами:

1) H – бесконечномерное векторное пространство.

2) Для векторов $x, y \in H$ определено скалярное произведение (x, y), для которого справедливы свойства 1) – 4) скалярного произведения евклидова пространства. Величина $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ называется *нормой* элемента $x \in H$.

3) Для любой последовательности векторов $x_n \in H (n = 1, 2, \ldots)$, для которой $\lim\limits_{n, m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$, существует вектор $x \in H$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0$ (свойство *полноты*).

Бесконечная последовательность векторов в H называется *линейно независимой*, если любое конечное подмножество этой последовательности линейно независимо.

При помощи процесса ортогонализации для любой линейно независимой последовательности можно построить ортонормированную систему, эквивалентную исходной последовательности в том смысле, что линейные оболочки подмножеств их первых n элементов совпадают для любого n.

Если $y_1, y_2, \ldots$ – ортонормированная система, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. При этом $\left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ (теорема Пифагора в гильбертовом пространстве).

В любом бесконечномерном подпространстве $H_1 \subset H$ (в том числе и в самом H) существует ортонормированный базис $B(y_1, y_2, \ldots)$, т. е. такой ортонормированный набор векторов, что для произвольного элемента $x \in H_1$ справедливо разложение $x = \sum\limits_{y_i \in B} (x, y_i) y_i$, где ряд сходится по норме.

Хорошо известным примером гильбертова пространства l^2, элементами которого являются последовательности действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится. Скалярное произведение элементов $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ определяется как $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Ортонормированным базисом в l^2 может служить последовательность векторов $e_1 = (1, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots, e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots), \ldots$

2.4.4.2. Матрицы и определители.

2.4.4.2.1. Понятие матрицы. Если $m \cdot n$ выражений расставлены в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

то говорят о *матрице* размера $m \times n$, или сокращенно об $m \times n$-матрице; выражения a_{ik} называются *элементами* матрицы. Положение элемента в таблице характеризуется двойным индексом; первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент (нумерация строк производится сверху вниз, а столбцов – слева направо). Элементами матрицы, как правило, являются числа, но иногда и другие математические объекты, например, векторы, многочлены, дифференциалы и даже матрицы.

Матрица обозначается следующими способами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

а также $\| a_{ik} \|$ или (a_{ik}).

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей порядка n*. Квадратная матрица $\| a_{ik} \|$ порядка n называется:

верхней треугольной матрицей, если $a_{ik} = 0$ для всех $i > k$;

нижней треугольной матрицей, если $a_{ik} = 0$ для всех $i < k$;

диагональной матрицей, если $a_{ik} = 0$ для всех $i \neq k$;

единичной матрицей, если

$$a_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases}$$

Элементы a_{ii}, т. е. элементы, стоящие в таблице на диагонали квадрата, проходящей из левого верхнего угла в правый нижний, – на *главной диагонали* матрицы, – называются *главными диагональными элементами* или просто *диагональными элементами*; элементы $a_{i,n-i+1}$ $(i = 1, \dots, n)$, т. е. элементы, стоящие на диагонали, которая проходит из правого верхнего угла в левый нижний (*побочная диагональ* матрицы), иногда называются *побочными диагональными элементами*. В случае $m \times n$-матриц элементы a_{ii} $(i = 1, \dots, \min(m, n))$ также называют *главными диагональными элементами* или просто *диагональными элементами*. Сумма главных диагональных элементов называется *следом* (Spur, Trace) матрицы и обозначается $\operatorname{Sp} A$ или $\operatorname{Tr} A$.

Матрица размером $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*; аналогично говорят о *матрице-столбце*, если речь идет о матрице размера $m \times 1$; $m \times n$-матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой $m \times n$-матрицей* и обозначается O. Каждая таблица вида

$$\begin{bmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_s} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_s} \\ . & . & . & . \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & \dots & a_{i_rk_s} \end{bmatrix},$$

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_r \leqslant m; \ 1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_s \leqslant n,$$

которая получается из $m \times n$-матрицы $\| a_{ik} \|$ вычеркиванием части строк и столбцов, называется *подматрицей матрицы* $\| a_{ik} \|$. По определению матрица $\| a_{ik} \|$ сама должна быть причислена к своим подматрицам. Если элементы строк матрицы $A = \| a_{ik} \|$ расставлены в столбцы (при этом одновременно элементы столбцов расставляются в строки), то полученная матрица называется *транспонированной* к A и обозначается $A^T = \| a_{ik}^T \|$, если $a_{ik}^T = a_{ki}$.

2.4.4.2.2. Определитель квадратной матрицы. Каждой квадратной матрице $A = \| a_{ik} \|$ порядка n с действительными или комплексными элементами можно однозначно поставить в соответствие действительное или комплексное число D, которое называется определителем матрицы A:

$$D = \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{Z(\pi)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

причем сумма должна быть распространена на все подстановки π набора чисел $1, 2, \dots, n$. Таким образом, из элементов матрицы A сначала составляют все возможные произведения

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

из n сомножителей каждое, содержащие по одному элементу из каждой строки и по одному из каждого столбца. Знак $(-1)^{Z(\pi)}$ определяется числом $Z(\pi)$ – числом инверсий подстановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

(см. 2.2.4). Полученные $n!$ слагаемых и составляют в сумме $\det A$.

Определитель обозначается также Δ и $|a_{ik}|$.

Если $D = |a_{ik}|$ – определитель порядка n, то *минором* M_{ik} элемента a_{ik} называют определитель порядка $n - 1$, получающийся из D «вычеркиванием» i-й строки и k-го столбца. Под *алгебраическим дополнением* A_{ik} элемента a_{ik} понимают минор M_{ik}, домноженный на $(-1)^{i+k}$:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} =$$

$$= (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2,k-1} & a_{2,k+1} \dots a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} \dots & \dots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} \dots & \dots a_{i+1,n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{n,k-1} & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Примеры. 1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Свойства определителей. Если рассматривать строки определителя D порядка n как векторы $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$, то свойства определителя $D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ с *вектор-строками* $\mathbf{z}_i$ удобно сформулировать так:

1) Перестановка строк может изменять лишь знак определителя D:

$$D(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = -D(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_n);$$

в общем случае

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = (-1)^{Z(\pi)} D(\mathbf{z}_{\pi(1)}, \mathbf{z}_{\pi(2)}, \ldots, \mathbf{z}_{\pi(n)}),$$

где π – подстановка чисел $1, 2, \ldots, n$, а $Z(\pi)$ – число ее инверсий.

2) Общий для всех элементов строки множитель можно выносить за знак определителя:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \alpha\mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = \alpha D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

3) При сложении двух определителей, различающихся только одной строкой, соответствующие элементы этой строки складываются:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) + D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}'_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k + \mathbf{z}'_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

4) Прибавление кратного k-й строки к i-й строке не изменяет значения определителя D $(i \neq k)$:

$$D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n) = D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_i + \alpha\mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_k, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

5) $D(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ есть линейно зависимое множество векторов. В частности, $D = 0$, если одна строка D состоит из нулей или если две строки D равны или пропорциональны друг другу.

6) Определитель не изменит своего значения, если поменять в нем местами строки и столбцы, т. е. *транспонировать* определитель. Поэтому все свойства, сформулированные для строк, верны и для столбцов.

Теорема разложения. Если $D = |a_{ik}|$ – определитель n-го порядка, то

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

т. е. сумма произведений всех элементов какой-либо строки (или столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения равна значению определителя. Сумма произведений всех элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или другого столбца) равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{li} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = 0, \qquad k \neq l.$$

Суммируя сказанное, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{li} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = \begin{cases} D, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Вычисление определителей. Значение определителя 2-го порядка вычисляется по мнемоническому правилу «произведение главных диагональных элементов минус произведение побочных диагональных элементов»:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Для нахождения значения определителя 3-го порядка также можно указать мнемоническое правило, так называемое *правило Саррюса*: приписать к определителю справа два первых столбца, не меняя их порядка, и составить сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, из которой затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов, параллельных ей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определители более высоких порядков тоже можно вычислять по определению, однако это требует больших усилий. Чаще поступают следующим образом: определитель n-го порядка сводят к определителям $(n-1)$-го порядка, последнее – к определителям $(n-2)$-го порядка и т. д. до тех пор, пока не получат определители 3-го или 2-го порядка. В основе этого принципа «постепенного понижения порядка» лежит теорема разложения: определитель n-го порядка D записывается в виде суммы определителей порядка $n-1$ («раскладывается по элементам i-й строки или k-го столбца»); к каждому из этих определителей порядка $n-1$ вновь может быть применена теорема разложения. Если все элементы i-й строки определителя D, кроме одного, равны нулю, то сумма, полученная после применения теоремы разложения, содержит не более одного отличного от нуля слагаемого. Таким образом, вычисления существенно упростятся, если перед разложением определителя по элементам i-й строки как можно большее их число будет превращено в нули. Это становится возможным благодаря применению свойств определителей (особенно свойства 4)).

Пример.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\text{(свойство 4))}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}} = 3 \underset{\text{(свойство 2))}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}} =$$

$$= 3\left\{-4\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\right\} =$$

(теорема разложения)

$$= 0 - 21\underset{\text{(свойство 5))}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = -21\underset{\text{(свойство 4))}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} =$$

$$= -21\left\{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right\} = -21\{(4+10) - (16+5)\} = +147.$$

(теорема разложения)

Вычисление определителя оказывается еще более удобным, если, применяя свойства 1) – 5), его можно преобразовать так, чтобы все элементы, стоящие слева и ниже главной диагонали $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, были равны нулю. Как легко понять на основании теоремы разложения, значение определителя получается тогда просто как произведение членов, стоящих на главной диагонали.

2.4.4.2.3. Ранг матрицы. Квадратная матрица называется *невырожденной* (*неособенной*) или *вырожденной* (*особенной*) в зависимости от того, отличен ее определитель от нуля или равен нулю.

Матрица $A \neq O$ (см. O в 2.4.4.2.1) имеет *ранг* $\operatorname{rang}(A) = p$, если A имеет по меньшей мере одну невырожденную (неособенную) подматрицу порядка p, а все квадратные подматрицы A более высоких порядков вырождены (особенные). Если дополнительно положить $\operatorname{rang}(O) = 0$, то каждой матрице будет сопоставлено одно неотрицательное целое число – ранг матрицы.

Пример.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

так как подматрица 2-го порядка $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ невырождена, а все подматрицы 3-го порядка вырождены.

Теоремы о ранге. Если рассматривать строки (или столбцы) матрицы A как векторы $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m$ (или $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$), то теоремы о ранге матрицы A с вектор-строками $\mathbf{z}_i$ удобно формулировать так:

1. Если $\operatorname{rang} A = \rho$, то существует линейно независимое множество из ρ вектор-строк матрицы A, в то время как все множества из σ вектор-строк ($\sigma > \rho$) матрицы A линейно зависимы. Иначе говоря, ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых вектор-строк матрицы A.

2. Ранг матрицы A не изменяется при следующих преобразованиях:

а) при перемене местами двух строк;

б) при умножении одной строки на число $c \neq 0$;

в) при сложении любого кратного одной строки с другой строкой;

г) при транспонировании A.

Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A^T)$, то теоремы, указанные выше для строк, справедливы и для столбцов.

Вычисление ранга. Нахождение ранга матрицы $A = \| a_{ik} \| \neq O$ сводится к тому, чтобы при помощи теоремы 2 матрицу A перевести в *трапециевидную матрицу* A' того же ранга:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \ldots a'_{1\rho} & a'_{1,\rho+1} \ldots a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} \ldots a'_{2\rho} & a'_{2,\rho+1} \ldots a'_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \ \ldots a'_{\rho\rho} & a'_{\rho,\rho+1} \ldots a'_{\rho n} \\ 0 & 0 \ \ldots 0 & 0 \quad \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & \underbrace{0 \ \ldots 0}_{\rho \text{ столбцов}} & \underbrace{0 \quad \ldots 0}_{n-\rho \text{ столбцов}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} \rho \text{ строк} \\ \left.\right\} m-\rho \text{ строк} \end{matrix}$$

в которой: а) все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю; б) либо все элементы последних $m - \rho$ строк обращаются в нуль, либо $m = \rho$; в) все элементы главной диагонали a'_{11}, $a'_{22}, \ldots, a'_{\rho\rho}$ отличны от нуля.

Если применить определение ранга к матрице A', то получим непосредственно, что $\operatorname{rang}(A') = \rho$ (т. е. ранг матрицы A' равен числу главных диагональных элементов, отличных от нуля), и тогда $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') = \rho$.

Чтобы преобразовать матрицу $A \neq O$ в трапециевидную матрицу A' равного ранга, поступают следующим образом:

1) Так как не все элементы A равны нулю, то перестановкой строк и столбцов можно добиться того, чтобы первый диагональный элемент был отличен от нуля ($a'_{11} \neq 0$).

2) Сложением первой строки, умноженной на соответствующий множитель, с другими строками всегда можно добиться, чтобы все элементы первого столбца, стоящие ниже a'_{11}, были равны нулю.

3) Теперь или уже получена желаемая форма матрицы, или в строках со 2-й по m-ю имеется по крайней мере один ненулевой элемент, который при помощи перестановки строк и столбцов может быть поставлен на второе место в главной диагонали. Тогда снова выполняем операции этапа 2) применительно ко 2-й строке и получаем, что все элементы 2-го столбца, стоящие ниже 2-го главного диагонального элемента, равны нулю и т. д., пока через конечное число шагов не получим трапециевидную матрицу.

Этот метод называется *алгоритмом Гаусса*.

Пример.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Для матриц с большими по величине элементами можно использовать теорему 2б), чтобы получить матрицу равного ранга с элементами, меньшими по величине.

2.4.4.2.4. Элементарная алгебра матриц. Равенство матриц. Две матрицы $A = \| a_{ik} \|$ размера $r \times s$ и $B = \| b_{ik} \|$ размера $\rho \times \sigma$ называют *равными*, если они имеют одинаковый размер и все элементы, стоящие на одних и тех же местах, равны между собой, т. е. если $r = \rho$, $s = \sigma$ и $a_{ik} = b_{ik}$ при всех i и k. Тогда пишут $A = B$.

Сумма матриц одинакового размера. *Сумма* $A + B$ двух матриц одинакового размера $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{ik} \|$ есть матрица $C = \| c_{ik} \|$ того же размера с элементами $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ при всех i и k. Таким образом, сложение матриц одинакового размера происходит поэлементно.

Умножение матрицы на действительное число. *Произведение* матрицы $A = \| a_{ik} \|$ на действительное (комплексное) число λ есть матрица $\lambda A = \| \lambda a_{ik} \|$, т. е. умножение матрицы

на действительное (комплексное) число происходит поэлементно.

Свойства сложения и умножения на числа.

1. Сложение матриц одинакового размера *ассоциативно, коммутативно* и *обратимо*. Уравнение $A + X = B$ с матрицами одинакового размера $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{ik} \|$ имеет в качестве единственного решения $X = B - A = \| b_{ik} - a_{ik} \|$ – *разность* матриц B и A.

2. Среди матриц одинакового размера имеется одна нейтральная по отношению к сложению матрица – *нулевая матрица* O, все элементы которой равны нулю.

3. Для каждой матрицы $A = \| a_{ik} \|$ существует (и притом единственная) матрица, обратная по отношению к сложению, так называемая *противоположная* для A *матрица* $-A = \| -a_{ik} \|$. В соответствии с определением разности получаем $O - A = -A$. Далее, имеем $B + (-A) = B - A$ и $-(-A) = A$.

4. Умножение матрицы A на действительные (комплексные) числа λ, μ подчиняется правилам: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $1 \cdot A = A$. Далее, $O \cdot A = O$, $\lambda \cdot O = O$ и $(-1) \cdot A = -A$.

5. Сложение и умножение на числа связаны дистрибутивными законами; для матриц A и B одинакового размера и произвольных действительных (комплексных) чисел λ, μ

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Свойства 1–5, взятые вместе, показывают, что множество всех матриц одинакового размера образует действительное (комплексное) векторное пространство (см. 2.4.4.1).

Умножение сцепленных матриц. Матрицы $A = \| a_{ik} \|$ размера $m \times n$ и $B = \| b_{ik} \|$ размера $r \times s$ называются *сцепленными*, если $n = r$, т. е. число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. При этом матрицы B и A могут оказаться не сцепленными, если $s \neq m$.

Произведение AB двух сцепленных матриц A и B есть матрица $C = (c_{ik})$ размера $m \times s$, где $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, т. е. элемент, стоящий в i-й строке и k-м столбце матрицы произведения, получается в виде скалярного произведения i-й вектор-строки матрицы A на k-й вектор-столбец матрицы B.

Пример.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Свойства умножения матриц.

1. Умножение сцепленных матриц *ассоциативно*.

2. Умножение матриц, вообще говоря, *некоммутативно*. Так, в приведенном примере произведение BA не определено, так как матрицы B и A не сцеплены. Если даже существуют оба произведения AB и BA, то они могут отличаться друг от друга.

3. Существуют *делители нуля*, т. е. $A \neq O$, $B \neq O$, произведение AB которых есть нулевая матрица; например,

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, из того, что $AB = O$, $A \neq O$, нельзя сделать заключение, что $B = O$, и аналогично из $AB = AC$, $A \neq O$, в общем случае не следует, что $B = C$.

4. Существует одна матрица, нейтральная по отношению к умножению, – квадратная *единичная матрица* n-го порядка E_n. Тогда для любой матрицы A размера $m \times n$

$$AE_n = E_m A = A.$$

5. Сложение и умножение матриц связаны *дистрибутивными законами*: если A и B имеют одинаковый размер и сцеплены с C, то $(A + B)C = AC + BC$; если C сцеплена с матрицами A и B одинакового размера, то $C(A + B) = CA + CB$.

На множестве квадратных матриц порядка n всегда выполнимы как сложение, так и умножение, так как каждые две $n \times n$-матрицы имеют одинаковый размер и сцеплены. По отношению к сложению и умножению это множество образует *кольцо матриц*.

6. Для квадратных матриц A и B равных размеров $\det(AB) = \det A \det B$.

7. Если A и B – сцепленные матрицы, то для транспонированных матриц (ср. 2.4.4.2.1) выполнено равенство $(AB)^T = B^T A^T$.

Нахождение обратной матрицы. Если задаться вопросом о существовании матрицы A^{-1}, обратной для квадратной матрицы A порядка n по отношению к умножению, т. е. такой, что $AA^{-1} = E_n$, то вследствие свойства 6 невырожденность матрицы A является необходимым условием существования обратной матрицы, так как в случае вырожденности A было бы $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 0 \neq 1 = \det E_n$.

Если A – матрица n-го порядка, то ее невырожденность есть необходимое и достаточное условие существования матрицы A^{-1} такой, что $AA^{-1} = E_n$. При этих условиях матрица A^{-1}, *обратная* для A, определена однозначно. Кроме того, $A^{-1}A = E_n$.

Далее, для $n \times n$-матриц A и B справедливы формулы

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

Вычисление обратной матрицы.

1-й способ. Метод неопределенных коэффициентов в применении к $AX = E_n$ приводит к n линейным системам n уравнений с n неизвестными каждая (см. 2.4.4.3.3). Решение каждой из этих n систем уравнений дает столбец искомой матрицы $X = A^{-1}$.

2-й способ.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. То, что эта матрица удовлетворяет

уравнению $AX = E_n$, легко установить, вычисляя матрицу AA^{-1} при помощи теоремы разложения.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Решение матричных уравнений. Матричное уравнение с неизвестной матрицей X, которое приводится к виду $AX = B$ или $XA = B$, может быть решено методом неопределенных коэффициентов. Использование этого метода приводит к решению систем линейных уравнений для столбцов или строк искомой матрицы X (см. 2.4.4.3). Для уравнения $AX = B$ возможны следующие основные случаи.

1. Уравнение не имеет решения: матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $r \times s$ и $m \neq r$, а также $m = r$, но $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A \mid B)$*).

2. Уравнение имеет бесконечное множество решений: матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $m \times s$ и $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid B) < n$*).

3. Уравнение имеет единственное решение: матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $m \times s$ и $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid B) = n$; в частности, если A и B – квадратные матрицы n-го порядка и A – невырожденная матрица; в этом случае уравнение $AX = B$ имеет единственное решение $X = A^{-1}B$.

2.4.4.2.5. Специальные классы матриц. Квадратная матрица A называется:

симметрической, если $A^T = A$;

кососимметрической, если $A^T = -A$;

ортогональной, если A не вырождена и $A^T = A^{-1}$.

Пусть A – квадратная матрица с комплексными элементами; $\bar{A}$ – матрица, *комплексно сопряженная* к A, т. е. получаемая из матрицы A заменой ее элементов на комплексно сопряженные.

Матрица A называется:

эрмитовой, если $A^T = \bar{A}$;

косоэрмитовой, если $A^T = -\bar{A}$;

унитарной, если A не вырождена и $A^T = \bar{A}^{-1}$.

Например, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ есть симметрическая матрица, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ – кососимметрическая матрица, $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ – ортогональная матрица.

Свойства матриц специальных классов.

1. Для каждой матрицы A матрицы AA^T и A^TA являются симметрическими.

2. Любую квадратную матрицу A можно разложить в сумму симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

*) Матрица $(A \mid B)$ получается путем правостороннего присоединения матрицы B к матрице A.

3. Если матрицы A и B ортогональны, то ортогональны также матрицы AB и A^{-1}.

4. Квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда вектор-строки (или вектор-столбцы) матрицы A образуют ортонормированную систему.

5. Для ортогональной матрицы $\det A = \pm 1$.

6. Любая ортогональная матрица 2-го порядка имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varepsilon\sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ – некоторый угол.

2.4.4.3. Системы линейных уравнений.

2.4.4.3.1. Понятие системы линейных уравнений. Система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. 2.4.2.3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

называется системой линейных уравнений или, точнее, *$m \times n$-системой линейных уравнений*; a_{ik} – *коэффициенты*, b_i – *свободные члены* системы. Если все $b_i = 0$, то мы имеем *однородную* систему линейных уравнений, в противном случае говорят о *неоднородной* системе линейных уравнений. n-последовательность чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется *решением $m \times n$*-системы линейных уравнений, если ее элементы, подставленные в заданном порядке вместо неизвестных, удовлетворяют каждому из m уравнений и принадлежат заданной области изменения. (Если нет специальных оговорок, то область изменения всех неизвестных – множество действительных чисел.) Совокупность всех решений системы называется *множеством решений*. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

2.4.4.3.2. Решения системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений всегда разрешимы, так как n-последовательность $(0, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет всем уравнениям системы. Решение $(0, 0, \ldots, 0)$ называют *тривиальным решением*. Вопрос о решениях однородной системы линейных уравнений сводится к вопросу о том, существуют ли, кроме тривиального, другие, нетривиальные решения или нет.

Например, однородная 2×3-система линейных уравнений

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0$$

имеет множество решений $L = \{\lambda(1, -1, 1)\}$; λ – произвольное действительное число; иначе говоря, $x_1 = \lambda$, $x_2 = -\lambda$, $x_3 = \lambda$ при любом действительном λ является решением системы. Напротив, однородная 2×2-система уравнений

$$2x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

имеет только тривиальное решение: $L = \{(0, 0)\}$.

Среди неоднородных систем линейных уравнений существуют неразрешимые системы; например,

$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad x_1 + 2x_2 = 2.$$

Система линейных уравнений

$$5x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 = 7$$

имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2 = -3$, или $L = \{(1, -3)\}$. Напротив, система уравнений

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -5,$$
$$x_2 + x_3 = 1$$

разрешима неоднозначно; при любом действительном λ значения $x_1 = -2 + \lambda$, $x_2 = -\lambda$, $x_3 = 1 + \lambda$ дают решение системы:

$$L = \{(-2, 0, 1) + \lambda(1, -1, 1)\}.$$

Теория систем линейных уравнений может быть наглядно и просто описана при помощи матриц:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

можно записать в виде $Ax = b$.

Характер множества решений этой системы зависит теперь только от $\operatorname{rang}(A)$ (ранга матрицы коэффициентов A системы) и от $\operatorname{rang}(A \mid b)$ (ранга так называемой *расширенной матрицы коэффициентов* $(A \mid b)$).

Ранг	$Ax = b$ (m уравнений, n неизвестных)	Частный случай $b = 0$, (однородная система $Ax = 0$)
1. $\operatorname{rang}(A \mid b) \neq \operatorname{rang}(A)$	система неразрешима	этот случай не может иметь места при $b = 0$, т. е. однородная система разрешима всегда
2. $\operatorname{rang}(A \mid b) = \operatorname{rang}(A) = \rho$	система разрешима	
а) $\rho = n$	решение единственно	система имеет только тривиальное решение
б) $\rho < n$	решение не единственно	система имеет нетривиальные решения

Структуру множества решений описывает следующая теорема.

1. Множество решений L однородной $m \times n$-системы линейных уравнений $Ax = 0$ есть векторное подпространство векторного пространства упорядоченных n-последовательностей действительных чисел, т. е. любая линейная комбинация решений системы вновь есть решение системы. Если $\operatorname{rang}(A) = \rho$, то

$$\dim L = n - \rho.$$

В случае $\rho < n$ можно выбрать $n - \rho$ неизвестных, построить $n - \rho$ линейно независимых решений и получить затем решения системы в виде линейных комбинаций этих $n - \rho$ линейно независимых решений.

2. Множество решений L $m \times n$-системы линейных уравнений $Ax = b$ состоит из всех упорядоченных n-последовательностей вида $x_0 + x^*$, причем x_0 — некоторое частное решение данной системы, а x^* пробегает значения всех решений соответствующей однородной системы $Ax = 0$:

$$L = \{x_0 + x^*, \text{ где } x_0 - \text{постоянный вектор такой, что } Ax_0 = b, \text{ а } Ax^* = 0.\}$$

(Для иллюстрации этой теоремы следует рассмотреть первый и последний из приведенных выше примеров.)

2.4.4.3.3. Способы решения линейных уравнений.

Алгоритм Гаусса. Нахождение множества решений системы линейных уравнений основывается на том, что от заданной системы при помощи эквивалентных преобразований переходят к системе, которая решается «проще», чем исходная система, и эквивалентна заданной. Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

1) перемена местами двух уравнений в системе;

2) умножение какого-либо уравнения системы на действительное число $c \neq 0$;

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти эквивалентные преобразования системы линейных уравнений $Ax = b$ вызывают в матрице коэффициентов A и в расширенной матрице коэффициентов $(A \mid B)$ только преобразования, сохраняющие ранг, а именно приводят к перестановке строк, умножению строки на число, отличное от нуля, и прибавлению к одной строке другой, умноженной на произвольное число. Справедливо также обратное: если преобразовать матрицы A и $(A \mid b)$ в матрицы A' и $(A' \mid b')$ соответственно равных рангов, применяя к строкам допустимые преобразования строк (см. 2.4.4.2.3), сохраняющие ранг, то системы

$$Ax = b \text{ и } A'x = b'$$

будут эквивалентными. *Алгоритм Гаусса* состоит в том, чтобы получить матрицы A' и $(A' \mid b')$ трапециевидной формы.

В случае, если исходная система $Ax = b$ разрешима (пусть $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) = \rho$), вследствие трапециевидности матриц A' и $(A' \mid b')$ эквивалентная система $A'x = b'$ может быть записана

в виде

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1\rho}x_\rho = \\ = b'_1 - a'_{1,\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a'_{1n}x_n,$$

$$a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2\rho}x_\rho = b'_2 - a'_{2,\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a'_{2n}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a'_{\rho\rho}x_\rho = b'_\rho - a'_{\rho,\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a'_{\rho n}x_n.$$

Эту систему называют *треугольной* системой. Так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid b) = \rho$, то множество решений есть $(n-\rho)$-мерное многообразие; следовательно, $n-\rho$ неизвестных $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ можно выбрать произвольно: $x_{\rho+1} = \lambda_1$, $x_{\rho+2} = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_{n-\rho}$; остальные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ получаются из треугольной системы последовательно как функции параметров λ_i:

$$x_k = f_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-\rho}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Если для получения трапециевидных матриц A' или $(A' \mid b')$ требуется еще перестановка столбцов, то этого достигают перенумерацией неизвестных в системе уравнений $Ax = b$.

Примеры. 1)

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1,$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7,$$
$$3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8.$$

Здесь

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Из этого заключаем:

а) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b)$, т. е. система разрешима;

б) решение неоднозначно: $4-2=2$ неизвестных могут быть выбраны произвольно;

в) треугольная система имеет вид

$$x_1 - 4x_2 = -1 - 2x_3, \quad x_2 = -1 + x_3 + x_4.$$

Если положить $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, то получим $x_2 = -1 + \lambda_1 + \lambda_2$, $x_1 = -5 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2$, т. е. множество решений $L = \{(-5, -1, 0, 0) + \lambda_1(2, 1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 0, 1);\ \lambda_i$, $i = 1, 2$ – произвольные действительные числа$\}$. Тогда соответствующая однородная система $Ax = 0$ имеет, очевидно, множество решений $L = \{\lambda_1(2, 1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 0, 1);\ \lambda_i$ – произвольные действительные числа$\}$.

2)

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$3x_1 - 2x_2 + 4x_2 = 5.$$

Тогда

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Здесь произведена перестановка трех первых столбцов.) Отсюда заключаем: $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\operatorname{rang}(A \mid b) = 3$; следовательно, система неразрешима: $L = \varnothing$.

3)

$$x_1 - x_2 + x_3 = 12,$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13,$$
$$3x_2 + 4x_3 = 5,$$
$$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = -20.$$

Здесь

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & -1 & 13 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & -20 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда заключаем:

а) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) = 3$, т. е. система уравнений разрешима;

б) решение единственно;

в) треугольная система имеет вид

$$x_1 - x_2 + x_3 = 12,$$
$$-2x_2 + 7x_3 = 16,$$
$$x_3 = 2,$$

откуда найдем $L = \{(9, -1, 2)\}$. Соответствующая однородная система $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение.

Правило Крамера. Если мы имеем частный случай $n \times n$-системы линейных уравнений $Ax = b$ такой, что $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) = n$, то вследствие невырожденности A единственное решение x можно представить в виде $x = A^{-1}b$. Воспользовавшись формулами для обратной матрицы из 2.4.4.2.4, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. Тогда i-я координата x_i находится по формуле

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{1i}b_i + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_m) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i}{D},$$
$$1 \ \ldots \ i \ \ldots \ n$$

где определитель D_i, стоящий в числителе, получается из $D = \det A$ заменой i-го столбца на столбец b. Следовательно, для $n \times n$-системы линейных уравнений $Ax = b$ такой, что $D = \det A \neq 0$, получим единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где $x_i = D_i/D$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7.$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&9&3\\1&-2&1\\3&7&2\end{vmatrix}=26,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&1&9\\1&-2&-2\\3&2&7\end{vmatrix}=39,$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{13}{13}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{26}{13}=2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{39}{13}=3.$$

2.4.4.4. Линейные преобразования.

2.4.4.4.1. Основные понятия.

2.4.4.4.1.1. Понятие линейного преобразования. Пусть V и V' – действительные векторные пространства. Однозначное отображение φ пространства V в пространство V' называется *линейным преобразованием V в V'*, если выполняются условия:

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ для любых $x,\ y\in V$;

2) $\varphi(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot\varphi(x)$ для любого $x\in V$ и всех действительных λ.

(При этом операции в V' могут быть определены иначе, чем в V, хотя из соображений простоты они обозначаются теми же знаками «+» и «·».)

Если $V=V'$, то $\varphi\colon V\to V'$ называют также *линейным оператором в V* или *линейным преобразованием* пространства V.

Если $x'=\varphi x$, то x' называется *образом* (*изображением*) x при отображении φ, x – *прообразом* (или *оригиналом*) x' при преобразовании φ, а множество $\{x\in V\mid \varphi x=x'\}$ называется *полным прообразом* (или *полным оригиналом*) элемента x' при преобразовании φ. Если M есть подмножество из V, то $\varphi M=\{x'\in V'\mid x'=\varphi(x),\ x\in M\}$ называют *множеством образов элементов из M* (*образом множества M*) при преобразовании φ. Если M' – подмножество из V', то $M=\{x\in V\mid \varphi x\in M'\}$ называется *полным прообразом* множества M' при преобразовании φ.

Примеры. 1) Преобразование $\varphi_1\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ такое, что $\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1,\ x_2)$, линейно.

2) Преобразование φ_2 пространства $\mathbf{R}^n$ в векторное пространство многочленов не выше $(n-1)$-й степени такое, что $\varphi_2(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=x_1+x_2t+x_3t^2+\dots+x_nt^{n-1}$, линейно.

3) Преобразование φ_3 векторного пространства $\mathbf{C}^\infty$ бесконечно дифференцируемых функций в себя такое, что $\varphi_3 f=f'$ для всех $f\in\mathbf{C}^\infty$, линейно: φ_3 есть линейный оператор в $\mathbf{C}^\infty$.

4) Преобразование $\varphi_4\colon V\to V'$ такое, что $\varphi_4 x=0'$ для любого $x\in V$ ($0'$ есть нулевой вектор из V'), линейно; его называют *нулевым преобразованием*.

5) Преобразование $\varphi_5\colon R^3\to R^2$ такое, что $\varphi_5(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1,\ 1)$, не является линейным, так как

$$\varphi_5(x_1,\ x_2,\ x_3)+\varphi_5(y_1,\ y_2,\ y_3)=(x_1,\ 1)+(y_1,\ 1)=$$
$$=(x_1+y_1,\ 2)\neq(x_1+y_1,\ 1)=\varphi_5[(x_1,\ x_2,\ x_3)+(y_1,y_2,y_3)].$$

2.4.4.4.1.2. Свойства линейных преобразований. Для каждого линейного преобразования $\varphi\colon V\to V'$ имеем:

1. Образ нулевого вектора 0 пространства V всегда является нулевым вектором $0'$ в V': $\varphi 0=0'$.

2. Линейная комбинация элементов из V всегда преобразуется в линейную комбинацию соответствующих элементов из V' с теми же коэффициентами. Поэтому для каждого подмножества $M\subseteq V$ образ линейной оболочки $\mathscr{L}(M)$ совпадает с линейной оболочкой $\mathscr{L}(\varphi M)$ образа множества M: $\varphi\mathscr{L}(M)=\mathscr{L}(\varphi M)$.

Если, в частности, B является базисом V, то $\varphi V=\varphi\mathscr{L}(B)=\mathscr{L}(\varphi B)$. Отсюда следует, что линейное преобразование $\varphi\colon V\to V'$ однозначно определено уже множеством образов φB базиса B.

3. Если S – линейно зависимое множество векторов из V, то φS – также линейно зависимое множество векторов пространства V'. С другой стороны, линейно независимые множества посредством преобразования φ могут перейти в линейно зависимые множества. Поэтому образ базиса B пространства V в общем случае – лишь порождающая система пространства φV.

4. Если U – векторное подпространство из V, то φU есть векторное подпространство из V'. Если V конечномерно, то размерность $\dim\varphi V$ пространства образов φV называют *рангом* линейного преобразования φ: $\operatorname{rang}\varphi=\dim\varphi V$.

5. Если U' – векторное подпространство пространства φV и U – полный прообраз U' по отношению к φ, то U является векторным подпространством в V.

Свойства 3–5 означают, что линейное преобразование сохраняет свойство линейной зависимости, а свойство быть подпространством сохраняется как у образов, так и у прообразов.

В частности, вследствие свойства 5 множество K_φ всех тех векторов из V, образом которых при преобразовании φ является нулевой вектор из V', образует векторное подпространство пространства V, называемое *ядром* K_φ линейного преобразования φ: $\operatorname{Ker}\varphi=K_\varphi$, где $K_\varphi=\{x\in V\colon\ \varphi x=0'\}$. Если K_φ конечномерно, то его размерность называют *дефектом* линейного преобразования φ: $\operatorname{Defekt}\varphi=\dim K_\varphi$. Если $\varphi\colon V\to V'$ и V – конечномерное векторное пространство, то

$$\operatorname{rang}\varphi+\operatorname{Defekt}\varphi=\dim V.$$

Примеры. Для примеров 1)–4) линейных преобразований имеем (см. 2.4.4.4.1.1):

$K_{\varphi_1}=\{(0,\ 0,\ x_3);\ x_3$ – любое действительное число$\}$; $\operatorname{Defekt}\varphi_1=1$; $\operatorname{rang}\varphi_1=2$.

$K_{\varphi_2}=\{(0,\ 0,\ \dots,\ 0)\}$; $\operatorname{Defekt}\varphi_2=0$; $\operatorname{rang}\varphi_2=n$.

$K_{\varphi_3}=\{f\colon f=\text{const}\}$; $\operatorname{Defekt}\varphi_3=1$; $\operatorname{rang}\varphi_3$ не определен (так как C^∞ бесконечномерно).

$K_{\varphi_4}=V$; если V конечномерно, то $\operatorname{Defekt}\varphi_4=\dim V$; $\operatorname{rang}\varphi_4=0$.

Ядро линейного преобразования позволяет ввести разбиение пространства V на классы элементов, имеющих одинаковые образы: два элемента из V принадлежат к одному и тому же классу, т. е. имеют один и тот же образ при преобразовании φ, тогда и только тогда, когда их разность принадлежит ядру φ.

2.4.4.4.1.3. Взаимно однозначные линейные преобразования. Линейное преобразование $\varphi\colon V\to V'$ называется *взаимно однозначным*, если из $\varphi x=\varphi y$ следует $x=y$. Взаимно однозначный линейный оператор из V в V называется также *невырожденным оператором* в пространстве V; остальные операторы называются *вырожденными операторами*.

В соответствии с этим из приведенных примеров линейных преобразований взаимно однозначным является лишь φ_2; φ_1 таковым, например, не является, так как $\varphi_1(1,\ 1,\ 1)=\varphi_1(1,\ 1,\ 5)$, хотя $(1,\ 1,\ 1)\neq(1,\ 1,\ 5)$.

Для любого линейного преобразования φ: $V \to V'$ следующие высказывания попарно эквивалентны:

1) φ взаимно однозначно;

2) для каждого линейно независимого множества S пространства V множество φS есть линейно независимое множество пространства V';

3) $K_\varphi = \{0\}$.

Из 2), в частности, следует, что образ базиса V при взаимно однозначном преобразовании φ является базисом φV. Для конечномерного векторного пространства V и взаимно однозначного преобразования φ имеем $\dim \varphi V = \dim V$.

2.4.4.4.2. Представление линейных преобразований с помощью матриц. Пусть V и V' – конечномерные векторные пространства, $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – базис V, $B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – базис V'.

Всякое линейное преобразование φ: $V \to V'$ образами $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$ векторов базиса B определено однозначно, так как каждый вектор $x \in V$ есть линейная комбинация векторов B и вследствие этого его образ φx есть соответствующая линейная комбинация векторов базиса φB. Если записать образы $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$ векторов B в координатах базиса B', то φ будет определяться однозначно посредством $m \cdot n$ координат векторов φa_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ относительно B', которые можно расставить в $m \times n$-матрице A так, чтобы k-й столбец матрицы A состоял из координат вектора φa_k относительно B'. И наоборот, каждой $m \times n$-матрице A по отношению к фиксированной паре базисов (B, B') можно единственным образом сопоставить линейное преобразование φ: $V \to V'$, если рассматривать столбцы A как координаты образов векторов B относительно B'.

Итак, между множествами линейных преобразований φ: $V \to V'$, где $\dim V = n$, $\dim V' = m$, и множеством $m \times n$-матриц существует взаимно однозначное соответствие при фиксированных базисах B пространства V и B' пространства V'. Если $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\varphi a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})_{B'}$, то φ можно записать в виде матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(Так как A зависит еще и от выбранной пары базисов (B, B'), то точнее было бы написать $A_{(B, B')}$.)

Пример. Пусть линейное преобразование φ: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ задано образами векторов базиса B пространства $\mathbf{R}^4$:

$$\varphi(1, -2, 0, 3) = (-9, 7, 1), \quad \varphi(0, 0, 1, -1) = (3, -3, 3),$$

$$\varphi(1, 0, 3, 0) = (4, 0, -2), \quad \varphi(1, -1, 1, 0) = (0, 1, -1).$$

(Координаты относятся к каноническому базису пространства $\mathbf{R}^4$ и соответственно к каноническому базису пространства $\mathbf{R}^3$.) Тогда, найдя φ-образы векторов e_1, e_2, e_3, e_4 канонического базиса пространства $\mathbf{R}^4$ и записав их координаты относительно канонического базиса пространства $\mathbf{R}^3$ (ср. 2.4.4.1.4), получим матрицу A, описывающую преобразование φ по отношению к паре канонических базисов. Для этого выразим e_i в виде линейных комбинаций векторов заданного базиса B и найдем φe_i в виде соответствующих линейных комбинаций заданных векторов φB. Записав координаты векторов φe_i относительно канонического базиса, окончательно получим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если перейти от пары базисов (B, B') к новой паре базисов $(\bar{B}, \bar{B}')$, то описывающая φ матрица $A_{(B, B')}$ перейдет в матрицу

$$A_{(\bar{B}, \bar{B}')} = T^{-1} A_{(B, B')} S,$$

причем столбцы матрицы S (соответственно T) будут состоять из координат векторов $\bar{B}$ относительно B (соответственно $\bar{B}'$ относительно B').

Матрицы одинакового размера, которые получаются одна из другой право- и левосторонним умножением на невырожденные матрицы, называются *эквивалентными*. Эквивалентность матриц есть отношение эквивалентности, которое разбивает множество матриц одинакового размера на классы эквивалентных матриц. Число этих классов равно $\min(m, n) + 1$, где $m \times n$ – размер рассматриваемых матриц.

Вследствие этого две матрицы, описывающие одно и то же линейное преобразование относительно различных пар базисов, эквивалентны. Обратно, эквивалентные матрицы относительно соответствующих пар базисов задают одно и то же линейное преобразование.

Линейному преобразованию φ: $V \to V'$ соответствует единственный класс эквивалентных матриц.

Если $V = V'$, т. е. если φ – линейный оператор в V, то для двух матриц A_B и $A_{\bar{B}}$, описывающих линейный оператор φ относительно различных базисов B, $\bar{B}$, вследствие $B = B'$ и $\bar{B} = \bar{B}'$ выполняется равенство

$$A_{\bar{B}} = S^{-1} A_B S.$$

Квадратные матрицы A_1 и A_2, для которых $A_2 = S^{-1} A_1 S$, где S – невырожденная матрица, называются *подобными*. Подобие матриц есть также отношение эквивалентности.

Аналогично сформулированному выше можно утверждать: линейному оператору φ в пространстве V соответствует единственный класс подобных матриц.

Свойства всех матриц одного и того же класса эквивалентности или одного и того же класса подобия тесно связаны со свойствами линейных преобразований, описываемых этими матрицами. Укажем некоторые из них:

1. Если φ: $V \to V'$ – линейное преобразование и $A_{(B, B')}$ – матрица, описывающая φ относительно пары базисов (B, B'), то для образа φx элемента $x \in V$ справедливо соотношение

$$(\varphi x)_{B'} = A_{(B, B')} x_B,$$

где x_B – вектор-столбец, составленный из координат вектора x относительно B, $(\varphi x)_{B'}$ – вектор-столбец, составленный из координат вектора φx относительно B'.

По этой формуле наряду с образом можно определить также полные прообразы, что сводится к отысканию решения системы линейных уравнений (см. 2.4.4.3).

2. Все матрицы класса эквивалентности, соответствующего линейному преобразованию φ: $V \to V'$ $(V \neq V')$, имеют одинаковый ранг, и $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang} \varphi$ для всех A из класса эквивалентности, соответствующего φ.

3. Все матрицы класса подобия, соответствующего линейному оператору φ в пространстве V, имеют одинаковый ранг, одинаковый определитель, одинаковый след, одинаковый характеристический многочлен и одинаковые собственные значения (см. 2.4.4.5).

В частности, линейный оператор невырожден тогда и только тогда, когда матрицы определяемого им класса подобия невырождены.

2.4.4.4.3. Операции над линейными преобразованиями. Если φ: $V \to V'$, φ': $V \to V'$, ψ: $V' \to V''$ суть линейные преобразования, то определим

сумму $\varphi + \varphi'$: $V \to V'$ как $(\varphi + \varphi')x = \varphi x + \varphi' x$ для любого $x \in V$;

произведение φ на число α, т. е. $\alpha\varphi$: $V \to V'$ (α – действительное), как $(\alpha\varphi)x = \alpha(\varphi x)$ для любого $x \in V$;

произведение $\psi\varphi$: $V \to V''$ как $(\psi\varphi)x = \psi(\varphi x)$ для любого $x \in V$ (*последовательное выполнение*, или *композиция*, линейных преобразований).

Преобразования $\varphi + \varphi'$, $\alpha\varphi$ и $\psi\varphi$ также являются линейными преобразованиями.

Если V, V', V'' – конечномерные векторные пространства с базисами B, B', B'' и линейные преобразования φ, φ', ψ заданы соответственно матрицами $A_{(B,B')}$, $A'_{(B,B')}$, $C_{(B',B'')}$, то:

линейное преобразование $\varphi + \varphi'$ относительно (B, B') задается матрицей $A + A'$;

линейное преобразование $\alpha\varphi$ относительно (B, B') задается матрицей αA;

линейное преобразование $\psi\varphi$ относительно (B, B'') задается матрицей CA.

Так как операциям над линейными преобразованиями соответствуют аналогичные операции над задающими их матрицами, то множество линейных преобразований пространства V в V' имеет такую же структуру, как и множество матриц, задающих эти преобразования. Отсюда следует:

1. Множество линейных преобразований V в V' с определенными на нем действиями сложения и умножения на действительные числа образует векторное пространство.

2. Множество линейных операторов пространства V с определенными в нем действиями сложения и умножения образует кольцо.

2.4.4.4.4. Обратный оператор. Для невырожденных операторов φ: $V \to V$ можно поставить вопрос об *операторе* φ^{-1}, обратном к φ, т. е. таком, что $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$, где ε – тождественный оператор, т. е. такой, что $\varepsilon x = x$ для любого $x \in V$. Если $\varphi V = V$, то существует обратный к φ оператор φ^{-1}, определяемый следующим образом: $\varphi^{-1}x = y$ тогда и только тогда, когда $\varphi y = x$. Вследствие невырожденности φ оператор φ^{-1} определен однозначно, и можно показать, что φ^{-1} вновь является линейным оператором в пространстве V.

Предположение $\varphi V = V$ необходимо для того, чтобы каждый элемент из V можно было рассматривать как образ при преобразовании φ некоторого элемента из V. В случае конечномерного векторного пространства V это предположение всегда выполнено.

Если φ, ψ – невырожденные операторы в V такие, что $\varphi V = \psi V = V$, то

1) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, т. е. φ и φ^{-1} *взаимно обратны*;

2) $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$;

3) если V конечномерно и преобразование φ относительно базиса B задается матрицей A, то преобразование φ^{-1} относительно того же базиса задается матрицей A^{-1};

4) если V конечномерно, то множество невырожденных операторов пространства V по отношению к умножению образует группу.

2.4.4.5. Собственные значения и собственные векторы.

2.4.4.5.1. Собственные значения и собственные векторы матриц. Пусть A – $n \times n$-матрица. Любой вектор $x \in V^n$, $x \neq 0$, для которого $Ax = \lambda x$, где λ – некоторое число, называется *собственным вектором* A, а λ – принадлежащим или соответствующим ему *собственным значением матрицы* A.

Уравнение $Ax = \lambda x$ эквивалентно уравнению $(A - \lambda E)x = 0$. Это однородная система линейных уравнений, нетривиальные решения которой являются искомыми собственными векторами. Она имеет нетривиальные решения только тогда, когда $\operatorname{rang}(A - \lambda E) < n$, т. е. если $\det(A - \lambda E) = 0$.

Многочлен $\det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ – *характеристическим уравнением* матрицы A; его решения являются собственными значениями матрицы A. Если λ_i – собственные значения A, то нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda_i E)x = 0$ суть собственные векторы A, принадлежащие собственному значению λ_i. Множество решений этой системы уравнений называют *собственным подпространством матрицы* A, принадлежащим собственному значению λ_i; каждый вектор $x \neq 0$ собственного подпространства является собственным вектором матрицы A (само собой разумеется, в собственном подпространстве определены линейные операции «+» и «·»).

Примеры. 1) Собственные значения матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ найдем из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Собственное подпространство A, принадлежащее $\lambda_1 = 5$, есть множество решений системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x,$$

т. е. $L_1 = \{\mu(-1, 1);\ \mu$ – действительное число$\}$.

Аналогично найдем собственное подпространство, принадлежащее $\lambda_2 = -1$: $L_2 = \{\mu(1, 2);\ \mu$ – действительное число$\}$.

2) Матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ и, следовательно, собственные значения $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. Действительных собственных векторов нет. Над комплексным полем собственному значению λ_1 принадлежат собственные векторы $x_1 = \mu(1, i - 1)$, а собственному значению λ_2 – собственные векторы $x_2 = \mu(-1, i + 1)$; здесь μ – произвольное комплексное число, не равное нулю.

3) Матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; отсюда получаем собственное подпространство $L_1 = L_2 = \{\mu(1, 1);\ \mu$ – произвольное действительное число$\}$.

2.4.4.5.2. Теоремы о собственных значениях и собственных векторах.

1. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены и, следовательно, одинаковые собственные значения.

2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, то

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \mathrm{Sp}\, A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Это можно использовать как необходимый критерий правильности вычисления собственных значений. Далее, из того, что $\det A = \prod \lambda_i$, следует, что матрица A невырождена только тогда, когда нуль не является собственным значением A.

3. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – (попарно) различные собственные значения матрицы A и $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – соответствующие им собственные векторы (λ_i принадлежит x_i), то $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ есть линейно независимое множество векторов.

4. Если матрица A имеет собственное значение λ, то для любых чисел $c_0, c_1, \ldots, c_k$ матрица $B = \sum_{i=0}^{k} c_i A^i$ (здесь $A^1 = A$ и $A^0 = E$) имеет собственное значение $\sum_{i=0}^{k} c_i \lambda^i$. Отсюда, в частности, следует: если A имеет собственное значение λ, то A^m (m – натуральное число) имеет собственное значение λ^m. Для невырожденной матрицы A это высказывание справедливо и при целых отрицательных числах m, если положить $A^m = A^{-k} = (A^{-1})^k$ (где $k = -m$ есть натуральное число).

5. Каждая матрица A удовлетворяет собственному характеристическому уравнению, т. е. если $\sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ – характеристический многочлен A, то $\sum_{i=0}^{n} c_i A^i = 0$ (*теорема Гамильтона – Кэли*).

Для определенных классов матриц справедливы частные предложения:

1. Все собственные значения симметрической матрицы действительны.

2. Собственные пространства, принадлежащие различным собственным значениям симметрической матрицы, взаимно ортогональны.

3. Все собственные значения ортогональной матрицы по модулю равны единице.

4. Собственным значением ортогональной матрицы наряду с λ является также λ^{-1}.

2.4.4.5.3. Применение теории собственных значений.

2.4.4.5.3.1. Задача о нормальной форме для линейных операторов. Пусть φ: $V \to V'$ ($V \neq V'$) – линейное преобразование конечномерных векторных пространств и A – матрица, описывающая φ относительно пары базисов (B, B') (см. 2.4.4.4.2). Вопрос состоит в том, можно ли надлежащим выбором пары базисов найти матрицу, описывающую φ и имеющую особенно простой, а именно диагональный (отличными от нуля могут быть только элементы главной диагонали), вид. Так как линейному преобразованию φ сопоставлен единственный класс эквивалентных матриц, то вопрос можно поставить так: существует ли в каждом классе эквивалентности матрица диагонального вида? Оказывается, существует: если $\mathrm{rang}\, \varphi = r$, то всегда можно построить такую пару базисов, что матрица, задающая φ, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

(здесь r элементов главной диагонали равны единице, остальные равны нулю).

Если поставить тот же самый вопрос по отношению к линейным операторам в пространстве V, то ответ получить гораздо труднее, так как в этом случае можно «варьировать» уже не два базиса (в V и V'), а только один (в V). В этом случае справедливо следующее утверждение. Линейный оператор φ: $V \to V$ относительно базиса $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ описывается диагональной матрицей тогда и только тогда, когда базисные векторы обладают свойством $\varphi a_i = \lambda_i a_i$, где λ_i – некоторые действительные числа. Эти числа λ_i и являются элементами диагональной матрицы.

Всякий вектор $x \neq 0$, для которого $\varphi x = \lambda x$, где λ – некоторый скаляр, называется *собственным вектором* линейного оператора φ, а λ – *собственным значением* оператора φ, принадлежащим этому собственному вектору.

Следовательно, линейный оператор φ относительно базиса B описывается диагональной матрицей тогда и только тогда, когда базисными векторами являются собственные векторы, и вся постановка задачи сводится к вопросу о существовании базиса из собственных векторов оператора φ. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов, т. е. для того, чтобы линейный оператор φ имел n линейно независимых собственных векторов, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора φ были действительными и для каждого собственного значения λ кратности ρ выполнялись равенства

$$\mathrm{rang}\,(\varphi - \lambda\varepsilon) = \mathrm{rang}\,(A - \lambda E) = n - \rho,$$

где A – какая-либо матрица, задающая φ. Это означает, что собственное подпространство, принадлежащее собственному значению кратности ρ, должно иметь размерность ρ (чтобы для ρ совпадающих собственных значений получить ρ линейно независимых собственных векторов).

Поставленная проблема не всегда разрешима, так как не обязательно все собственные значения линейного оператора должны быть действительными и может случиться, что для кратных собственных значений нельзя получить требуемого числа линейно независимых собственных векторов. Однако симметрический оператор в евклидовом векторном пространстве всегда может быть описан диагональной матрицей относительно подходящего ортонормированного базиса, так как всегда можно получить ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов симметрического оператора. (Линейный оператор φ в евклидо-

вом векторном пространстве V называется *симметрическим*, если $(\varphi x, y) = (x, \varphi y)$ для всех $x, y \in V$.)

Вычисление собственных значений и собственных векторов линейного оператора φ производится путем определения собственных значений и собственных векторов какой-либо матрицы оператора φ.

2.4.4.5.3.2. Приведение матрицы к диагональному виду. Задача состоит в том, чтобы для $n \times n$-матрицы A подобрать такую матрицу C, чтобы матрица $A' = C^{-1}AC$ имела диагональный вид. Эта задача тесно связана с задачей о нормальной форме линейных операторов. Если относительно базиса B линейный оператор φ в пространстве V описывается матрицей A_B, то ищем базис B', по отношению к которому описывающая φ матрица $A_{B'}$ имеет диагональный вид. Так как матрицы A_B и $A_{B'}$ должны быть подобны, то эта задача сводится к отысканию такой матрицы C, чтобы матрица $A_{B'} = C^{-1}A_BC$ имела диагональный вид. Если задача разрешима, то B' должен состоять из собственных векторов оператора φ, т. е. столбцами искомой матрицы C должны быть координаты собственных векторов, образующих базис B'.

Задача всегда разрешима, если матрица A симметрическая, так как тогда все собственные значения действительны и размерность собственного подпространства, принадлежащего собственному значению λ, совпадает с кратностью λ. Вследствие ортогональности собственных подпространств, принадлежащих различным собственным значениям, для симметрических матриц A всегда можно найти такую ортогональную матрицу C, что $C^{-1}AC = C^TAC$ имеет диагональный вид.

Пример. Для того чтобы привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

найдем сначала ее собственные значения: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$; отсюда получаются собственные пространства:

$L_1 = \{\mu(1, -1, 2);\ \mu$ — действительное$\}$,

$L_2 = \{\mu_1(1, 1, 0) + \mu_2(-2, 0, 1);\ \mu_1, \mu_2$ — действительные$\}$.

Далее получаем ортонормированную систему собственных векторов:

$$\left\{\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -1, 2);\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0);\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)\right\}.$$

Таким образом, посредством $C = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

матрица A преобразуется в $A' = C^TAC = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4.4.5.3.3. Преобразование квадратичных форм к главным осям. Под *квадратичной формой* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ понимают выражение вида x^TAx, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $A = \| a_{ik} \|$ — симметрическая матрица, a_{ik} — действительные числа. Матрица A называется *матрицей квадратичной формы*.

Например, $\Phi = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2$ является квадратичной формой, так как

$$\Phi = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^TAx.$$

Постановка задачи такова: найти такую ортогональную матрицу C, чтобы после введения новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при помощи уравнения $x = Cy$ данная квадратичная форма содержала только слагаемые с квадратами текущих координат: $x^TAx \xrightarrow[x = Cy]{} \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$. Такой вид квадратичной формы называют *каноническим*.

После замены переменных $x = Cy$ форма x^TAx переходит в форму $y^T(C^TAC)y$, которая должна содержать только слагаемые с квадратами переменных. Таким образом, задача равнозначна следующей: найти ортогональную матрицу C такую, чтобы матрица C^TAC имела диагональный вид. Это всегда возможно для симметрической матрицы A, если в качестве столбцов искомой матрицы C выбрать ортонормированную систему собственных векторов матрицы формы A. Тогда посредством замены $x = Cy$ квадратичная форма приводится к виду $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$, где λ_i — собственные значения матрицы A с учетом кратности. Собственные векторы матрицы A, стоящие в столбцах C, называются *главными осями* квадратичной формы, а процесс преобразования квадратичной формы в ее каноническую форму называется *приведением к главным осям* или *приведением к каноническому виду*.

Каноническая форма определяется однозначно с точностью до нумерации переменных y_i.

Пример. Для того чтобы квадратичную форму $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ привести к каноническому виду, вычислим собственные значения и соответствующие собственные подпространства матрицы $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Получим $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$; $L_1 = \{\mu(2, 2, -1)\}$, $L_2 = \{\mu(-1, 2, 2)\}$, $L_3 = \{\mu(2, -1, 2)\}$. Так как собственные значения попарно различны, то соответствующие им векторы попарно ортогональны, и, чтобы получить ортонормированную матрицу, их нужно только пронормировать. Заменой $x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}y$ заданная форма приводится к каноническому виду $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$.

Если все собственные значения симметрической матрицы A положительны (все отрицательны, все неотрицательны, все неположительны), то для всех $x \neq 0$ квадратичная форма x^TAx положительна (соответственно отрицательна, неотрицательна, неположительна) *).

Пример. Для действительных чисел x_1, x_2, x_3 таких, что $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, справедливо неравенство $3x_1^2 + 10x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_2x_3 > 4x_2^2 - 2x_1^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2$, так как в этом случае $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 > 0$, ибо матрица полученной квадратичной формы имеет только положительные собственные значения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Критерий положительной определенности квадратичной формы (критерий Сильвестра) приведен в 3.1.6.6.

*) Квадратичная форма в первом и втором случаях называется *определенной* (*положительно определенной* или *отрицательно определенной*) и в двух других случаях — *положительно* или *отрицательно полуопределенной*.

2.5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

К элементарным функциям относятся рациональные функции, степенные функции, тригонометрические функции и обратные к ним, показательные и логарифмические функции, гиперболические функции и обратные к ним, а также функции, представимые в виде суммы, разности, произведения, отношения или суперпозиции перечисленных функций («функции, заданные формулами», т. е. представимые в виде аналитического выражения, причем областью определения элементарной функции является множество всех чисел, для которых ее аналитическое выражение имеет смысл).

К неэлементарным функциям относятся, например:

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ для рациональных } x\\ 0 \text{ для иррациональных } x\end{cases}$$

(*функция Дирихле*): функция $y=[x]$ (*целая часть от* x), т. е. y равно наибольшему целому числу, не превосходящему x: функция $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$: функция $y=\int\limits_0^x\dfrac{\sin x}{x}dx$ (*интегральный синус*): функция $y=\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ (*гамма-функция*).

2.5.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.5.1.1. Целые рациональные функции.

2.5.1.1.1. Определение целой рациональной функции. Функция f называется *целой рациональной функцией* (или *многочленом*), если она может быть представлена в виде

$$y=f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}x^i \qquad (2.23)$$

для любого x (из области определения *)); числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ действительны (или комплексны); $a_0\neq 0$; $n\in\mathbb{N}$ (или $n=0$). Правая часть называется *многочленом* (относительно переменного x), числа a_i – *коэффициентами многочлена*, число n – *степенью целой рациональной функции* (или *степенью многочлена*). Представление (2.23) единственно, т. е. функции

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k,\qquad g(x)=\sum_{k=0}^{m}b_{n-k}x^k$$

равны тогда и только тогда, когда $m=n$ и $a_k=b_k$ для $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Выражение (2.23) называется *канонической формой* представления целой рациональной функции. Многочлен степени 1 называется *линейным*.

Примеры. 1) $f_1(x)=c$ – постоянная функция, степень f_1 равна 0.

2) $f_2(x)=x$, степень f_2 равна 1.

3) $f_3(x)=(7x+1)(3x+5)$, степень f_3 равна 2.

4) $f_4(x)=\sqrt{13}\,x^2-2\sqrt[3]{7}\,x^3+\cos\frac{\pi}{5}\cdot x$, степень f_4 равна 3.

*) Если для функции f, заданной аналитическим выражением, область определения не задана явно, то под этим всегда следует понимать множество всех действительных чисел x_0, для которых аналитическое выражение $y=f(x)$ дает действительное число $f(x_0)$.

Графики целых рациональных функций для некоторых частных случаев приведены в 1.2.1.1.

2.5.1.1.2. Разложение на линейные множители. Многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k$, $n\geqslant 1$, называется *приводимым*, если он может быть представлен в виде произведения многочленов низших степеней; в противном случае он называется *неприводимым*.

Многочлены нулевой степени (константы) не являются ни приводимыми, ни неприводимыми; многочлены первой степени всегда неприводимы. Возможность разложения на множители многочленов степени, большей единицы, зависит от выбора области определения коэффициентов, которая, в общем, не обязательно совпадает с множеством действительных чисел.

Пример. Многочлен x^4-7 неприводим, если считать, что коэффициенты многочленов должны быть рациональными числами. Если же в качестве области определения коэффициентов взять множество действительных чисел, то $x^4-7=(x^2+\sqrt{7})(x^2-\sqrt{7})$. Если же допустить существование комплексных коэффициентов, то данный многочлен может быть разложен на линейные множители:

$$x^4-7=(x-i\sqrt[4]{7})(x+i\sqrt[4]{7})(x+\sqrt[4]{7})(x-\sqrt[4]{7}).$$

Основная теорема алгебры. Любая целая рациональная функция n-й степени с коэффициентами из множества комплексных чисел может быть разложена на $n+1$ сомножителей, один из которых имеет нулевую степень, а n множителей линейны с единичными коэффициентами при переменном:

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Здесь α_i – комплексные числа. Если $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа, то для каждого линейного множителя $(x-\alpha_k)$ с комплексным α_k в разложении содержится линейный множитель $(x-\bar\alpha_k)$, где $\bar\alpha_k$ – число, комплексно сопряженное к α_k.

Если область определения коэффициентов сужена до множества действительных чисел, то любая целая рациональная функция n-й степени может быть разложена на множители первой и второй степени:

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots$$
$$\ldots(x-\alpha_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_lx+q_l), \qquad (2.24)$$

где $2l+r=n$, а $a_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_l$ – действительные числа.

2.5.1.1.3. Корни целых рациональных функций. Число x_j называется *корнем* (*нулем*) целой рациональной функции f с действительными коэффициентами, если

$$f(x_j)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x_j^k=0.$$

Если x_1 является корнем целой рациональной функции f степени n, то существует целая рациональная функция f_1 степени $n-1$ такая, что для каждого x, принадлежащего множеству D области определения f, имеет место равенство $f(x)=(x-x_1)f_1(x)$. Если, помимо этого, корнями f являются числа $x_2, x_3, \ldots, x_r$, то существует

целая рациональная функция f_r степени $n - r\ (r \leqslant n)$ такая, что для всех $x \in D$ имеет место равенство $f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_r) f_r(x)$.

Число x_j называется *корнем кратности* k_j (или *корнем* k_j*-го порядка*), если существует целая рациональная функция f_{k_j} такая, что

$$f(x) = (x - x_j)^{k_j} f_{k_j}(x) \text{ и } f_{k_j}(x_j) \neq 0.$$

Учитывая кратность корней, целую рациональную функцию f степени n можно представить в виде

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_s)^{k_s} g(x), \quad (2.25)$$

где $\sum_{j=1}^{s} k_j = r$, $g(x)$ – целая рациональная функция степени $n - r$. Из выражения (2.25) следует: целая рациональная функция степени n имеет не более n различных корней; если число корней равно n, то она может быть представлена в виде произведения n линейных множителей и одного множителя нулевой степени. Число корней (с учетом их кратности) является четным или нечетным в зависимости от того, является ли степень функции f четной или нечетной; если степень целой рациональной функции с действительными коэффициентами нечетна, то функция имеет по крайней мере один действительный корень.

Примеры. 1) $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Других действительных корней нет. Поэтому для этой функции существует представление $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)$.

2) $f(x) = x^8 - x^7 - 11x^6 + 11x^5 + 30x^4 - 58x^3 - 12x^2 + 88x - 48$ имеет корень $x_1 = 1$ кратности 2, корень $x_2 = 3$ (однократный) и корень $x_3 = -2$ кратности 3. Отсюда получаем разложение

$$f(x) = (x - 1)^2(x - 3)(x + 2)^3(x^2 - 2x + 2).$$

Корни и графики функций. Каждому корню функции f однозначно соответствует точка пересечения (или точка касания, если порядок корня равен четному числу) графика функции с осью абсцисс. В точке, соответствующей однократному корню, график имеет наклон, отличный от нуля; в точке, соответствующей многократному корню, наклон равен нулю, т. е. касательная к графику в точках, соответствующих многократным корням, совпадает с осью абсцисс.

Вычисление корней. Вычисление корней целых рациональных функций сводится к решению алгебраических уравнений $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k = 0$ (см. 2.4.2.3).

2.5.1.1.4. Поведение целых рациональных функций на бесконечности. Поведение целой рациональной функции f степени n на бесконечности зависит:

1) от знака коэффициента a_0 при x^n;

2) от четности или нечетности n.

n	Четное		Нечетное	
a_0	$a_0 > 0$	$a_0 < 0$	$a_0 > 0$	$a_0 < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Из того, что целые рациональные функции непрерывны во всей своей области определения, следует, что любая целая рациональная функция четной степени всегда ограничена либо сверху, либо снизу, а целая рациональная функция нечетной степени не ограничена ни сверху, ни снизу.

2.5.1.1.5. Частные случаи. *Линейные функции* – это целые рациональные функции первой степени: $f(x) = a_0x + a_1$, $a_0 \neq 0$. Они монотонно возрастают при $a_0 > 0$ и монотонно убывают при $a_0 < 0$. Графиками линейных функций являются прямые, которые пересекают координатные оси в точках $A(-a_1/a_0, 0)$ и $B(0, a_1)$ (см. 1.2.1.1).

Квадратичные функции – это целые рациональные функции второй степени: $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $a_0 \neq 0$. Преобразуя, получим

$$f(x) = a_0\left(x^2 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}\right) = a_0\left(\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{4a_0^2}\right)\right).$$

Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной $C\left(-\frac{a_1}{2a_0}, a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}\right)$, которая своими ветвями направлена в сторону положительных ($a_0 > 0$) или отрицательных ($a_0 < 0$) ординат (см. 1.2.1.1).

Степенные функции (с положительным показателем степени) – это целые рациональные функции $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Графики этих функций симметричны относительно оси ординат при четном n и центрально симметричны относительно начала координат при нечетном n; они называются *параболами n-го порядка* (см. 1.2.1.1).

2.5.1.2. Дробно-рациональные функции.

2.5.1.2.1. Определение дробно-рациональной функции. Функция f называется *рациональной функцией*, если она представима в виде отношения двух целых рациональных функций $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. в виде

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k}{\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}x^j}, \quad (2.26)$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ (или $m, n = 0$). При $m = 0$ это целая рациональная функция. При $m > 0$ функция f называется *дробно-рациональной функцией*.

Примечание. Выражение (2.26) называется *канонической формой представления дробно-рациональной функции* f, если функции $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней. Если $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общие корни $x_1, \ldots, x_k$, то

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_k)P_1(x)}{(x - x_1)\ldots(x - x_k)Q_1(x)},$$

где целые рациональные функции $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ не имеют общих корней. Следовательно, их отношение $f_1(x) = P_1(x)/Q_1(x)$ является канонической формой представления функции f_1. Выражение $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ описывает функцию f, значения которой совпадают со значениями f_1 во всей области определения f_1, исключая точки $x_j\ (j = 1, 2, \ldots, k)$, в которых функция f не определена. Расширяя область опреде-

ления функции f, получим функцию f_2 такую, что

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_j, \\ \lim\limits_{x \to x_j} f(x), \text{ если } x = x_j \text{ и предел конечен} \end{cases}$$

$(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Функция f_2 совпадает с функцией f_1.

Примеры.

1) $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - \sqrt{5}}$ (канонический вид).

2) $f_2(x) = \dfrac{2}{1 - x}$ (канонический вид).

3) $f_3(x) = \dfrac{2x - 6}{3x^2 - 6x - 9} = \dfrac{2(x-3)}{3(x-3)(x+1)}$.

Дробно-рациональная функция $f(x) = P(x)/Q(x)$ называется *правильной* дробно-рациональной функцией, если степень многочлена $Q(x)$ больше, чем степень многочлена $P(x)$ (примеры 2) и 3)), и *неправильной* в противном случае (пример 1)). Последнюю, разделив числитель на знаменатель (см. 2.4.1.3), можно разложить на сумму, состоящую из целой рациональной функции и правильной дробно-рациональной функции.

Пример. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 3x - 1 + \dfrac{2}{x - 1}$.

2.5.1.2.2. Нули и полюсы дробно-рациональных функций. Действительное число x_j называется *нулем* или *корнем* рациональной функции $f(x) = P(x)/Q(x)$, представленной в канонической форме, если $P(x_j) = 0$, а $Q(x_j) \neq 0$. Если при этом x_j является корнем кратности r многочлена $P(x)$, то x_j называется *корнем кратности* r функции $f(x)$. Таким образом, нахождение корней рациональных функций сводится к нахождению корней целых рациональных функций.

Действительное число x_i называется *полюсом* дробно-рациональной функции $f(x) = P(x)/Q(x)$, представленной в канонической форме, если $Q(x_i) = 0$, а $P(x_i) \neq 0$. Если при этом x_i является корнем кратности r многочлена $Q(x)$, то x_i называется *полюсом порядка* r.

Пример. Правильная функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$ имеет два однократных корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, полюсы $x_3 = 3$ (полюс 1-го порядка) и $x_4 = -2$ (полюс 2-го порядка).

В окрестности полюса x_i значение функции растет неограниченно, т. е. $\lim\limits_{x \to x_i} |f(x)| = +\infty$; прямая $x = x_i$ является асимптотой графика этой функции.

О поведении дробно-рациональной функции в окрестности полюса x_i можно сделать вывод по знакам значений $f(x_i + \varepsilon)$ и $f(x_i - \varepsilon)$, где ε – достаточно малое положительное число.

Пример. $x_i = 4$ является полюсом функции $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x}$; при малом $\varepsilon > 0$

$$f(x_i + \varepsilon) = \frac{4 + \varepsilon - 1}{(4 + \varepsilon)^2 - 4(4 + \varepsilon)} = \frac{3 + \varepsilon}{4\varepsilon + \varepsilon^2} > 0,$$

$$f(x_i - \varepsilon) = \frac{4 - \varepsilon - 1}{(4 - \varepsilon)^2 - 4(4 - \varepsilon)} = \frac{3 - \varepsilon}{-4\varepsilon + \varepsilon^2} < 0.$$

2.5.1.2.3. Поведение дробно-рациональных функций на бесконечности. Если дробно-рациональная функция f задана в виде

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_{m-j} x^j},$$

где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$, то для всех $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{x^n \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n-k}}{x^{n-k}} \right)}{x^m \left(\sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{b_{m-j}}{x^{m-j}} \right)} = \frac{x^n u(x)}{x^m v(x)},$$

где $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x) = a_0$ и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} v(x) = b_0$. Таким образом, получаем:

а) При $m = n$

$$\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)} = \frac{u(x)}{v(x)};$$

следовательно,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_0}{b_0},$$

т. е. прямая $y = a_0/b_0$ является асимптотой графика функции f.

б) При $n < m$

$$\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)} = \frac{u(x)}{x^{m-n} v(x)};$$

следовательно,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^{m-n}} \frac{u(x)}{v(x)} = 0,$$

т. е. асимптотой является ось абсцисс.

в) При $n > m$

$$\frac{x^n u(x)}{x^m v(x)} = \frac{x^{n-m} u(x)}{v(x)}.$$

Поведение функции на бесконечности зависит от знака дроби a_0/b_0 и от того, четно или нечетно число $n - m$. Для всех трех случаев, обозначив $a_0/b_0 = c$, получаем следующую таблицу:

	$m = n$	$n < m$	$n > m$			
			$n - m$ четно		$n - m$ нечетно	
			$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	c	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	c	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2.5.1.2.4. Степенные дробно-рациональные функции. Простейшими дробно-рациональными функциями являются степенные функции с целым отрицательным показателем

степени:

$$f(x) = x^n, \quad n = -1, -2, -3, \ldots$$

Если n нечетно, то $(-x)^n = -(x^n)$, т. е. эти функции являются нечетными; графики их представляют собой кривые типа гиперболы, центрально симметричные относительно начала координат. Асимптотами этих графиков являются координатные оси. В точке $x = 0$ эти функции не определены. Степенные функции с четным (отрицательным) показателем степени являются четными функциями, т. е. $(-x)^n = x^n$. Их графики симметричны относительно оси ординат. Асимптотами этих графиков являются ось абсцисс и ось ординат (положительное направление). В точке $x = 0$ эти функции не определены.

Если в выражении (2.26) $m = 1$, $n \leqslant 1$, то получается дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0^2(x + b_1/b_0)},$$

где $b_0 \neq 0$ и $a_1b_0 - a_0b_1 \neq 0$. Функция f имеет корень $x_1 = -a_1/a_0$ (если $a_0 \neq 0$) и полюс $x_2 = -b_1/b_0$. При $x \to \pm\infty$ значения функции стремятся к a_0/b_0. Графиком функции f является равносторонняя гипербола, ветви которой расположены симметрично относительно точки $M\left(-\frac{b_1}{b_0}, \frac{a_0}{b_0}\right)$. (Графики дробно-рациональных функций см. в 1.2.1.2.)

2.5.1.2.5. Разложение дробно-рациональных функций на элементарные дроби. Для интегрирования рациональных функций в общем случае необходимо разложить их на сумму простейших рациональных дробей.

Если

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_{m-j}x^j},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих корней, $n < m$ и $b_0 = 1$, то $f(x)$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_{11}}{(x - x_1)} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_{21}}{(x - x_2)} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{A_{s1}}{(x - x_s)} + \frac{A_{s2}}{(x - x_s)^2} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x - x_s)^{k_s}} + \\ & + \frac{B_{11} + C_{11}x}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{B_{12} + C_{12}x}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \ldots \\ & \ldots + \frac{B_{1l_1} + C_{1l_1}x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{B_{21} + C_{21}x}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \\ & + \frac{B_{22} + C_{22}x}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{2l_2} + C_{2l_2}x}{(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{B_{r1} + C_{r1}x}{(x^2 + p_rx + q_r)} + \frac{B_{r2} + C_{r2}x}{(x^2 + p_rx + q_r)^2} + \ldots \\ & \ldots + \frac{B_{rl_r} + C_{rl_r}x}{(x^2 + p_rx + q_r)^{l_r}}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где k_i, l_j, r, s — натуральные числа; A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, q_j, p_j — действительные числа; x_i — корни функции $Q(x)$; кроме того, $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Слагаемые в выражении (2.27) называются *элементарными* (*простейшими*) *дробями*.

Частные случаи.

1) Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет только однократные действительные корни, например $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то (2.27) имеет вид

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_m}{x - x_m}.$$

2) Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет действительные, но не обязательно однократные корни, например x_j — корень кратности k_j, то (2.27) имеет вид

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k_1} \frac{A_{1j}}{(x - x_1)^j} + \sum_{j=1}^{k_2} \frac{A_{2j}}{(x - x_2)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{k_s} \frac{A_{sj}}{(x - x_s)^j}.$$

3) Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет также и комплексные, но только однократные корни, то (2.27) имеет вид

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{x - x_j} + \sum_{j=1}^{l} \frac{B_j + C_jx}{x^2 + p_jx + q_j}.$$

Методы разложения на элементарные дроби. Сначала функция приводится к каноническому виду (см. (2.26)); в случае неправильной дробно-рациональной функции выделяется целая рациональная часть и значение коэффициента при члене с наибольшим показателем степени в многочлене, находящемся в знаменателе оставшейся правильной дробно-рациональной функции, приводится к 1. Далее, для разложения на элементарные дроби требуется, чтобы было известно множество решений уравнения $Q(x) = 0$, т. е. представление $Q(x)$ в виде произведения (см. (2.24)). Для определения коэффициентов при разложении на элементарные дроби существуют различные методы; поясним некоторые из них на примерах.

Метод неопределенных коэффициентов.

Пример 1.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x}{2x^2 - 4x + 2} = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x}{(x - 1)^2}.$$

Запишем

$$\frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2}.$$

Умножая обе части на $(x - 1)^2$, получим $x = A_1x + (A_2 - A_1)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $A_1 = 1$ и $A_2 - A_1 = 0$; следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Пример 2.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x} = \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x(x^2 + x + 1)^2}.$$

Запишем

$$f(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1+C_1x}{x^2+x+1}+\frac{B_2+C_2x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Умножим обе части на $x(x^2+x+1)^2$:

$$2x^4+2x^2-5x+1=$$

$$=A_1(x^2+x+1)^2+(B_1+C_1x)(x^2+x+1)x+(B_2+C_2x)x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим

$$A_1+C_1=2,\quad 2A_1+B_1+C_1=0,$$

$$3A_1+B_1+C_1+C_2=2,\quad 2A_1+B_1+B_2=-5,\quad A_1=1.$$

Отсюда $A_1=C_1=C_2=1$, $B_1=-3$ и $B_2=-4$. Таким образом,

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{-3+x}{x^2+x+1}+\frac{-4+x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Метод подстановки численных значений.

Пример 3.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Запишем $f(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x-2}$. Полагая последовательно для x значения 1, -2 и 3, получим систему

$$-\frac{1}{2}=A_1+\frac{1}{2}A_2-A_3,\quad -\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}A_1-A_2-\frac{1}{4}A_3,$$

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{3}A_1+\frac{1}{4}A_2+A_3.$$

Решение этой системы: $A_1=1/2$, $A_2=-1/3$, $A_3=5/6$. Таким образом, получаем разложение

$$f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{5}{6(x-2)}.$$

Метод предельных значений.

Пример 4.

$$f(x)=\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{x^5-15x^3+10x^2+60x-72}=$$

$$=\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2}.$$

Запишем

$$f(x)=\frac{A_{11}}{x-2}+\frac{A_{12}}{(x-2)^2}+\frac{A_{13}}{(x-2)^3}+\frac{A_{21}}{x+3}+\frac{A_{22}}{(x+3)^2}.\qquad(2.28)$$

Умножив (2.28) на $(x-2)^3$, получим

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x+3)^2}=$$

$$=A_{13}+(x-2)\left(A_{12}+(x-2)A_{11}+\right.$$

$$\left.+(x-2)^2\left(\frac{A_{21}}{x+3}+\frac{A_{22}}{(x+3)^2}\right)\right).$$

Устремив x в обеих частях к 2, получим $A_{13}=-3$. Умножив (2.28) на $(x+3)^2$ и устремив затем x к -3, получим $A_{22}=-5$. Простое преобразование выражения (2.28) дает в результате

$$f(x)+\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{5}{(x+3)^2}=\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=$$

$$=\frac{A_{11}}{x-2}+\frac{A_{12}}{(x-2)^2}+\frac{A_{21}}{x+3}.\qquad(2.29)$$

Аналогичным образом (т. е. умножая (2.29) на $(x-2)^2$ или на $(x+3)$ и устремляя x к 2 или к -3) получаем $A_{12}=0$, $A_{21}=2$. Преобразуя (2.29) в равенство $\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}-\frac{2}{x+3}=\frac{A_{11}}{x-2}$, получим, что $A_{11}=1$. Таким образом, приходим к разложению

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{-3}{(x-2)^3}+\frac{2}{x+3}+\frac{-5}{(x+3)^2}.$$

Примечание 1. Для случая, рассмотренного в примере 1, т. е. для разложения $f(x)$ вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-x_m},$$

по вышеописанному методу предельных значений имеем

$$A_j=\lim_{x\to x_j}(x-x_j)\frac{P(x)}{Q(x)}\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

С другой стороны,

$$\lim_{x\to x_j}\frac{Q(x)}{x-x_j}=\lim_{x\to x_j}\frac{Q(x)-Q(x_j)}{x-x_j}=Q'(x_j)\neq 0,$$

и, значит, разложение на элементарные дроби окончательно может быть записано так:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{P(x_j)}{Q'(x_j)}\frac{1}{x-x_j}.$$

Примечание 2. Для случая, рассмотренного в примере 4, неопределенные коэффициенты можно искать по

Таблица к п. 2.5.1.3.

	$n=2m-1;\ m\in\mathbb{N}$	$n=2m;\ m\in\mathbb{N}$	
Степенная функция	$g(x)=x^n$	$g(x)=x^n$	
Иррациональная функция	$f(x)=\begin{cases}-\sqrt[n]{-x} & \text{для } -\infty<x<0\\ \sqrt[n]{x} & \text{для } 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$	$f(x)=\sqrt[n]{x}$ $0\leqslant x<+\infty$	$f(x)=-\sqrt[n]{x}$ $0\leqslant x<+\infty$
Область значений f	$-\infty<y<+\infty$	$0\leqslant y<+\infty$	$-\infty<y\leqslant 0$
Точки перегиба	M_0 (0, 0)	нет	нет
Поведение функции на интервалах монотонности	монотонно возрастает	монотонно возрастает	монотонно убывает

формулам

$$A_{13} = \lim_{x\to 2} [(x-2)^3 f(x)], \quad A_{12} = \frac{1}{1!}\lim_{x\to 2} [(x-2)^3 f(x)]',$$

$$A_{11} = \frac{1}{2!}\lim_{x\to 2} [(x-2)^3 f(x)]'', \quad A_{22} = \lim_{x\to -3} [(x+3)^2 f(x)],$$

$$A_{21} = \frac{1}{1!}\lim_{x\to -3} [(x+3)^2 f(x)]'.$$

2.5.1.3. Иррациональные алгебраические функции. Простые иррациональные алгебраические функции, называемые также степенными функциями с *дробными показателями степени* вида $1/n$, где n — натуральное число, являются обратными к степенным функциям с натуральными показателями степени. В случае четного показателя степени существуют две обратные функции; для нечетного показателя — одна обратная функция.

Графики иррациональных функций см. в 1.2.1.3; свойства приведены в таблице на стр. 173.

2.5.2. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Неалгебраические функции называются *трансцендентными* (см. 2.5.1). К наиболее важным трансцендентным функциям относятся тригонометрические функции, показательные функции, гиперболические функции, а также функции, обратные к ним.

2.5.2.1. Тригонометрические функции и обратные к ним.

2.5.2.1.1. Определение тригонометрических функций. Пусть круг радиуса r с центром в начале (прямоугольной декартовой) системы координат пересекает положительную ось абсцисс в точке S (рис. 2.7). Движущаяся по окружности точка P с координатами ξ, η определяет угол SOP, величину которого (в радианах или в градусах — см. 2.6.3) обозначим через x. При этом x положительно, если точка P, начиная движение из точки S, пробегает окружность в направлении против часовой стрелки (положительном направлении). *Тригонометрические круговые функции* (функции угла) определяются следующими равенствами:

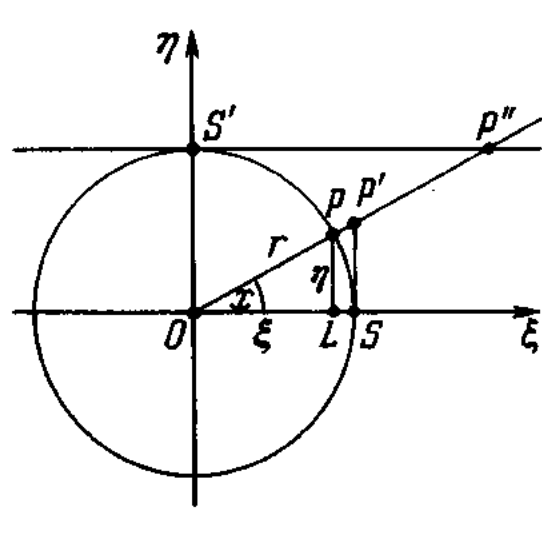


Рис. 2.7

синус: $f(x) = \sin x = \frac{\eta}{r}$;

косинус: $f(x) = \cos x = \frac{\xi}{r}$;

тангенс: $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\eta}{\xi}$;

котангенс: $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\xi}{\eta}$;

секанс: $f(x) = \sec x = \frac{r}{\xi}$;

косеканс: $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{r}{\eta}$.

Область определения тригонометрических функций состоит из множества действительных чисел x, за исключением значений, обращающих в нуль знаменатель.

Примечания. 1) Косинус (лат. «complementi sinus» — дополнительный к синусу) является синусом дополнительного угла, и, наоборот, синус является косинусом дополнительного угла; соответственно также тангенс и котангенс или секанс и косеканс находятся друг с другом в отношении функция — кофункция, т. е. имеют место равенства (x — в радианах)

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sec x = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

2) Благодаря простым соотношениям $\sec x = 1/\cos x$ и $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ функции секанс и косеканс используются на практике сравнительно редко (в основном в астрономии). В связи с этим подробные сведения о свойствах этих функций здесь приводиться не будут.

3) Если в определении круговых функций специально выбрать $r = 1$, то значения тригонометрических функций могут быть определены (при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$) как длины следующих отрезков (см. рис. 2.7): $\sin x$ соответствует PL; $\cos x$ соответствует OL; $\operatorname{tg} x$ соответствует $P'S$; $\operatorname{ctg} x$ соответствует $S'P''$.

Периодичность тригонометрических функций. Так как положения движущейся по окружности точки, соответствующие двум углам, величины которых отличаются на число, кратное 2π, совпадают, то значения всех тригонометрических функций периодически повторяются, т. е. имеют место равенства $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, а для тангенса и котангенса даже $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$ и $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k\pi)$, при этом $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Соотношения в прямоугольном треугольнике. Для значений аргумента x между 0 и $\pi/2$, рассматриваемого в качестве угла прямоугольного треугольника, имеем следующие соотношения для тригонометрических функций:

$$\sin x = \frac{a}{c}, \quad \cos x = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{b}{a}, \quad \sec x = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{c}{a},$$

где (рис. 2.8) a — длина противолежащего катета, b — длина прилежащего катета, c — длина гипотенузы.

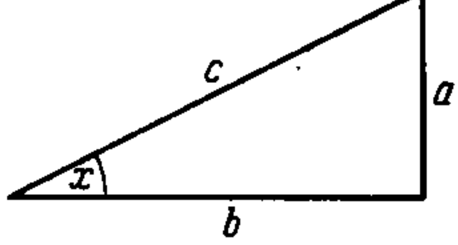


Рис. 2.8

Графики тригонометрических функций см. в 1.2.2.1, таблицы значений функций — в 1.1.1.10.

Вспомогательные методы для нахождения значений, которые не могут быть непосредственно определены из таблиц.

2.5.2.1.2. Свойства тригонометрических функций.

1) Значения тригонометрических функций для аргументов, значения которых лежат между $\pi/2$ и 2π, сводятся к значениям функций от аргу-

	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f(x)=\operatorname{ctg} x$
Область определения	$-\infty<x<+\infty$	$-\infty<x<+\infty$	$-\infty<x<+\infty$ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$-\infty<x<+\infty$ $x\neq k\pi$
Область значений	$-1\leqslant f(x)\leqslant+1$	$-1\leqslant f(x)\leqslant+1$	$-\infty<f(x)<+\infty$	$-\infty<f(x)<+\infty$
Нули	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
Полюсы	нет	нет	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$
Длина периода	2π	2π	π	π
Экстремумы в точках	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	нет	нет
Точки перегиба	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
Четность функции	нечетная	четная	нечетная	нечетная

$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$

ментов, лежащих между 0 и $\pi/2$, при помощи следующих *формул приведения*:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,$$
$$\sin(\pi\pm x)=\mp\sin x,$$
$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm x\right)=-\cos x,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,\quad \cos(\pi\pm x)=-\cos x,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm x\right)=\pm\sin x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{tg}(\pi\pm x)=\pm\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm x\right)=\mp\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(\pi\pm x)=\pm\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm x\right)=\mp\operatorname{tg} x.$$

2) Значение тригонометрической функции f от отрицательного аргумента может быть выражено через значение соответствующей функции от положительного аргумента при помощи соотношений $f(-x)=f(x)$ для косинуса и $f(-x)=-f(x)$ для синуса, тангенса и котангенса.

3) Для определения значений тригонометрических функций при значении аргумента $|x|\geqslant 2\pi$ нужно учитывать периодичность тригонометрических функций (см. 2.5.2.1.1).

4) Значение любой тригонометрической функции для значений аргумента между $\pi/4$ и $\pi/2$ может быть сведено к значению дополнительной функции для дополнительного угла. Это используется в таблицах тригонометрических функций.

5) При выполнении различных действий с тригонометрическими функциями полезно знать значения функций для некоторых углов и знаки значений функций в четырех квадрантах:

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Квадрант	Аргумент	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
I	$0<x<\frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	+	–	–	–
III	$\pi<x<\frac{3}{2}\pi$	–	–	+	+
IV	$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$	–	+	–	–

2.5.2.1.3. Соотношения между тригонометрическими функциями.

Связь между функциями с одинаковым значением аргумента *).

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,$$

$$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1,$$

$$\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1, \quad \cos x \cdot \sec x = 1.$$

Теоремы сложения для суммы и разности аргументов *).

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x},$$

$$\sin(x + y + z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z,$$

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z.$$

Теоремы сложения для кратных аргументов.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\sin 4x = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x,$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x},$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2},$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1},$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x},$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 6 \operatorname{ctg}^2 x + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 x - 4 \operatorname{ctg} x}.$$

Для бóльших значений n выражения для $\sin nx$ и $\cos nx$ получают, пользуясь формулой Муавра для комплексных чисел (см. 3.4 2):

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k C_n^k \cos^{n-k} x \sin^k x.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \ldots,$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$$

Для функций *половинного аргумента* имеют место следующие соотношения (знак + или − выбирается в соответствии с тем, в какой четверти (квадранте) находится угол – аргумент $x/2$):

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

Теоремы сложения для суммы и разности функций.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right),$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y},$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x - y)}{\cos x \sin y},$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x + y)}{\sin x \cos y}.$$

Произведения тригонометрических функций.

$$\sin(x + y) \sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x,$$

$$\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x,$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)],$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)],$$

*) Следует заметить, что правые части приводимых формул могут быть неэквивалентны левым частям при некоторых значениях аргумента.

$$\sin x \sin y \sin z = \frac{1}{4}[\sin(x+y-z) + \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) - \sin(x+y+z)],$$

$$\sin x \cos y \cos z = \frac{1}{4}[\sin(x+y-z) - \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) + \sin(x+y+z)],$$

$$\sin x \sin y \cos z = \frac{1}{4}[-\cos(x+y-z) + \cos(y+z-x) + \cos(z+x-y) - \cos(x+y+z)],$$

$$\cos x \cos y \cos z = \frac{1}{4}[\cos(x+y-z) + \cos(y+z-x) + \cos(z+x-y) + \cos(x+y+z)],$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = -\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y},$$

$$\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = -\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y} = -\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y}.$$

Соотношения между квадратами тригонометрических функций с одинаковым значением аргумента.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^2 x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{cosec}^2 x$
$\sin^2 x$		$1-\cos^2 x$	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$	$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}$
$\cos^2 x$	$1-\sin^2 x$		$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$	$\frac{1}{\sec^2 x}$	$\frac{\operatorname{cosec}^2 x - 1}{\operatorname{cosec}^2 x}$
$\operatorname{tg}^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$	$\sec^2 x - 1$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$
$\operatorname{ctg}^2 x$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$		$\frac{1}{\sec^2 x - 1}$	$\operatorname{cosec}^2 x - 1$

Степени тригонометрических функций.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x),$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x),$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).$$

Для вычисления $\sin^n x$ и $\cos^n x$ при бóльших натуральных показателях степени n можно использовать формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$ (см. выше).

2.5.2.1.4. Синусоидальная функция общего вида $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Многие процессы в природе и технике имеют колебательный характер, что в математической форме записывается в виде функции $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (где A, ω, φ — действительные числа и $A \neq 0$, $\omega \neq 0$). Если сравнить график функции $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin\omega(x + \varphi/\omega)$ с графиком функции $y = \sin x$, то видно, что параметр A вызывает сжатие ($|A| < 1$) или растяжение ($|A| > 1$) графика вдоль оси ординат; если $A < 0$, то график будет к тому же зеркально отражен относительно оси абсцисс; параметр ω изменяет (наименьший) период колебаний, период становится равным $2\pi/|\omega|$; слагаемое φ вызывает смещение графика функции вдоль оси абсцисс на $|\varphi/\omega|$ единиц (см. 1.2.2.1 и рис. 1.22).

Пример. График функции $f(x) = -2\sin(2x + \pi/4)$ по сравнению с графиком функции $g(x) = \sin x$ зеркально отражен и сжат в два раза относительно оси абсцисс, растянут в два раза вдоль оси ординат и сдвинут на $\pi/8$ в отрицательном направлении оси абсцисс. Наименьший период функции f равен π.

Физическая интерпретация функции $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Если выбрать в качестве независимого переменного время t, то получим $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Здесь φ — это смещение по фазе, или «начальная фаза», $T = 2\pi/\omega$ — «период колебаний», $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$ — «частота колебаний», $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — круговая, или циклическая, частота (число колебаний за 2π секунд) и A — «амплитуда колебаний». Если A зависит от времени по закону $A = A(t) = e^{-Rt}$, где $R > 0$, то амплитуда постепенно уменьшается (затухающее колебание; см. 1.2.2.2). Если колебания накладываются друг на друга, то результат определяется как сумма синусоидальных величин; если колебания имеют одинаковую частоту, то их сумма имеет ту же частоту:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega t + \varphi_k) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

При $n = 2$ имеют место следующие соотношения:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Функцию $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ можно также представить в виде $f(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$, причем

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},\ a/A = \cos\varphi,\ b/A = \sin\varphi.$$

2.5.2.1.5. Определение обратных тригонометрических функций. Функции, обратные к тригонометрическим функциям, назы-

ваются *обратными круговыми* или *обратными тригонометрическими* функциями.

Пусть k — целое число.

Функции, обратные к функциям $\left\{\begin{matrix} y = \sin x \\ y = \cos x \\ y = \operatorname{tg} x \\ y = \operatorname{ctg} x \end{matrix}\right\}$,

рассматриваемым на каждом из промежутков $\left\{\begin{matrix} \left[\frac{2k-1}{2}\pi,\ \frac{2k+1}{2}\pi\right] \\ [k\pi,\ (k+1)\pi] \\ \left(\frac{2k-1}{2}\pi,\ \frac{2k+1}{2}\pi\right) \\ (k\pi,\ (k+1)\pi) \end{matrix}\right\}$,

называются $\left\{\begin{matrix} \text{арксинусом*)}, \\ \text{арккосинусом}, \\ \text{арктангенсом}, \\ \text{арккотангенсом} \end{matrix}\right\}$

и обозначаются $\left\{\begin{matrix} y = \operatorname{Arcsin} x, \\ y = \operatorname{Arccos} x, \\ y = \operatorname{Arctg} x, \\ y = \operatorname{Arcctg} x. \end{matrix}\right\}$

Наиболее часто применяются обратные тригонометрические функции, которые получаются, если положить в вышеприведенных интервалах $k = 0$ (так называемые *главные значения*; они обозначаются соответственно $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$).

Примеры. $\arcsin 0 = 0$, $\arccos(1/2) = \pi/3$, $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi/6$

2.5.2.1.6. Свойства обратных тригонометрических функций.

2.5.2.1.7. Соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Суммы и разности обратных тригонометрических функций.

$$\arcsin x + \arcsin y =$$

$$= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{при } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

$$= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{при } x > 0,\ y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1;$$

$$= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{при } x < 0,\ y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1;$$

$$\arcsin x - \arcsin y =$$

$$= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{при } xy \geqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

$$= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{при } x > 0,\ y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1;$$

$$= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad \text{при } x < 0,\ y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1;$$

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения	$-1 \leqslant x \leqslant +1$	$-1 \leqslant x \leqslant +1$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Область значений	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$
Монотонность	монотонно возрастает	монотонно убывает	монотонно возрастает	монотонно убывает
Точки перегиба	(0, 0)	(0, π/2)	(0, 0)	(0, π/2)
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	—	—	$-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$	π, 0

Графики обратных тригонометрических функций см. в 1.2.2.1. Таблицы значений обратных тригонометрических функций см. в 1.1.1.9 и 1.1.1.10.

*) Arcus — дуга; запись $y = \operatorname{Arcsin} x$ означает, что y есть величина такого угла в радианах, синус которого равен x (лат.: arcus cuius sinus x est).

$$\arccos x + \arccos y =$$

$$= \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \quad \text{при } x + y \geqslant 0;$$

$$= 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \quad \text{при } x + y < 0;$$

$\arccos x - \arccos y =$

$= -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ при $x \geqslant y$;

$= \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ при $x < y$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ при $xy < 1$;

$= \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ при $x > 0,\ xy > 1$;

$= -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ при $x < 0,\ xy > 1$;

$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ при $xy > -1$;

$= \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ при $x > 0,\ xy < -1$;

$= -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ при $x < 0,\ xy < -1$.

2.5.2.2. Показательная и логарифмическая функции.

2.5.2.2.1. Определение показательной и логарифмической функций. Функция f называется *показательной*, если для каждого значения x, принадлежащего области определения, имеет место равенство

$$y = f(x) = a^x,$$

где $a > 0$ – действительное число, $a \neq 1$.

Областью определения функции $f(x) = a^x$ является множество действительных чисел; так как $a^x > 0$ для всех x, то множеством значений функции является множество положительных действительных чисел. При $a > 1$ функция является строго возрастающей, при $0 < a < 1$ – строго убывающей.

Так как $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, то каждая показательная функция f удовлетворяет теореме сложения $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$. Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$.

Существование логарифмической функции обеспечивается строгой монотонностью показательной функции на всей ее области определения. Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

2.5.2.2.2. Частные случаи показательных и логарифмических функций. Если умножить значения функции на действительное положительное число k, т. е. перейти к функции $g(x) = ka^x$, то в силу равенства $ka^x = a^{x+\log_a k}$ это означает сдвиг графика функции f на $\log_a k$ единиц в положительном направлении вдоль оси абсцисс.

Если в выражении $f(x) = a^x$ в качестве a взять число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, трансцендентное число $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$, то получим показательную функцию $f(x) = e^x$, играющую важную роль в естественных науках. Значения функции e^x с любой точностью можно вычислить при помощи степенного ряда (см. 3.1.14.6):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Применения функции $f(x) = e^x$. Процессы (органического) роста: $g(t) = g_0e^{ct}$ (g_0 – начальная величина, c – постоянная роста).

Процессы распада: $m(t) = m_0e^{-\lambda t}$ (m_0 – начальная величина, λ – постоянная распада).

Затухающие колебания: $f(t) = e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi)$ (см. 2.5.2.1.4).

Теория ошибок: $f(x) = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса – функция ошибок).

Функция, обратная к $y = e^x$, обозначается $y = \ln x$.

Так как $\log_a(kx) = \log_a k + \log_a x$, то график функции $g(x) = \log_a(kx)$, где $k > 0$, получается из графика функции $f(x) = \log_a x$ сдвигом последнего на $\log_a k$ единиц в положительном направлении оси ординат.

2.5.2.2.3. Свойства показательной и логарифмической функций.

	$y = a^x$, $a > 1$	$y = a^x$, $0 < a < 1$
Область определения	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Область значений	$0 < y < +\infty$	$0 < y < +\infty$
Монотонность	монотонно возрастающая	монотонно убывающая
Нули	нет	нет
Точки пересечения с осью ординат	$y=1$	$y=1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	0	$+\infty$
	$y = \log_a x$, $a > 1$	$y = \log_a x$, $0 < a < 1$
Область определения	$0 < x < +\infty$	$0 < x < +\infty$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Монотонность	монотонно возрастающая	монотонно убывающая
Нули	$x=1$	$x=1$
Точки пересечения с осью ординат	нет	нет
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	не имеет смысла	не имеет смысла

Графики показательных и логарифмических функций см. в 1.2.2.2. Таблицы значений показательной и логарифмической функций см. в 1.1.1.10 – 1.1.1.12.

2.5.2.3. Гиперболические функции и обратные к ним.

2.5.2.3.1. Определение гиперболических функций.

Синус гиперболический

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Тангенс гиперболический

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Секанс гиперболический

$$y = \operatorname{sch} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Косинус гиперболический

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Котангенс гиперболический

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Косеканс гиперболический

$$y = \operatorname{csch} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Графики гиперболических функций см. в 1.2.2.3. Таблицы значений гиперболических функций см. в 1.1.1.10.

2.5.2.3.3. Соотношения между гиперболическими функциями. Приведенные ниже равенства аналогичны соотношениям между тригонометрическими функциями.

Замечание. Равенства, в которых гиперболические функции f встречаются в форме $f(x)$ или $f(ax)$, могут быть получены по аналогии с выводом соотношений для соответствующих тригонометрических функций, если формально заменить $\sin x$ на $i \operatorname{sh} x$ и $\cos x$ на $\operatorname{ch} x$, где $i^2 = -1$ (см. также 3.4.1).

Примеры. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ преобразуется в $\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ преобразуется в $i \operatorname{sh} 2x = 2i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, или $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Основные соотношения:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{\operatorname{cth} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1.$$

2.5.2.3.2. Свойства гиперболических функций.

	$y = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{th} x$	$y = \operatorname{cth} x$
Область определения	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$ $x \neq 0$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$	$1 \leqslant y < +\infty$	$-1 < y < +1$	$-\infty < y < -1$ $+1 < y < +\infty$
Нули	$x = 0$	нет	$x = 0$	нет
Асимптоты	нет	нет	$y = \pm 1$	$x = 0$ $y = \pm 1$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$	$\pm\infty$	$+\infty$	± 1	± 1
Монотонность	монотонно возрастает	на $(-\infty, 0)$ монотонно убывает, на $(0, +\infty)$ монотонно возрастает	монотонно возрастает	на $(-\infty, 0)$ монотонно убывает, на $(0, +\infty)$ монотонно убывает
Экстремумы	нет	минимум $x = 0$	нет	нет
Точки перегиба	$x = 0$	нет	$x = 0$	нет
Четность функции	нечетная	четная	нечетная	нечетная

Соотношения между квадратами гиперболических функций с одинаковым значением аргумента

	sh^2x	ch^2x	th^2x	cth^2x	sch^2x	csch^2x
sh^2x	–	ch^2x-1	$\frac{\mathrm{th}^2x}{1-\mathrm{th}^2x}$	$\frac{1}{\mathrm{cth}^2x-1}$	$\frac{1-\mathrm{sch}^2x}{\mathrm{sch}^2x}$	$\frac{1}{\mathrm{csch}^2x}$
ch^2x	sh^2x+1	–	$\frac{1}{1-\mathrm{th}^2x}$	$\frac{\mathrm{cth}^2x}{\mathrm{cth}^2x-1}$	$\frac{1}{\mathrm{sch}^2x}$	$\frac{1+\mathrm{csch}^2x}{\mathrm{csch}^2x}$
th^2x	$\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{sh}^2x+1}$	$\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x}$	–	$\frac{1}{\mathrm{cth}^2x}$	$1-\mathrm{sch}^2x$	$\frac{1}{1+\mathrm{csch}^2x}$
cth^2x	$\frac{\mathrm{sh}^2x+1}{\mathrm{sh}^2x}$	$\frac{\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{ch}^2x-1}$	$\frac{1}{\mathrm{th}^2x}$	–	$\frac{1}{1-\mathrm{sch}^2x}$	csch^2x+1

Теоремы сложения для суммы и разности аргументов.

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y,$$
$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y,$$
$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}\,x \pm \mathrm{th}\,y}{1 \pm \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y},$$
$$\mathrm{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \mathrm{cth}\,x\,\mathrm{cth}\,y}{\mathrm{cth}\,x \pm \mathrm{cth}\,y}.$$

Теоремы сложения для двойного и половинного аргументов.

$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x,$$
$$\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x,$$
$$\mathrm{th}\,2x = \frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{th}^2 x},$$
$$\mathrm{cth}\,2x = \frac{1 + \mathrm{cth}^2 x}{2\,\mathrm{cth}\,x},$$

$$\mathrm{sh}\frac{x}{2} = \sqrt{(\mathrm{ch}\,x - 1)/2} \quad \text{при } x \geqslant 0,$$
$$\mathrm{sh}\frac{x}{2} = -\sqrt{(\mathrm{ch}\,x - 1)/2} \quad \text{при } x < 0,$$
$$\mathrm{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{(\mathrm{ch}\,x + 1)/2},$$
$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\,x - 1}{\mathrm{sh}\,x},$$
$$\mathrm{cth}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} = \frac{\mathrm{ch}\,x + 1}{\mathrm{sh}\,x}.$$

Сумма и разность гиперболических функций.

$$\mathrm{sh}\,x \pm \mathrm{sh}\,y = 2\,\mathrm{sh}\frac{x \pm y}{2}\mathrm{ch}\frac{x \mp y}{2},$$
$$\mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,y = 2\,\mathrm{ch}\frac{x + y}{2}\mathrm{ch}\frac{x - y}{2},$$
$$\mathrm{ch}\,x - \mathrm{ch}\,y = 2\,\mathrm{sh}\frac{x + y}{2}\mathrm{sh}\frac{x - y}{2},$$
$$\mathrm{th}\,x \pm \mathrm{th}\,y = \frac{\mathrm{sh}(x \pm y)}{\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y}.$$

Формула Муавра.

$$(\mathrm{ch}\,x \pm \mathrm{sh}\,x)^n = \mathrm{ch}\,nx \pm \mathrm{sh}\,nx.$$

2.5.2.3.4. Определение обратных гиперболических функций. Функции, обратные к гиперболическим, называются также *ареафункциями.* Они определяются следующим образом:

ареасинус

$$y = \mathrm{Arsh}\,x, \text{ если } x = \mathrm{sh}\,y;$$

ареакосинус *)

$$y = \mathrm{Arch}\,x, \text{ если } x = \mathrm{ch}\,y;$$

ареатангенс

$$y = \mathrm{Arth}\,x, \text{ если } x = \mathrm{tg}\,y;$$

ареакотангенс

$$y = \mathrm{Arcth}\,x, \text{ если } x = \mathrm{cth}\,y.$$

Явное выражение обратных гиперболических функций через логарифмические функции. Если приведенные в 2.5.2.3.1 функциональные уравнения разрешить относительно x и затем формально поменять переменные местами, то получим

$$y = \mathrm{Arsh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$
$$y = \mathrm{Arch}\,x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$
$$(\text{для } x \geqslant 1 \text{ и } -\infty < y \leqslant 0),$$
$$y = \mathrm{Arch}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$
$$(\text{для } x \geqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant y < +\infty),$$
$$y = \mathrm{Arth}\,x = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$
$$(\text{при } |x| < 1),$$
$$y = \mathrm{Arcth}\,x = \ln\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1}$$
$$(\text{при } |x| > 1).$$

---

*) Следует учесть, что $y = \mathrm{ch}\,x$ не во всей области определения – монотонная функция. Следовательно, обратную функцию получают отдельно для каждого из двух промежутков монотонности.

2.5.2.3.5. Свойства обратных гиперболических функций.

	$y = \operatorname{Arsh} x$	$y = \operatorname{Arch} x$	$y = \operatorname{Arth} x$	$y = \operatorname{Arcth} x$
Область определения	$-\infty < x < +\infty$	$1 \leqslant x < +\infty$	$-1 < x < +1$	$-\infty < x < -1$ $+1 < x < +\infty$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$	$0 \leqslant y < +\infty$ или $-\infty < y \leqslant 0$	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$ $y \neq 0$
Нули	$x=0$	$x=1$	$x=0$	нет
Асимптоты	нет	нет	$x=\pm 1$	$y=0$ $x=\pm 1$
Поведение на бесконечности	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{Arsh} x = \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arch} x = +\infty$ для $\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arch} x = -\infty$ для $\operatorname{Arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$	–	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{Arcth} x = 0$
Точки перегиба	$x=0$	нет	$x=0$	нет
Четность функции	нечетная	ни четная, ни нечетная	нечетная	нечетная

Графики ареафункций получаются из графиков соответствующих гиперболических функций зеркальным отражением относительно прямой $y = x$ (см. 1.2.2.3).

2.5.2.3.6. Соотношения между обратными гиперболическими функциями.

	$\operatorname{Arsh} x$	$\operatorname{Arch} x$	$\operatorname{Arth} x$	$\operatorname{Arcth} x$
$\operatorname{Arsh} x$	–	$\pm\operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arcth}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\operatorname{Arch} x$	$\pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1}$	–	$\pm\operatorname{Arth}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm\operatorname{Arcth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x$	$\operatorname{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{Arch}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	–	$\operatorname{Arcth}\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{Arcth} x$	$\operatorname{Arsh}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{Arch}\dfrac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arth}\dfrac{1}{x}$	–

Во втором столбце таблицы принято, что

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

и для $x > 0$ берется знак $+$, а для $x < 0$ берется знак $-$.

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}),$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arsh}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth}\frac{x \pm y}{1 \pm xy},$$

$$\operatorname{Arcth} x \pm \operatorname{Arcth} y = \operatorname{Arcth}\frac{1 \pm xy}{x \pm y}.$$

2.6. ГЕОМЕТРИЯ

2.6.1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольник. Сумма двух сторон в треугольнике (рис. 2.9) больше третьей стороны: $b + c > a$. Сумма углов в треугольнике равна 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Треугольник определен, если задан какой-нибудь из следующих наборов его элементов: 1) три

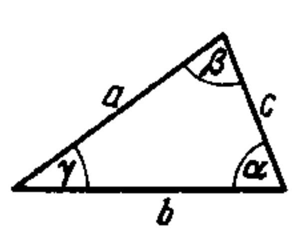


Рис. 2.9

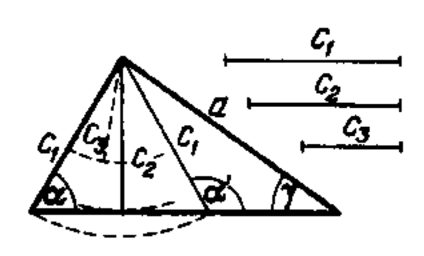


Рис. 2.10

стороны; 2) две стороны и угол между ними; 3) сторона и два прилежащих к ней угла. Если заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон, то при помощи этих элементов можно построить либо два, либо один, либо ни одного треугольника (рис. 2.10); подробнее см. 2.6.3.1.2.

Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны. Медианы треугольника пересекаются в одной точке – центре тяжести треугольника (рис. 2.11) – и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины). Длина медианы, проведенной к стороне a, равна

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

(см. также 2.6.3.1.2).

Биссектрисой треугольника называется лежащий в треугольнике отрезок прямой, которая

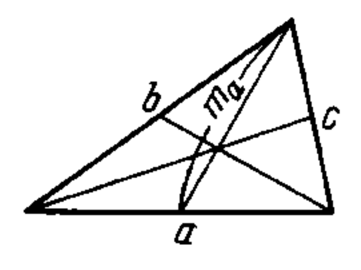


Рис. 2.11

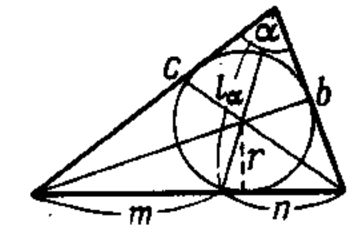


Рис. 2.12

делит его внутренний угол пополам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности (рис. 2.12); о радиусе вписанной окружности r см. 2.6.3.1.2. Длина биссектрисы угла α вычисляется по формуле (см. также 2.6.3.1.2)

$$l_\alpha = \frac{\sqrt{bc\,[(b + c)^2 - a^2]}}{b + c}.$$

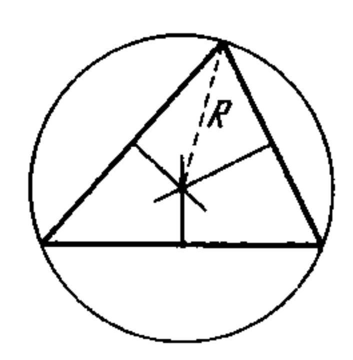


Рис. 2.13

Центр описанной окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах (рис. 2.13); о радиусе описанной окружности R см. 2.6.3.1.2.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой его *ортоцентром*; о длинах высот h_a, h_b, h_c *) см. 2.6.3.1.2.

Высота, медиана и биссектриса, опущенные на одну и ту же сторону, совпадают, если две другие стороны треугольника равны (*равнобедренный треугольник*). Совпадения двух из этих отрезков достаточно для того, чтобы треугольник был равнобедренным.

Для *равностороннего* треугольника ($a = b = c$) центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и ортоцентр совпадают.

Средней линией называется отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника; она параллельна третьей стороне и равна половине ее длины.

Площадь треугольника:

$$S = bh_b/2 = (ab \sin\gamma)/2 = rp = abc/(4R) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = (a + b + c)/2$.

Прямоугольный треугольник (рис. 2.14): c – гипотенуза, a и b – катеты. Имеют место равенства: $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора), $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. Площадь: $S = ab/2 = (a^2 \operatorname{tg}\beta)/2 = (c^2 \sin 2\beta)/4$.

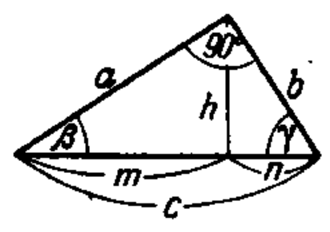


Рис. 2.14

Тригонометрические формулы, относящиеся к треугольнику, см. в 2.6.3.1.1.

Треугольники (а также многоугольники с одинаковым числом сторон) *подобны*, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Для подобия треугольников достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого; 2) два угла одного треугольника равны двум углам другого; 3) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между ними, равны.

Площади подобных фигур пропорциональны квадратам соответствующих линейных элементов (сторон, высот, диагоналей и т. п.).

Параллелограмм (рис. 2.15). Основные свойства: 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные стороны параллельны; 3) диагонали в точке пересечения делятся пополам; 4) противоположные углы равны. Наличие у четырехугольника одного из двух последних свойств или равенства и параллельности одной пары противоположных сторон вызывает как следствия все остальные свойства.

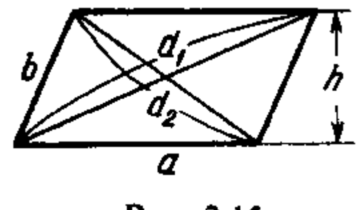


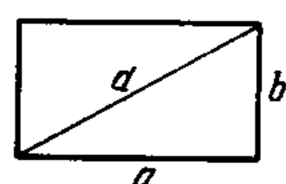
Рис. 2.15

Диагонали и стороны связаны соотношением $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Площадь: $S = ah$.

Прямоугольник и квадрат. Параллелограмм является *прямоугольником* (рис. 2.16), если: 1) все углы прямые или 2) диагонали равны (одно из этих свойств есть следствие другого). Площадь: $S = ab$.

*) h_b означает высоту, опущенную на строку b треугольника.

Прямоугольник есть *квадрат* (рис. 2.17), если $a = b$. Имеют место формулы $d = a\sqrt{2} \approx 1{,}414a$; $a = \sqrt{2}\,d/2 \approx 0{,}707d$. Площадь: $S = a^2 = d^2/2$.



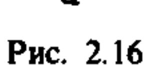


Рис. 2.16

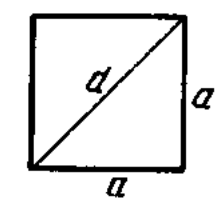


Рис. 2.17

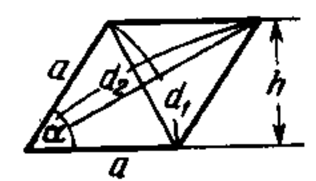


Рис. 2.18

Ромб. Параллелограмм является *ромбом* (рис. 2.18), если у него: 1) все стороны равны, или 2) диагонали взаимно перпендикулярны, или 3) диагонали делят углы параллелограмма пополам (одно из этих свойств влечет как следствия два остальных). Площадь: $S = ah = a^2 \sin\alpha = d_1 d_2/2$.

Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 2.19), a и b – *основания* трапеции, h – *высота*, m – *средняя линия* (отрезок прямой, соединяющий середины непараллельных сторон): $m = (a + b)/2$. Площадь: $S = (a + b)\,h/2 = mh$. Если

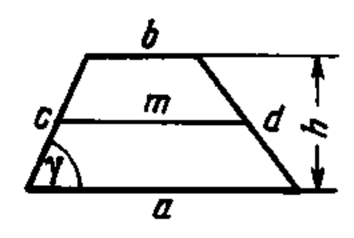


Рис. 2.19

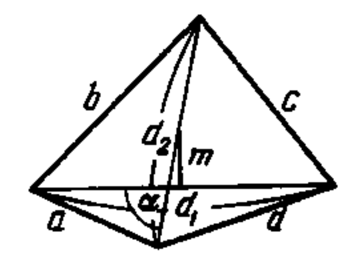


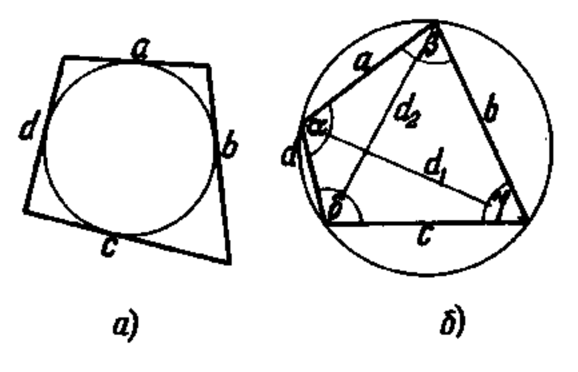
Рис. 2.20

$d = c$, то говорят о *равнобочной* трапеции. В этом случае

$$S = (a - c\cos\gamma)\,c\sin\gamma = (b + c\cos\gamma)\,c\sin\gamma.$$

Четырехугольник (рис. 2.20). Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника равна 360°; $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, где m – отрезок, соединяющий середины диагоналей. Площадь: $S = (d_1 d_2 \sin\alpha)/2$.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$ (*описанный четырехугольник*, рис. 2.21, *а*). Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$ (*вписанный четырехугольник*, рис. 2.21, *б*). Для вписанного



а) *б*)

Рис. 2.21

четырехугольника $ac + bd = d_1 d_2$. Площадь вписанного четырехугольника:

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где

$$p = (a + b + c + d)/2.$$

Многоугольник (рис. 2.22). Если число сторон равно n, то сумма внутренних углов равна

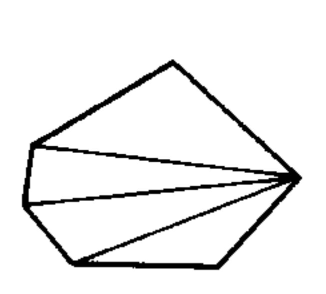


Рис. 2.22

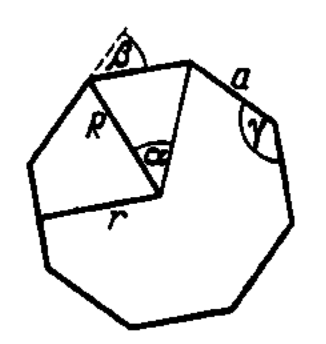


Рис. 2.23

$180°(n - 2)$. Сумма внешних углов равна 360°. Площадь определяют, разбивая многоугольник на треугольники.

Если у многоугольника все стороны и углы равны между собой, то говорят о *правильном многоугольнике* (рис. 2.23). Для правильных многоугольников с n сторонами имеют место следующие соотношения: центральный угол $\alpha = 360°/n$, внешний угол $\beta = 360°/n$, внутренний угол $\gamma = 180° - \beta$. Если R – радиус описанной окруж-

Элементы правильных многоугольников.

Обозначения: n – число сторон, S – площадь, a – сторона, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

ности, а r – радиус вписанной окружности, то сторона $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin(\alpha/2) = 2r\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$. Площадь: $S = nar/2 = nr^2\,\mathrm{tg}(\alpha/2) = nR^2(\sin\alpha)/2 = na^2\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)/4$.

Данные об отдельных правильных многоугольниках см. в таблице их элементов на стр. 184.

Окружность. Радиус r, диаметр d.

Углы, связанные с окружностью *): вписанный угол $\alpha = \breve{BC}/2$ (рис. 2.24), угол между хордой и касательной $\beta = \breve{AC}/2$ (рис. 2.24), угол между хордами $\gamma = (\breve{CB} + \breve{ED})/2$ (рис. 2.25), между секущими

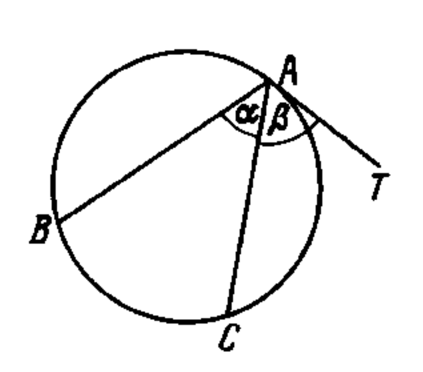


Рис. 2.24

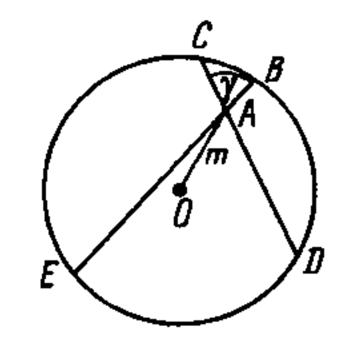


Рис. 2.25

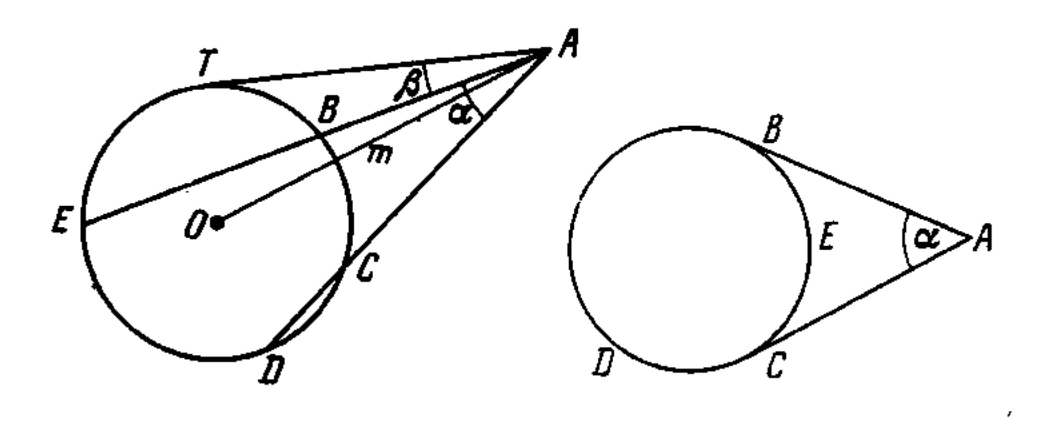


Рис. 2.26 Рис. 2.27

$\alpha = (\breve{DE} - \breve{BC})/2$ (рис. 2.26), между секущей и касательной $\beta = (\breve{TE} - \breve{TB})/2$ (рис. 2.26), между касательными $\alpha = (\breve{BDC} - \breve{BEC})/2$ (рис. 2.27).

Пересекающиеся хорды (рис. 2.25):

$$AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2.$$

Секущие (рис. 2.26):

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2.$$

Длина окружности C и площадь круга S:

$$\pi = C/d \approx 3{,}141592653589793...,$$
$$C = 2\pi r \approx 6{,}283r,$$
$$C = \pi d \approx 3{,}142d,$$
$$C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\sqrt{S},$$
$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142r^2,$$
$$S = \pi d^2/4 \approx 0{,}785d^2,$$
$$S = Cd/4 = 0{,}25Cd,$$
$$r = C/(2\pi) \approx 0{,}159C,$$
$$d = 2\sqrt{S/\pi} \approx 1{,}128\sqrt{S};$$

см. также таблицы 1.1.1.13 и 1.1.1.14.

Сегмент и *сектор* (рис. 2.28). r – радиус, l – длина дуги, a – хорда, α – центральный угол (в градусах), h – стрела сегмента:

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r\sin(\alpha/2),$$
$$h = r - \sqrt{r^2 - (a^2/4)} = r(1 - \cos(\alpha/2)) = (a/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/4),$$
$$l = 2\pi r\alpha/360 \approx 0{,}01745r\alpha.$$

Приближенно:

1) $l \approx (8b - a)/3$;
2) $l \approx \sqrt{a^2 + (16h^2/3)}$.

Площадь сектора: $S = \pi r^2\alpha/360 \approx 0{,}00873r^2\alpha$.

Площадь сегмента:

$$S_1 = r^2[(\pi\alpha/180) - \sin\alpha]/2 = [lr - a(r - h)]/2.$$

Приближенно: $S_1 \approx h(6a + 8b)/15$. Таблицы для S_1, l, h и a см. в 1.1.1.15.

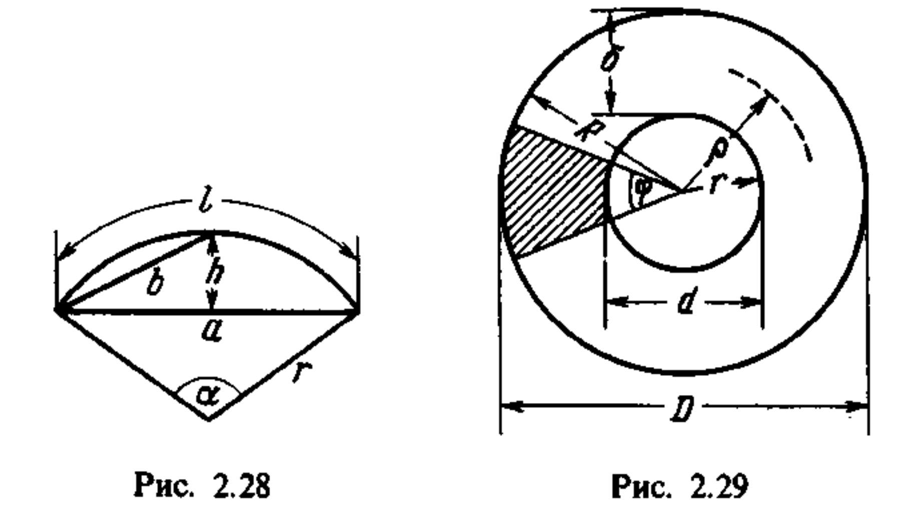


Рис. 2.28 Рис. 2.29

Круговое кольцо (рис. 2.29). $D = 2R$ – внешний диаметр, $d = 2r$ – внутренний диаметр, $\rho = (R + r)/2$ – средний радиус, $\delta = R - r$ – ширина кольца.

Площадь кольца: $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(D^2 - d^2)/4 = 2\pi\rho\delta$.

Площадь части кольца (заштрихована на рис. 2.29) с центральным углом φ (в градусах) равна

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{1440}(D^2 - d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\rho\delta.$$

2.6.2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

2.6.2.1. Прямые и плоскости в пространстве.

Две прямые (несовпадающие), лежащие в одной плоскости, либо имеют одну общую точку, либо не имеют ни одной. В последнем случае они

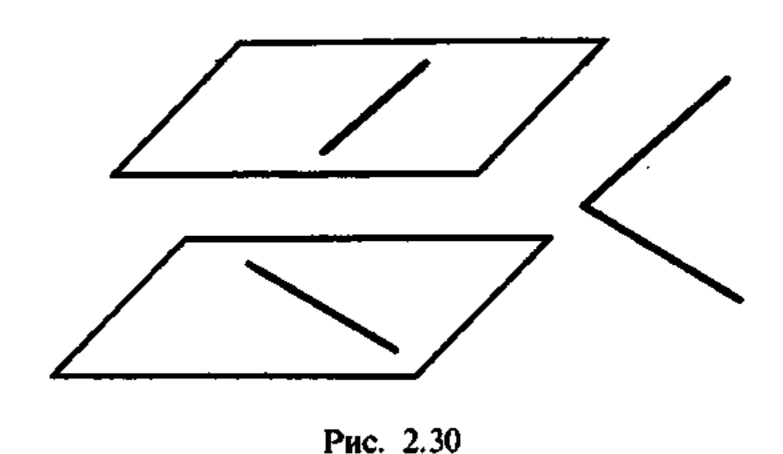


Рис. 2.30

параллельны. Если через две прямые нельзя провести плоскость, они называются *скрещивающимися*.

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку (рис. 2.30). Расстояние между скрещивающимися прямыми

*) В этих равенствах фигурирует не длина дуги, а ее угловая мера, совпадающая с мерой соответствующего центрального угла.

равно длине отрезка прямой, пересекающей обе заданные прямые и перпендикулярной к ним.

Две плоскости (несовпадающие) или пересекаются по одной прямой, или не имеют общих точек. В последнем случае они параллельны. Совпадающие плоскости также считаются параллельными. Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой или если на каждой из них имеются по две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные между собой, то эти плоскости параллельны.

Прямая и плоскость. Прямая может лежать целиком в данной плоскости, иметь с ней одну общую точку или не иметь ни одной. В последнем случае прямая *параллельна* плоскости. Угол между прямой и плоскостью измеряется углом между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 2.31). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым на плоскости, то она перпендикулярна любой прямой на плоскости (*перпендикулярна плоскости*).

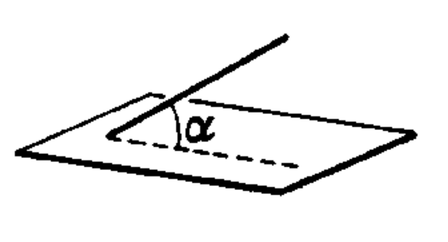


Рис. 2.31

2.6.2.2. Двугранные, многогранные и телесные углы. *Двугранный угол* — фигура, образованная двумя полуплоскостями, выходящими из одной прямой. Двугранный угол измеряется своим линейным углом ABC (рис. 2.32), т. е. углом между перпендикулярами к ребру DE двугранного угла, восставленными в обеих плоскостях (*гранях*) из одной точки.

Многогранный угол $OABCDE$ (рис. 2.33) образуется несколькими плоскостями (*гранями*), имеющими общую точку (*вершину*) и пересекающимися последовательно по прямым OA, OB, ..., OE (*ребрам*). Два ребра, принадлежащие одной грани, образуют *плоский угол* многогранного угла, а две соседние грани — *двугранный угол*. Многогранные углы равны (конгруэнтны), если они при наложении совпадают; для этого должны быть равны соответствующие элементы (плоские и двугранные углы) многогранных углов. Если соответственно равные элементы многогранного угла расположены в обратном порядке, многогранные углы при наложении не совпадают; в этом случае их называют *симметричными*, т. е. они могут быть приведены в положение, изображенное на рис. 2.34.

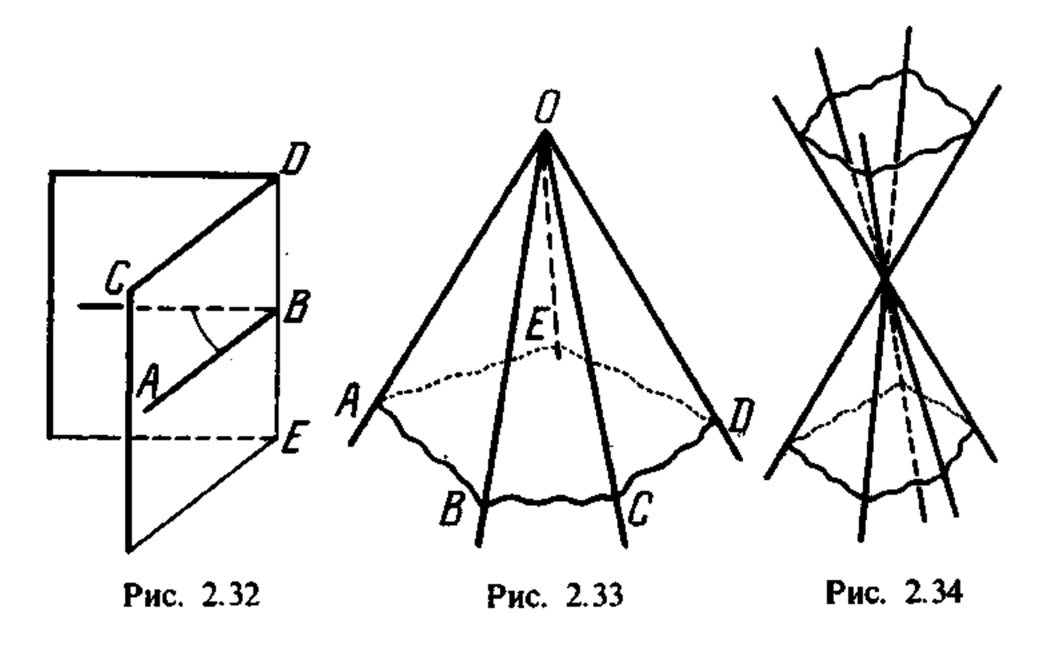
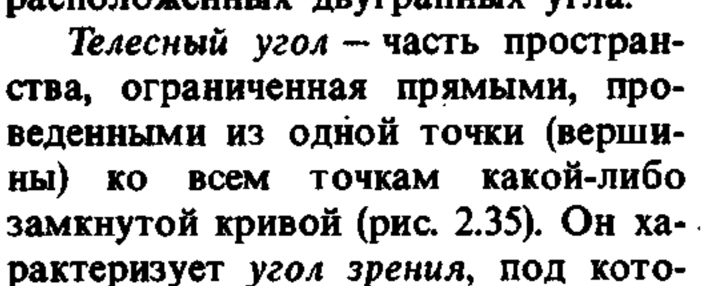


Рис. 2.32 Рис. 2.33 Рис. 2.34

Выпуклый многогранный угол лежит целиком по одну сторону от каждой его грани. *Сумма* плоских углов $\angle AOB + \angle BOC + \ldots + \angle EOA$ (рис. 2.33) любого выпуклого многогранного угла меньше 360° (или 2π).

Трехгранные углы равны, если они имеют: 1) по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами, или 2) по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами, или 3) по три соответственно равных и одинаково расположенных плоских угла, или 4) по три соответственно равных и одинаково расположенных двугранных угла.



Телесный угол — часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины) ко всем точкам какой-либо замкнутой кривой (рис. 2.35). Он характеризует *угол зрения*, под которым из вершины видна данная кривая. Мерой телесного угла является площадь, вырезаемая телесным углом на сфере единичного радиуса с центром в вершине. Например, для конуса с углом при вершине 120° телесный угол равен π (см. формулы в 2.6.2.4).

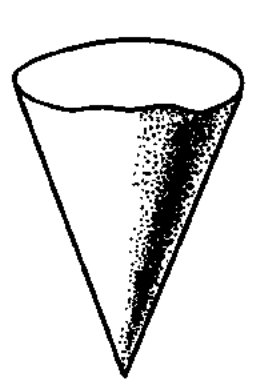


Рис. 2.35

2.6.2.3. Многогранники. Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.

Призма (рис. 2.36). Основания — равные многоугольники; боковые грани — параллелограммы.

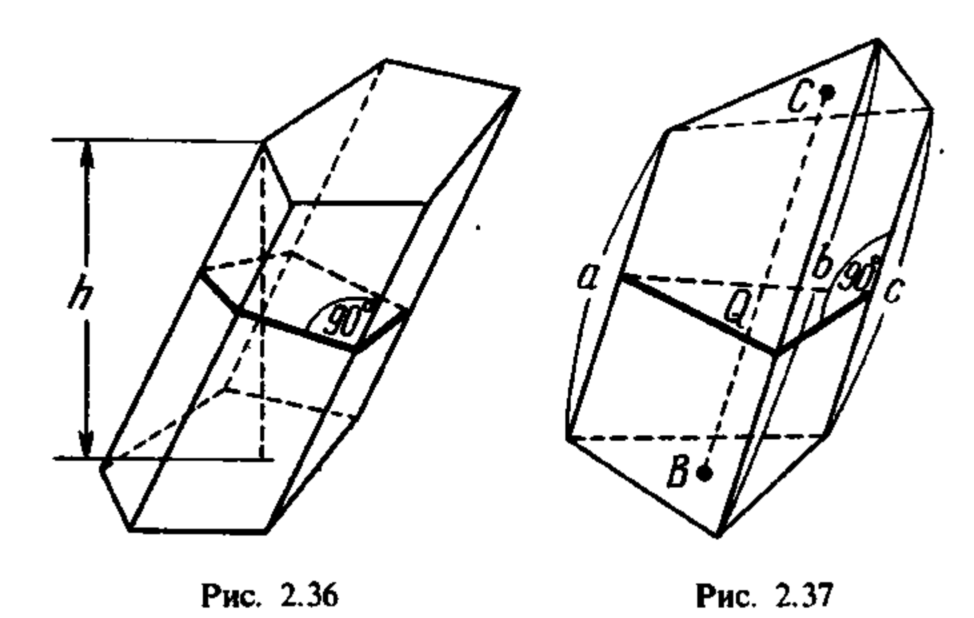


Рис. 2.36 Рис. 2.37

Призма называется *прямой*, если ее ребра перпендикулярны плоскости основания. Призма называется *правильной*, если она прямая и ее основания — правильные многоугольники.

Имеют место соотношения: $M = pl$, где l — ребро, p — периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной ребру; $S = M + 2F$; $V = Fh$.

Для треугольной призмы, усеченной не параллельно основанию, $V = (a + b + c)\,Q/3$ (рис. 2.37), где a, b, c — длины параллельных ребер, Q — площадь перпендикулярного сечения.

Для n-гранной призмы, усеченной не параллельно основанию, $V = lQ$, где l — длина отрезка прямой BC, соединяющего центры тяжести оснований, Q — площадь сечения, перпендикулярного этой прямой.

Параллелепипед (рис. 2.38) — призма, у которой основания — параллелограммы. В параллелепипеде

все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Параллелепипед называется *прямоугольным*, если он прямой (прямая

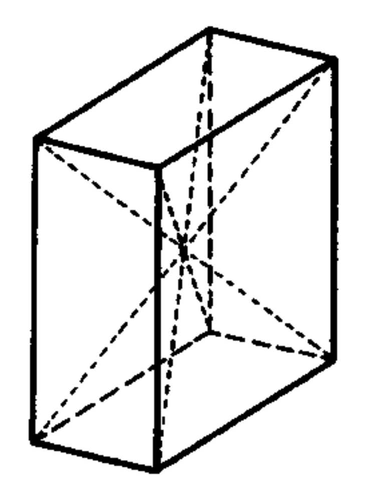


Рис. 2.38

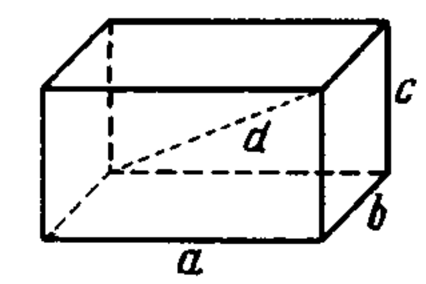
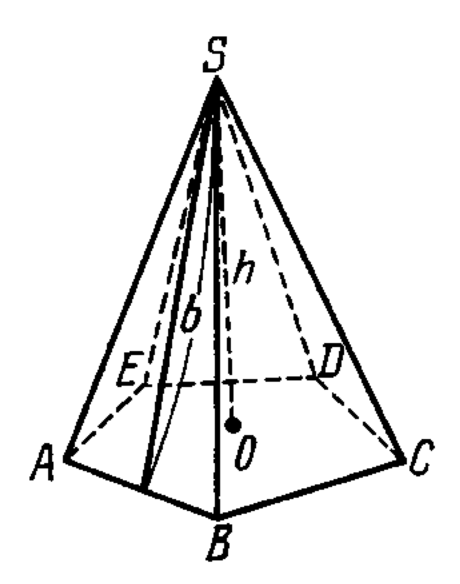


Рис. 2.39

призма) и его основания — прямоугольники. В прямоугольном параллелепипеде (рис. 2.39) все диагонали равны. Если a, b, c — ребра прямоугольного параллелепипеда, а d — его диагональ, то $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ca)$.

Куб — прямоугольный параллелепипед с равными ребрами: $a = b = c$, $d^2 = 3a^2$, $V = a^3$, $S = 6a^2$.

Пирамида (рис. 2.40). Основанием является какой-либо многоугольник, боковые грани — треугольники, сходящиеся в одной вершине. Пирамида называется *n-угольной*, если в ее основании лежит n-угольник; $V = Fh/3$.



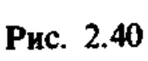


Рис. 2.40

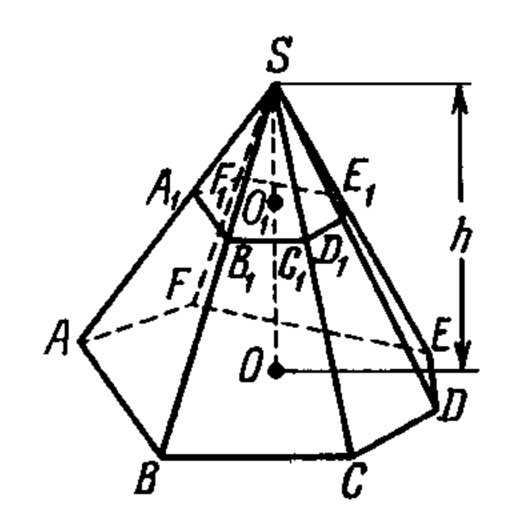


Рис. 2.41

Если пирамида пересечена плоскостью (рис. 2.41), параллельной основанию, то

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \ldots = \frac{SO_1}{O_1O},$$

$$\frac{\text{площадь } ABCDEF}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2,$$

где SO — *высота* пирамиды, т. е. отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на основание.

Пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а высота проходит через его центр. Для правильной пирамиды $M = pb/2$ (где p — периметр основания, а b — высота боковой грани (апофема)).

Треугольная пирамида (рис. 2.42). Если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$ и $AB = r$, то

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Усеченная пирамида (плоскость сечения параллельна основанию, рис. 2.43). Если F — площадь нижнего основания, f — площадь верхнего основания, h — высота (расстояние между основаниями), a и A — две соответственные стороны оснований, то

$$V = h\left[F + f + \sqrt{Ff}\right]/3 = hF\left[1 + (a/A) + (a/A)^2\right]/3.$$

Для правильной усеченной пирамиды $M = (P + p)\,b/2$, где P и p — периметры соответственно

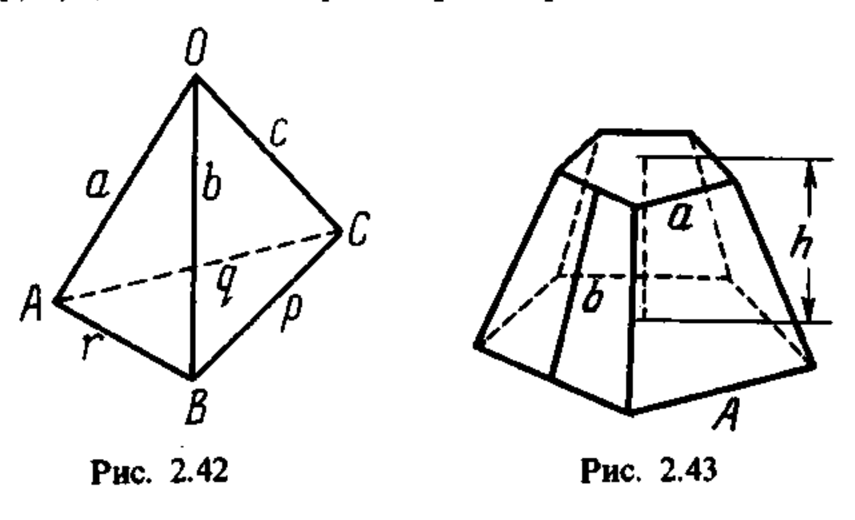


Рис. 2.42 Рис. 2.43

нижнего и верхнего оснований, b — высота боковой грани (апофема).

Обелиск. Нижнее и верхнее основания являются прямоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях; противоположные боковые грани одинаково наклонены к основанию, но не пересекаются в одной точке (рис. 2.44). Если

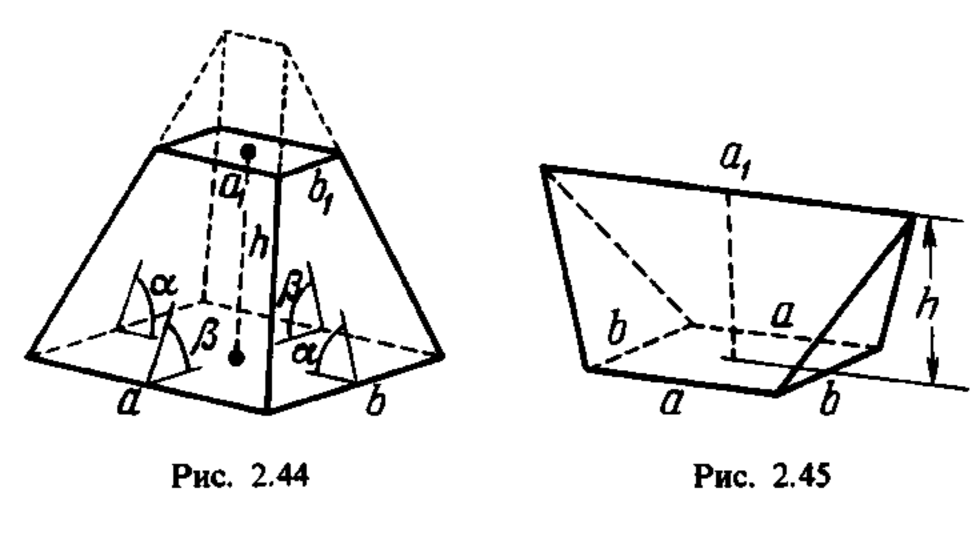


Рис. 2.44 Рис. 2.45

a, b и a_1, b_1 — стороны оснований, h — высота, то

$$V = h\left[(2a + a_1)\,b + (2a_1 + a)\,b_1\right]/6 =$$

$$= h\left[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1\right]/6.$$

Клин. Основание — прямоугольник, боковые грани — равнобедренные треугольники и равнобочные трапеции (рис. 2.45);

$$V = (2a + a_1)\,bh/6.$$

Правильные многогранники. Все грани — равные правильные многоугольники, и все многогранные

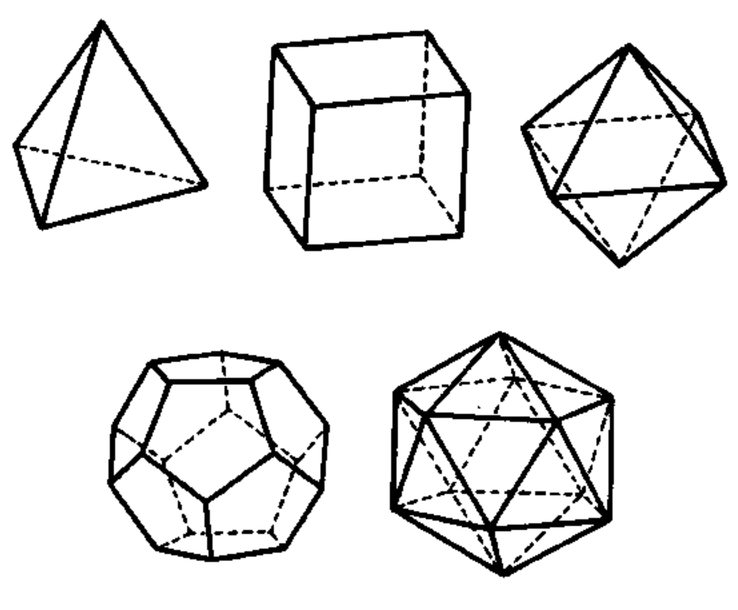


Рис. 2.46

Элементы правильных многогранников (a — длина ребра).

Название	Число граней и их форма	Число		Полная поверхность	Объем
		ребер	вершин		
Тетраэдр	4 треугольника	6	4	$1{,}7321a^2$	$0{,}1179a^3$
Куб	6 квадратов	12	8	$6a^2$	a^3
Октаэдр	8 треугольников	12	6	$3{,}4641a^2$	$0{,}4714a^3$
Додекаэдр	12 пятиугольников	30	20	$20{,}6457a^2$	$7{,}6631a^3$
Икосаэдр	20 треугольников	30	12	$8{,}6603a^2$	$2{,}1817a^3$

углы равны. Существует всего пять правильных многогранников (рис. 2.46), данные о которых представлены в таблице элементов правильных многогранников.

Теорема Эйлера. Если e — число вершин выпуклого многогранника, f — число граней и k — число ребер, то $e - k + f = 2$.

Примеры см. в таблице правильных многогранников.

2.6.2.4. Тела, образованные перемещением линий. Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Цилиндрическая поверхность (рис. 2.47) образуется прямой линией (*образующей*), перемещающейся параллельно заданному направлению вдоль некоторой кривой (*направляющей*).

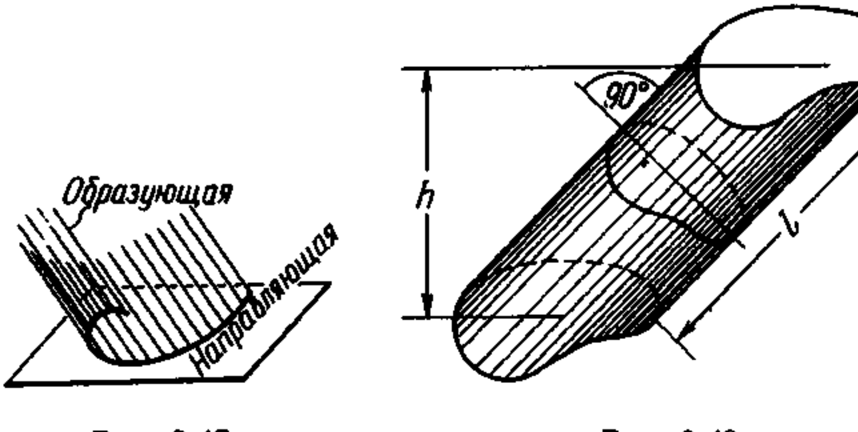


Рис. 2.47 Рис. 2.48

Цилиндр (рис. 2.48) — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, являющимися основаниями цилиндра. Для любого

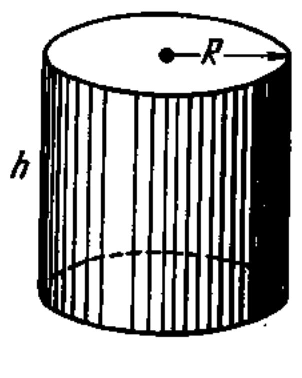


Рис. 2.49 Рис. 2.50

цилиндра (p — периметр основания, p_1 — периметр сечения, перпендикулярного образующей, Q — площадь этого сечения, l — длина образующей) имеем $M = ph = p_1 l$, $V = Fh = Ql$.

Круговой прямой цилиндр имеет в основании круг, и его образующие перпендикулярны плоскости основания (рис. 2.49). Пусть R — радиус основания; тогда $M = 2\pi Rh$, $S = 2\pi R(R + h)$, $V = \pi R^2 h$.

Усеченный круговой цилиндр (рис. 2.50).

$M = \pi R(h_1 + h_2)$,

$$S = \pi R\left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right],$$

$$V = \pi R^2\,\frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Отрезок цилиндра — «копыто» (обозначения см. на рис. 2.51; $\alpha = \varphi/2$ — в радианах).

$$V = h\,[a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\,\alpha]/(3b) =$$
$$= hR^3\,[\sin\alpha - (\sin^3\alpha)/3 - \alpha\cos\alpha]/b,$$
$$M = 2Rh\,[(b - R)\,\alpha + a]/b$$

(формулы остаются в силе при $b > R$, $\varphi > \pi$).

Цилиндрическая труба (рис. 2.52). R и r — внешний и внутренний радиусы, $\delta = R - r$, $\rho = (R + r)/2$ (средний радиус);

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) =$$
$$= \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho.$$

Коническая поверхность (рис. 2.53) образуется прямой линией (*образующей*), перемещающейся

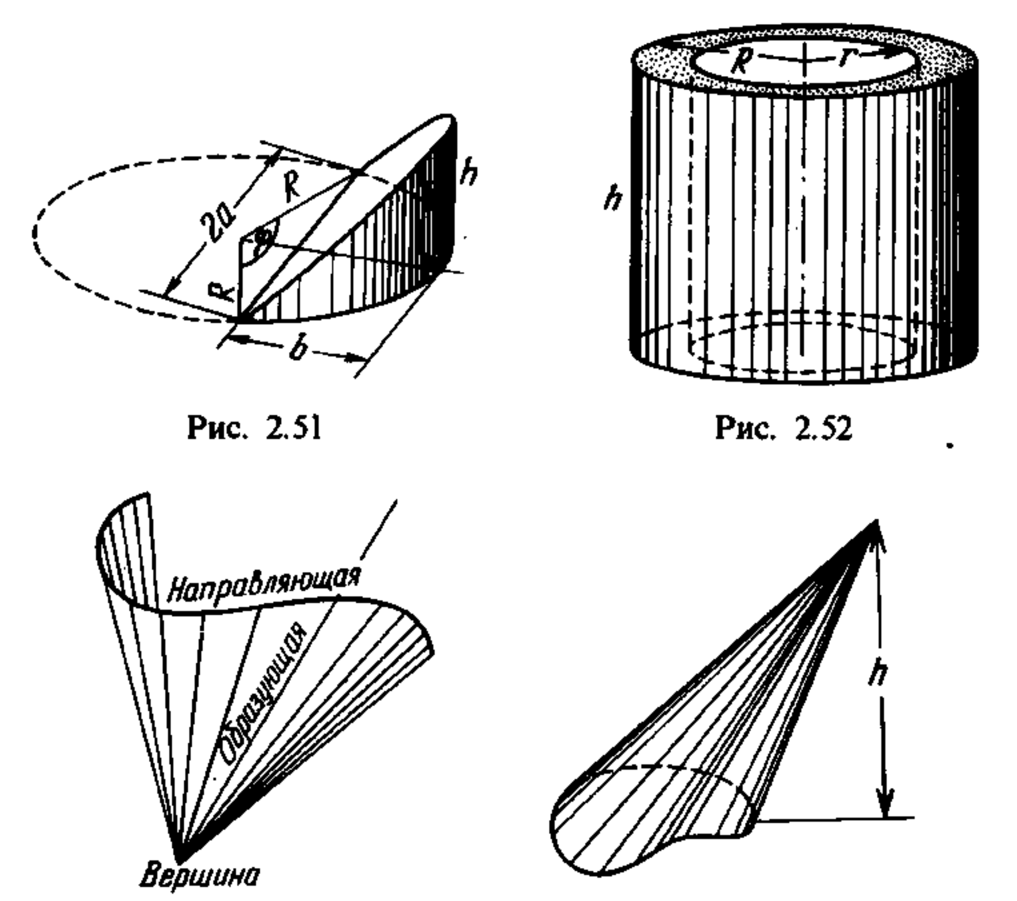


Рис. 2.51 Рис. 2.52

Рис. 2.53 Рис. 2.54

вдоль кривой линии (*направляющей*) и имеющей неподвижную точку (*вершину*).

Конус (рис. 2.54) — тело, ограниченное конической поверхностью с замкнутой направляющей

и плоскостью, образующей основание. Для любого конуса $V = hF/3$.

Круговой прямой конус (рис. 2.55) имеет в основании круг, и его высота проходит через центр

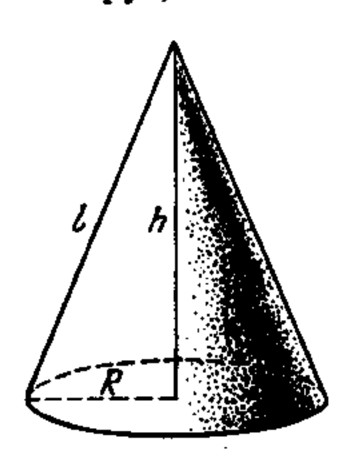


Рис. 2.55

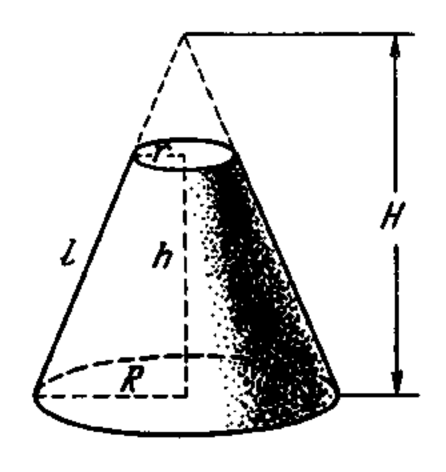


Рис. 2.56

круга (l – длина образующей, R – радиус основания).

$$M = \pi R l = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}, \quad S = \pi R (R + l),$$

$$V = \pi R^2 h/3.$$

Усеченный прямой конус (рис. 2.56).

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}, \quad M = \pi l (R + r),$$

$$V = \pi h (R^2 + r^2 + Rr)/3, \quad H = h + hr/(R - r).$$

Конические сечения см. в 2.6.6.1.

Сфера – поверхность шара (рис. 2.57). (Обозначения: R – радиус сферы, $D = 2R$ – диаметр сферы.) Любое сечение сферы плоскостью есть круг. Под *большим кругом* – кругом радиуса R – понимают сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Через всякие две точки сферы (не являющиеся противоположными концами диаметра) всегда можно провести только один большой круг. Меньшая дуга этого большого круга является кратчайшим расстоянием на сфере между данными точками. О геометрии на сфере см. 2.6.4.1. Поверхность сферы и объем шара:

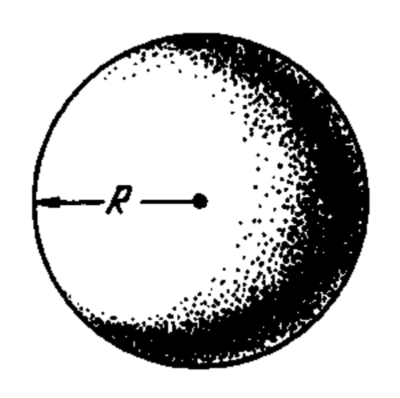


Рис. 2.57

$$S = 4\pi R^2 \approx 12{,}57R^2, \quad S = \pi D^2 \approx 3{,}142D^2,$$

$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4{,}836 \sqrt[3]{V^2},$$

$$V = 4\pi R^3/3 \approx 4{,}189R^3, \quad V = \pi D^3/6 \approx 0{,}5236D^3,$$

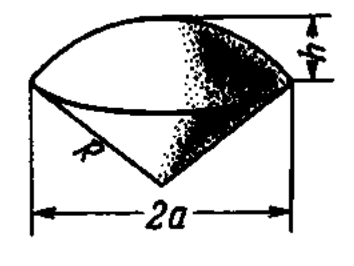
$$V = (\sqrt{S^3/\pi})/6 \approx 0{,}09403 \sqrt{S^3},$$

$$R = (\sqrt{S/\pi})/2 \approx 0{,}2821 \sqrt{S},$$

$$R = \sqrt[3]{3V/(4\pi)} \approx 0{,}6204 \sqrt[3]{V}.$$

Шаровой сектор (рис. 2.58).

$$S = \pi R (2h + a), \quad V = 2\pi R^2 h/3.$$



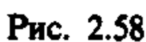


Рис. 2.58

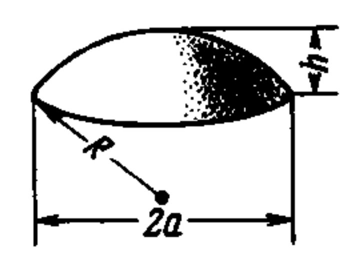


Рис. 2.59

Шаровой сегмент (рис. 2.59).

$$a^2 = h (2R - h), \quad M = 2\pi R h = \pi (a^2 + h^2),$$

$$S = \pi (2Rh + a^2) = \pi (h^2 + 2a^2),$$

$$V = \pi h (3a^2 + h^2)/6 = \pi h^2 (3R - h)/3.$$

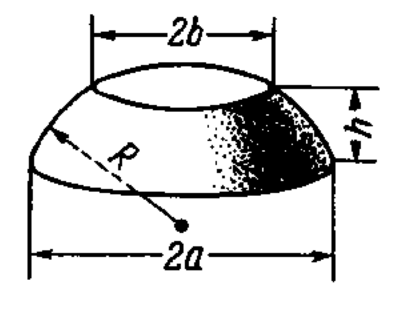


Рис. 2.60

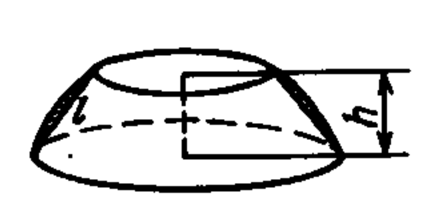


Рис. 2.61

Шаровой слой (рис. 2.60).

$$R^2 = a^2 + [(a^2 - b^2 - h^2)/(2h)]^2, \quad M = 2\pi R h,$$

$$S = \pi (2Rh + a^2 + b^2),$$

$$V = \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)/6.$$

Если V_1 – объем усеченного конуса, вписанного в шаровой слой (рис. 2.61), и l – его образующая, то $V - V_1 = \pi h l^2/6$.

Тор (рис. 2.62) – поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, лежащей в

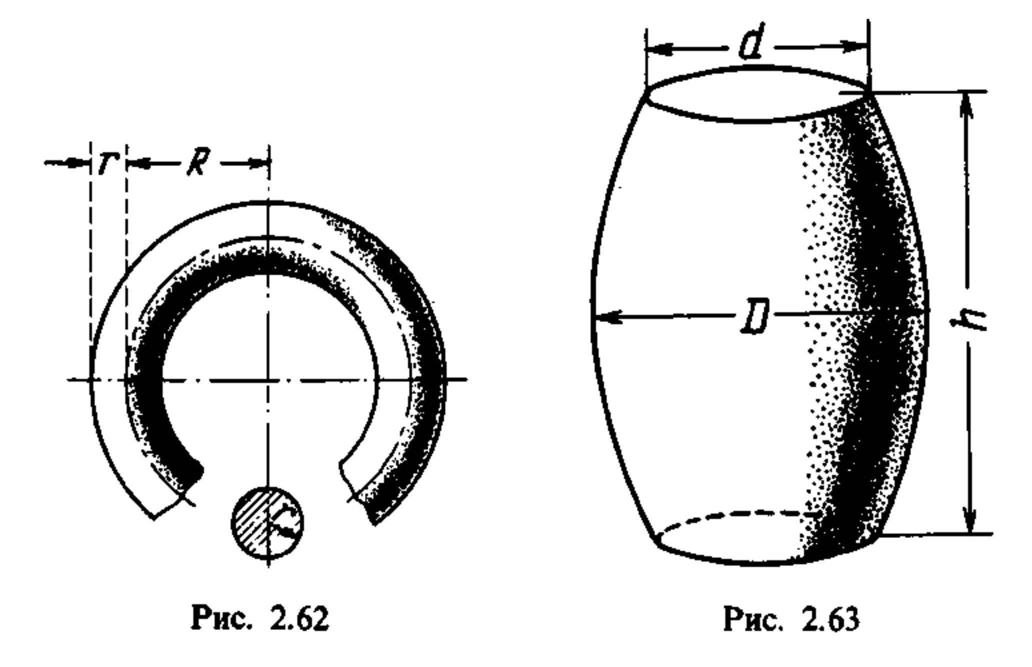


Рис. 2.62 Рис. 2.63

плоскости этой окружности и не пересекающей ее.

$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39{,}48Rr, \quad S = \pi^2 Dd \approx 9{,}870Dd,$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74Rr^2, \quad V = \pi^2 Dd^2/4 \approx 2{,}467Dd^2.$$

Бочка (рис. 2.63). Для круговой бочки (образующая – дуга окружности) приближенно

$$V \approx 0{,}262h (2D^2 + d^2), \text{ или } V \approx 0{,}0873h (2D + d)^2.$$

Для параболической бочки

$$V = \pi h (8D^2 + 4Dd + 3d^2)/60 \approx$$

$$\approx 0{,}05236h (8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

2.6.3. ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Радианное измерение углов. Наряду с обычным в практике градусным измерением углов, при котором полный угол равен 360°, прямой угол 90°, каждый градус делится на 60 минут (1° = 60′), минута – на 60 секунд (1′ = 60″), используют безразмерное *радианное измерение* углов, прежде всего в теоретических вопросах,

особенно для тригонометрических функций (см. 2.5.2.1). При этом величина центрального угла α в произвольном круге определяется как отношение длины дуги l, на которую этот угол опирается, к радиусу R: $\alpha = l/R$. В круге радиуса 1 (единичном круге) радианная мера угла равна длине дуги, которую вырезают стороны этого угла. За единицу измерения принимается *радиан* – центральный угол для дуги, длина которой равна радиусу.

Радианная мера полного угла равна 2π, прямого угла $\pi/2$. Если $\bar{\alpha}$ – мера угла в градусах, а α – мера того же угла в радианах, то переход от одной меры к другой производится по формулам

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = \frac{180}{\pi}\alpha. \tag{2.30}$$

Таблицы для перевода градусов в радианы см. в 1.1.1.16.

2.6.3.1. Решение треугольников.

2.6.3.1.1. Решение прямоугольного треугольника. Обозначения: a, b – катеты, c – гипотенуза, α, β – углы, противолежащие соответственно сторонам a и b.

Основные соотношения:

$$\alpha + \beta = 90°;$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = a/c, \quad \cos\alpha = \sin\beta = b/c, \tag{2.31}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = a/b, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = b/a. \tag{2.32}$$

2.6.3.1.2. Решение косоугольного треугольника. Обозначения: a, b, c – стороны, α, β, γ – противолежащие им углы, $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр, R – радиус описанной окружности.

Основные соотношения:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \tag{2.33}$$

Теорема косинусов.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{2.34}$$

Дополнительные соотношения:
Теорема тангенсов.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}((\alpha-\beta)/2)}{\operatorname{tg}((\alpha+\beta)/2)} = \frac{\operatorname{tg}((\alpha-\beta)/2)}{\operatorname{ctg}(\gamma/2)}. \tag{2.35}$$

Теорема половинного угла.

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}; \tag{2.36}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \tag{2.37}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \tag{2.38}$$

Формулы Мольвейде.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\sin(\gamma/2)} = \frac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\cos((\alpha+\beta)/2)}, \tag{2.39}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin((\alpha-\beta)/2)}{\cos(\gamma/2)} = \frac{\sin((\alpha-\beta)/2)}{\sin((\alpha+\beta)/2)}. \tag{2.40}$$

Формула косинусов (теорема о проекциях).

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \tag{2.41}$$

Формула тангенсов.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha} = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta}. \tag{2.42}$$

Остальные соотношения получаются из формул (2.34)–(2.42) соответствующей циклической перестановкой сторон a, b, c и соответственно углов α, β, γ.

Основные случаи решения треугольников.

I. *Даны сторона и два прилежащих угла*, например c, α, β. Тогда третий угол также известен: $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Стороны определяются по формуле (2.33):

$$a = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

II. *Даны две стороны и угол между ними*, например a, b, γ.

1) Решение при помощи формулы (2.34):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}, \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma.$$

2) Решение при помощи формулы (2.35):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2};$$

зная $\frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\frac{\alpha+\beta}{2}$, можно вычислить α и β, $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

III. *Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них*, например a, b, α (α – против a).

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha;$$

решение существует только тогда, когда $b\sin\alpha \leqslant a$.

Различные случаи.

1) $a > b$; *угол противолежит большей стороне;* тогда $\alpha > \beta$, $\beta < 90°$ и треугольник определяется однозначно.

2) $a = b$; тогда $\alpha = \beta$ и равнобедренный треугольник определяется однозначно.

3) $a < b$; *угол противолежит меньшей стороне:*

3а) $b\sin\alpha < a$; имеются два решения β_1 и β_2, $\beta_1 + \beta_2 = 180°$;

3б) $b\sin\alpha = a$; одно решение $\beta = 90°$;

3в) $b\sin\alpha > a$; нет решений.

Далее, $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

IV. *Даны три стороны*: a, b, c.

Из (2.36): $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ и т. д.

Из (2.34): $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и т. д.

Вычисление других величин в треугольнике (см. также (2.6.1)).

Радиус описанной окружности R (см. также теорему синусов (2.33)).

$$R = \frac{p}{4\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)}. \qquad (2.43)$$

Радиус вписанной окружности r.

$$r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p}; \qquad (2.44)$$

$$r = p \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}; \qquad (2.45)$$

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}; \qquad (2.46)$$

$$r = (p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (2.47)$$

Высота h_c на сторону c.

$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha. \qquad (2.48)$$

Медиана m_c на сторону c.

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}. \qquad (2.49)$$

Биссектриса l_γ угла γ.

$$l_\gamma = \frac{2ac\cos(\beta/2)}{a+c} = \frac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c}. \qquad (2.50)$$

Площадь S.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \qquad (2.51)$$

$$S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma; \qquad (2.52)$$

$$S = c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma} = c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}. \qquad (2.53)$$

Формула Герона.

$$S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (2.54)$$

2.6.3.2. Применение в элементарной геодезии. Определение недоступного расстояния. В точках A, B могут быть измерены углы α, β, γ и δ между направлениями к точкам P и Q и заданной прямой AB (рис. 2.64). Пусть известно

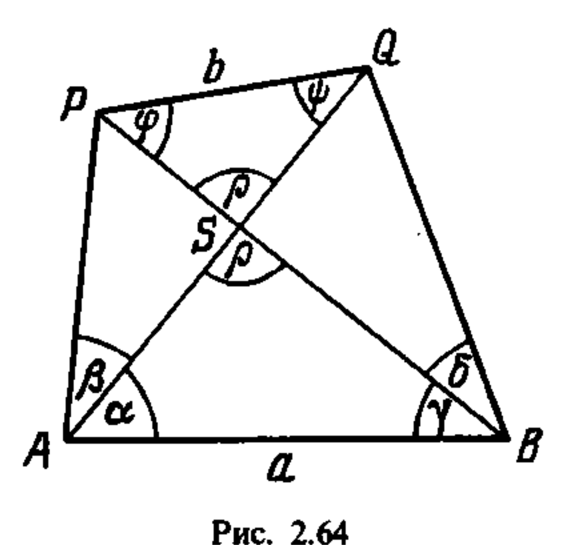


Рис. 2.64

расстояние $a = AB$ (или $b = PQ$) и требуется найти PQ (или AB).

Для решения необходимо определить углы φ и ψ. Так как ρ является углом при вершине как в треугольнике ABS, так и в треугольнике PQS, имеем

$$\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = \varepsilon_1. \qquad (2.55)$$

Применяя дважды теорему синусов (2.33), получим половину разности искомых углов. Выпишем формулы:

$$AP/a = \sin\gamma/\sin(180^\circ - \alpha - \beta - \gamma) = \sin\gamma/\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$BQ/a = \sin\alpha/\sin(\alpha+\gamma+\delta),$$

$$b/AP = \sin\beta/\sin\psi, \quad b/BQ = \sin\delta/\sin\varphi.$$

Из этих соотношений прежде всего получаем

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\psi\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\sin\delta\sin\alpha}{\sin\varphi\sin(\alpha+\gamma+\delta)}, \qquad (2.56)$$

откуда

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\delta\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma+\delta)} = \operatorname{ctg}\eta, \qquad (2.57)$$

где η – вспомогательный угол. Применяя операции сложения и вычитания, имеем

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\operatorname{ctg}\eta - 1}{\operatorname{ctg}\eta + 1},$$

$$\frac{2\cos((\varphi+\psi)/2)\sin((\varphi-\psi)/2)}{2\sin((\varphi+\psi)/2)\cos((\varphi-\psi)/2)} = \frac{\operatorname{ctg}45^\circ\operatorname{ctg}\eta - 1}{\operatorname{ctg}\eta + \operatorname{ctg}45^\circ}, \qquad (2.58)$$

$$\operatorname{tg}((\varphi-\psi)/2) = \operatorname{tg}((\varphi+\psi)/2)\operatorname{ctg}(45^\circ+\eta) = \operatorname{tg}((\alpha+\gamma)/2)\operatorname{ctg}(45^\circ+\eta).$$

Отсюда можно определить $\varepsilon_2 = (\varphi-\psi)/2$, и тогда

$$\varphi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \psi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \qquad (2.59)$$

Подставляя в (2.56), получим искомое расстояние.

Обратная задача. Пусть положение трех точек A, B, C определено относительно друг друга при помощи отрезков $\overline{AC} = a$ и $\overline{BC} = b$, а также углом $\angle ACB = \gamma$. Пусть в точке P измерены углы: $\angle CPA = \alpha$ и $\angle CPB = \beta$. В общем случае

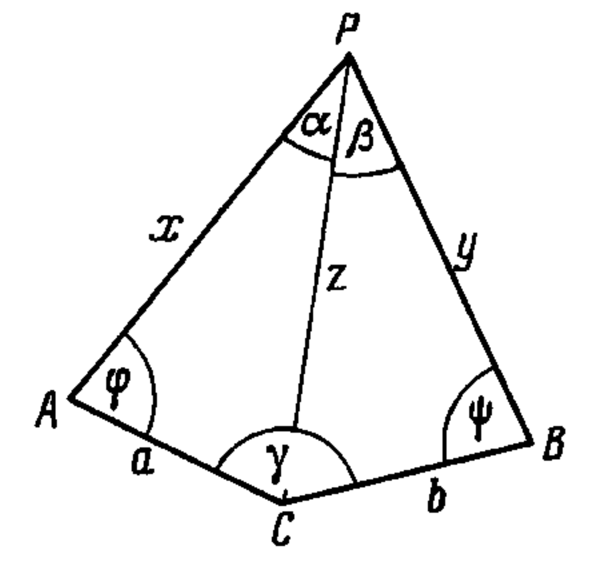


Рис. 2.65

можно найти положение точки P относительно точек A, B, C, т. е. однозначно определить отрезки x, y, z (рис. 2.65). Для этого только необходимо, чтобы точка P не лежала на окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Имеем

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma) = 2\varepsilon_1,$$
$$\sin\varphi = \frac{z}{a}\sin\alpha, \quad \sin\psi = \frac{z}{b}\sin\beta, \qquad (2.60)$$

откуда

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}=\operatorname{ctg}\eta, \qquad (2.61)$$

где η – вспомогательный угол. Опять получаем выражение (2.58) и определяем φ и ψ из выражений (2.59). Подставляя эти значения в (2.60), найдем z, а при помощи теоремы синусов (2.33) получим затем x и y.

2.6.4. СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

2.6.4.1. Геометрия на сфере.

Большой круг. Если пересечь шар плоскостью, проходящей через его центр, то в сечении шара получим *большой круг*, радиус которого равен радиусу шара. Если точки A и B не являются противоположными концами диаметра, то через них можно провести только один большой круг; длина меньшей его дуги является *наикратчайшим* расстоянием на сфере между этими точками (*геодезическая линия*). Большие круги играют на сфере роль, аналогичную роли прямых на плоскости.

Двумя различными точками A и B, лежащими на сфере, определяется пучок плоскостей. Каждая плоскость пучка пересекает шар по некоторому кругу. Если A и B не являются противоположными концами диаметра, то плоскость пучка, проходящая через центр шара, определяет наибольший круг пучка – большой круг. Остальные круги называются *малыми кругами*; плоскость, перпендикулярная плоскости, содержащей большой круг, пересекает шар по наименьшему кругу.

Измерение дуг и углов на сфере. Измерение расстояний на сфере проводится вдоль дуг большого круга. Длина дуги большого круга между точками A и B равна

$$\overset{\frown}{AB}=R\alpha, \qquad (2.62)$$

где R – радиус шара, α – соответствующий центральный угол (измеряемый в радианах). Если ограничиться случаем единичной сферы (радиус $R=1$), то любую дугу большого круга можно охарактеризовать соответствующим центральным углом в радианах. Угол пересечения дуг двух больших кругов измеряется линейным углом между касательными к большим кругам в точке пересечения, или, что одно и то же, двугранным углом, образованным плоскостями больших кругов.

Сферический двуугольник. При пересечении двух больших кругов на поверхности шара образуются четыре *сферических двуугольника*. Площадь сферического двуугольника с углом α:

$$s=2R^2\alpha. \qquad (2.63)$$

2.6.4.2. Сферический треугольник. Три пересекающихся больших круга образуют на сфере сферический треугольник. Три точки A, B и C, из которых никакие две не являются противоположными концами диаметра, определяют три больших круга, которые пересекаются в точках A, B, C и диаметрально противоположных к ним точках A', B', C' и делят поверхность шара на восемь сферических треугольников (рис. 2.66). При этом стороны (дуги больших кругов) и соответственно углы некоторых из этих треугольников меньше π ($R=1$); такие сферические треугольники называются *треугольниками Эйлера*. Здесь рассматриваются только треугольники Эйлера.

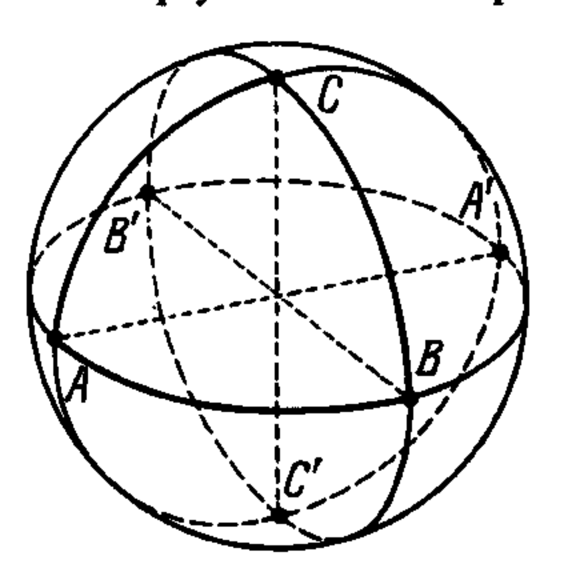


Рис. 2.66

Примечание. Треугольник ABC, не являющийся треугольником Эйлера, с углом $\gamma=\angle AB>\pi$, отличается от полусферы, которая определяется большим кругом, проведенным через точки A и B, только на треугольник Эйлера BAC с углом $\angle BA=2\pi-\gamma$.

Для треугольника Эйлера (со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ) имеют место следующие утверждения.

1) *Неравенство треугольника.* Сумма двух сторон больше третьей, разность двух сторон меньше третьей:

$$a+b>c, \qquad |a-b|<c. \qquad (2.64)$$

2) Сумма двух углов меньше, чем третий угол, увеличенный на π:

$$\alpha+\beta<\gamma+\pi. \qquad (2.65)$$

3) Наибольшая сторона противолежит наибольшему углу:

$$a<b, \quad \text{если} \quad \alpha<\beta;$$
$$a=b, \quad \text{если} \quad \alpha=\beta.$$

4) Сумма углов заключена между π и 3π, сумма сторон – между 0 и $2\pi R$ (R – радиус сферы):

$$\pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi, \qquad 0<a+b+c<2\pi R. \qquad (2.66)$$

Таким образом, сумма углов сферического треугольника всегда больше 180°. Разность

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\varepsilon \qquad (2.67)$$

называется *сферическим избытком* или *сферическим эксцессом*. Через эту величину определяется площадь сферического треугольника:

$$S=R^2\varepsilon. \qquad (2.68)$$

2.6.4.3. Решение сферических треугольников. В этом пункте мы ограничимся случаем единичной сферы (радиус $R=1$).

2.6.4.3.1. Основные соотношения.

Теорема синусов.

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}. \qquad (2.69)$$

Теорема косинусов сторон.

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma. \qquad (2.70)$$

Теорема косинусов углов.

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c. \quad (2.71)$$

Теорема половинного угла.

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}, \quad (2.72)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},$$

где $2p = a + b + c$.

Теорема половинной стороны.

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\sin P\sin(P-\gamma)}{\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)}},$$

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\sin P\sin(P-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}}, \quad (2.73)$$

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}},$$

где $2P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Аналогии Непера.

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2.74)$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2.75)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{a+b}{2}, \quad (2.76)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{a+b}{2}. \quad (2.77)$$

Формулы Деламбра (Гаусса).

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (2.78)$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2.79)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (2.80)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \cos\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \quad (2.81)$$

(Из соотношений (2.70)–(2.81) соответствующей циклической перестановкой сторон a, b, c и углов α, β, γ получаются остальные соотношения.)

Основные случаи решения треугольников.

Ia) *Даны три стороны.*

Из (2.72)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

Из (2.70)

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Iб) *Даны три угла.* В противоположность плоскому треугольнику сферический треугольник в принципе однозначно определяется тремя углами. При этом должны быть выполнены неравенства (2.65) и (2.66). Решение аналогично случаю Ia) по формуле (2.73) или (2.71).

IIa) *Даны две стороны и угол между ними,* например a, b, γ.

1) Решение по формуле (2.70):

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a\cos c}{\sin a\sin c}$$

однозначно определяет c, α, β.

2) Решение по формулам (2.76) и (2.77): однозначно находим $(\alpha+\beta)/2$ и $(\alpha-\beta)/2$, а тем самым α и β. Формула (2.69) дает

$$\sin c = \sin\gamma\,\frac{\sin a}{\sin\alpha};$$

c должно быть выбрано бо́льшим (меньшим), чем b, если γ больше (меньше), чем β.

IIб) *Даны сторона и два прилежащих угла,* например c, α, β.

1) Решение при помощи формулы (2.71).

2) Решение при помощи формул (2.74) и (2.75) (аналогично IIa)).

IIIa) *Даны две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон,* например a, b, α.

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha;$$

решение существует только тогда, когда $\sin b\sin\alpha \leqslant \sin a$.

Различные случаи.

1) $\sin a > \sin b$; следовательно, $\sin\alpha > \sin\beta$; таким образом, $\alpha > \beta$, если $a > b$, и наоборот; β определено однозначно.

2) $\sin a = \sin b$; следовательно, $\sin\alpha = \sin\beta$; как и в случае 1), β определено однозначно.

3) $\sin a < \sin b$; следовательно, $\sin\alpha < \sin\beta$.

3a) $\sin b\sin\alpha < \sin a$; имеются два решения β_1 и β_2; $\beta_1 + \beta_2 = \pi$;

3б) $\sin b\sin\alpha = \sin a$; одно решение $\beta = \pi/2$;

3в) $\sin b\sin\alpha > \sin a$; решений нет.

Далее, разрешив формулы (2.74) или (2.75) ((2.76) или (2.77)) относительно $\operatorname{tg}(c/2)$ $(\operatorname{ctg}(\gamma/2))$, получим c и γ.

IIIб) *Даны два угла и сторона, противолежащая одному из них,* например a, α, β.

Решение аналогично IIIa): $\sin b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$; затем используются аналогии Непера (2.74) – (2.77).

Вычисление других величин, связанных со сферическим треугольником.

Радиус описанного круга $\bar{R}$.

$$\operatorname{ctg}\bar{R} = \sqrt{-\frac{\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)\sin(P-\gamma)}{\sin P}}; \quad (2.82)$$

$$\operatorname{ctg}\bar{R} = \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\sin(\alpha - P), \quad (2.83)$$

где $2P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Радиус вписанного круга r:

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}; \quad (2.84)$$

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin(p-a), \quad (2.85)$$

где $2p = a + b + c$.

Сферический избыток ε (формула Уильера).

$$\operatorname{tg}\frac{P}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}, \quad (2.86)$$

где $2P = \varepsilon$.

Связь между сферической тригонометрией и прямолинейной тригонометрией.

Справедлива *теорема Лежандра*: площадь сферического треугольника с малыми сторонами (поэтому и с малым сферическим избытком) почти равна площади плоского треугольника с теми же сторонами; каждый угол плоского треугольника примерно на одну треть сферического избытка меньше, чем соответствующий угол сферического треугольника.

Теорема синусов, теорема косинусов и теорема о половинном угле в сферической тригонометрии для малых сторон (или, что то же самое, для большого радиуса шара R) переходят в соответствующие теоремы прямолинейной (плоской) тригонометрии.

2.6.4.3.2. Решение прямоугольных треугольников. Обозначения: a, b – катеты, c – гипотенуза, α и β – углы, противолежащие соответственно сторонам a и b.

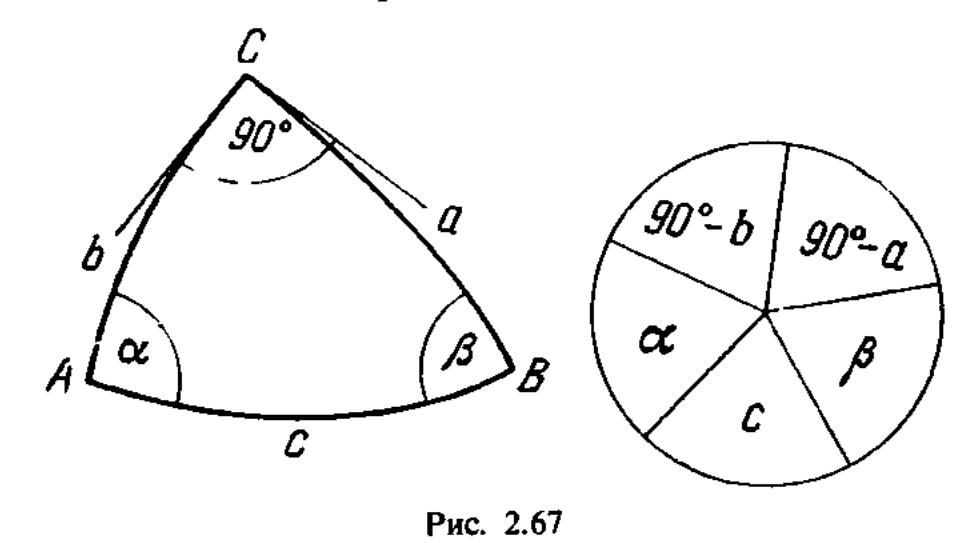


Рис. 2.67

Основные соотношения:

$$\sin a = \cos(90° - a) = \sin\alpha \sin c, \quad (2.87)$$

$$\sin b = \cos(90° - b) = \sin\beta \sin c, \quad (2.88)$$

$$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b) = \cos a \cos b, \quad (2.89)$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - a)\sin\beta = \cos a \sin\beta, \quad (2.90)$$

$$\cos\beta = \sin(90° - b)\sin\alpha = \cos b \sin\alpha, \quad (2.91)$$

$$\sin a = \cos(90° - a) = \operatorname{ctg}(90° - b)\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg}\beta, \quad (2.92)$$

$$\sin b = \cos(90° - b) = \operatorname{ctg}(90° - a)\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg}\alpha, \quad (2.93)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \quad (2.94)$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}(90° - b)\operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c, \quad (2.95)$$

$$\cos\beta = \operatorname{ctg}(90° - a)\operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} c. \quad (2.96)$$

Эти основные соотношения могут быть получены из *правила Непера*: если расположить пять элементов прямоугольного треугольника (пропустить прямой угол) по кругу в том порядке, как они находятся в треугольнике, и заменить при этом катеты a и b их дополнениями до 90° (рис. 2.67), то косинус каждого элемента будет равен произведению синусов двух не прилегающих к нему элементов, а также произведению тангенсов двух прилегающих к нему элементов.

Формулы (2.87) и (2.88) можно получить из (2.69); (2.89) – из (2.70); (2.90) и (2.91) – из (2.71).

2.6.5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Системой координат Σ n-мерного аффинного пространства A_n (см. 2.6.6) называется множество, состоящее из некоторой точки O аффинного пространства (начала координат) и n линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$, которые принадлежат векторному пространству V_n аффинного (см. 2.6.6) пространства A_n ($x_1, \ldots, x_n$ образуют в V_n базис): $\Sigma = \{O; x_1, \ldots, x_n\}$. Каждая точка P аффинного пространства A_n единственным образом может быть представлена линейной комбинацией n векторов, выходящих из точки O:

$$P = O + (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n).$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, записанные в виде упорядоченной последовательности, называются координатами точки P относительно системы координат Σ. В комплексной записи: $P = P_\Sigma = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_\Sigma$. Если базис $x_1, \ldots, x_n$ ортонормирован, то Σ называется *прямоугольной декартовой системой координат*. Если $\Sigma_1 = \{O; x_1, \ldots, x_n\}$ и $\Sigma_2 = \{Q; y_1, \ldots, y_n\}$ – две системы координат аффинного пространства A_n, а P – точка этого пространства с координатами относительно Σ_1 и Σ_2 соответственно:

$$P_{\Sigma_1} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_{\Sigma_1}, \qquad P_{\Sigma_2} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)_{\Sigma_2},$$

то имеют место следующие формулы перехода:

$$P_{\Sigma_1} = P_{\Sigma_2}A + Q_{\Sigma_1}, \qquad P_{\Sigma_2} = P_{\Sigma_1}B + O_{\Sigma_2}.$$

Строками матрицы A являются координаты векторов $y_1, \ldots, y_n$ в базисе $x_1, \ldots, x_n$. Строками матрицы B являются координаты векторов $x_1, \ldots, x_n$ в базисе $y_1, \ldots, y_n$ (см. 2.4.4.1.4 и 2.4.4.1.5).

В *однородных системах координат* (называемых также *пропорциональными системами координат*), к которым относится, например, барицентрическая система координат, отдельная координата не имеет непосредственного значения для определения положения точки. Положение точки определяется отношением координат друг к другу.

Барицентрическая система координат Σ в n-мерном аффинном пространстве A_n определяется заданием $n+1$ точек $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$, не лежащих в одной гиперплоскости, принадлежащей A_n. Барицентрическими координатами точки P являются такие (положительные или отрицательные) веса m_i, которые, будучи приписаны точкам P_i ($i = 1, \ldots, n+1$), образуют систему, центр тяжести которой есть точка P: $P_\Sigma = (m_1, \ldots, m_{n+1})_\Sigma$. Если умножить барицентрические координаты точки (веса) на одно и то же число, то положение определяемой ими точки не изменится.

Пусть даны барицентрическая система координат Σ, состоящая из точек $P_1, \ldots, P_{n+1}$, и система координат Σ_1 аффинного пространства A_n: $\Sigma_1 = \{O;\ x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть координаты точек $P_1, \ldots, P_{n+1}$ в системе Σ_1 суть $P_{i\Sigma_1} = (x_{i1}, \ldots, x_{in})_{\Sigma_1}$ ($i = 1, \ldots, n+1$). Преобразование координат точки $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\Sigma_1} = (m_1, \ldots, m_{n+1})_\Sigma$ осуществляется по формулам

$$x_k = \frac{\sum m_i x_{ik}}{M}, \quad M = \sum m_i \quad (k = 1, \ldots, n). \quad (2.97)$$

Суммирование производится по i от 1 до $n+1$. Если m_i неизвестны, а x_k известны, то (2.97) представляет собой однородную систему из n уравнений с $n+1$ неизвестными $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$. Одно из ненулевых m_i может быть выбрано произвольным образом.

Системой координат Σ на плоскости или в пространстве называют в общем случае систему, состоящую из точек, прямых, лучей, векторов, кривых или других элементов плоскости или пространства, по отношению к которой можно охарактеризовать положение тела на плоскости или в пространстве. А именно, положение каждой точки P плоскости или пространства относительно такой системы однозначно определяется некоторым набором чисел. Эти числа, записанные в виде упорядоченной n-последовательности, называются координатами точки P относительно системы координат Σ: $P = P_\Sigma = (x, y, \ldots, z)_\Sigma$.

2.6.5.1. Системы координат на плоскости.

2.6.5.1.1. Прямолинейные системы координат на плоскости. Прямолинейная система координат на плоскости состоит из фиксированной на плоскости точки O (*начало координат*) и двух пересекающихся в этой точке прямых g_1 и g_2 (*координатных осей*): $\Sigma = \{O;\ g_1, g_2\}$. На каждой из этих прямых лучам, выходящим из точки O, приписывается положительное и отрицательное направление; кроме того, на каждой прямой выбирается масштаб для измерения длин (рис. 2.68). Без ограничения общности масштабы измерения длины обеих прямых можно считать одинаковыми (в противном случае масштаб одной оси умножением на некоторое постоянное число можно привести к масштабу другой оси).

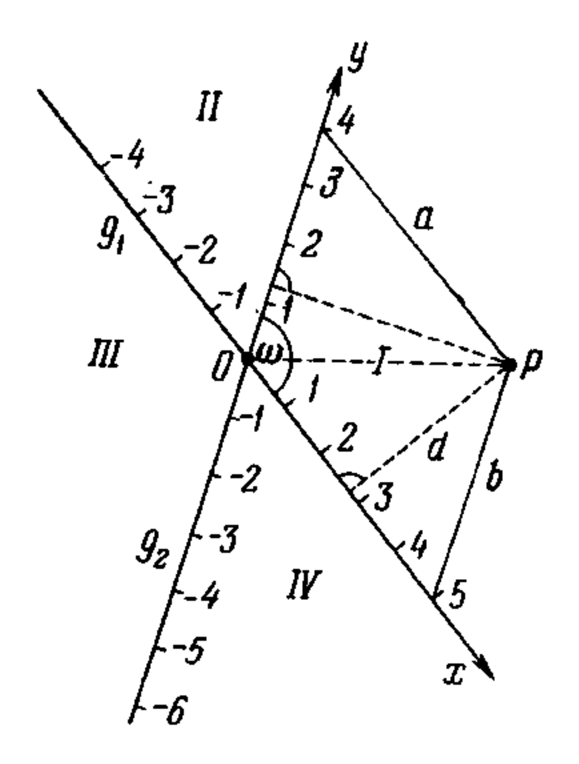


Рис. 2.68

Контравариантными координатами (или параллельными координатами) точки P являются длины проекций отрезка OP, которые получаются при проектировании прямыми, параллельными осям координат, на координатные оси (см. рис. 2.68), взятые со знаком плюс или минус в зависимости от того, лежит ли проекция точки P на положительной (положительный знак координаты) или на отрицательной (отрицательный знак координаты) части координатной оси. Эти координаты совпадают с координатами в двумерном аффинном пространстве, если базисные векторы системы координат имеют единичную длину.

Ковариантными координатами точки P являются длины ортогональных проекций отрезка OP на координатные оси. Ковариантные координаты в аналитической геометрии не употребляются. Ниже мы будем рассматривать только контравариантные координаты.

Угол ω между положительными частями обеих осей называется *координатным углом*. При $\omega = 90°$ система координат называется *прямоугольной* (или *декартовой*) системой координат *); в противном случае система координат называется *косоугольной*. В декартовой системе координат ковариантные и контравариантные координаты совпадают. Обычно в прямолинейной системе координат на плоскости первую ось называют осью x или *осью абсцисс*, а вторую — осью y или *осью ординат*. Оси делят плоскость на четыре части — *квадранты* (см. рис. 2.68). Положение точки P с *абсциссой* a и *ординатой* b относительно системы координат Σ сокращенно записывается в виде $P = P_\Sigma = (a, b)_\Sigma$. Если другие координатные системы одновременно с рассматриваемой не употребляются, то индекс Σ может быть опущен.

2.6.5.1.2. Криволинейные системы координат на плоскости. Криволинейные системы координат на плоскости являются обобщением прямолинейных. Криволинейная система координат на плоскости представляет собой два

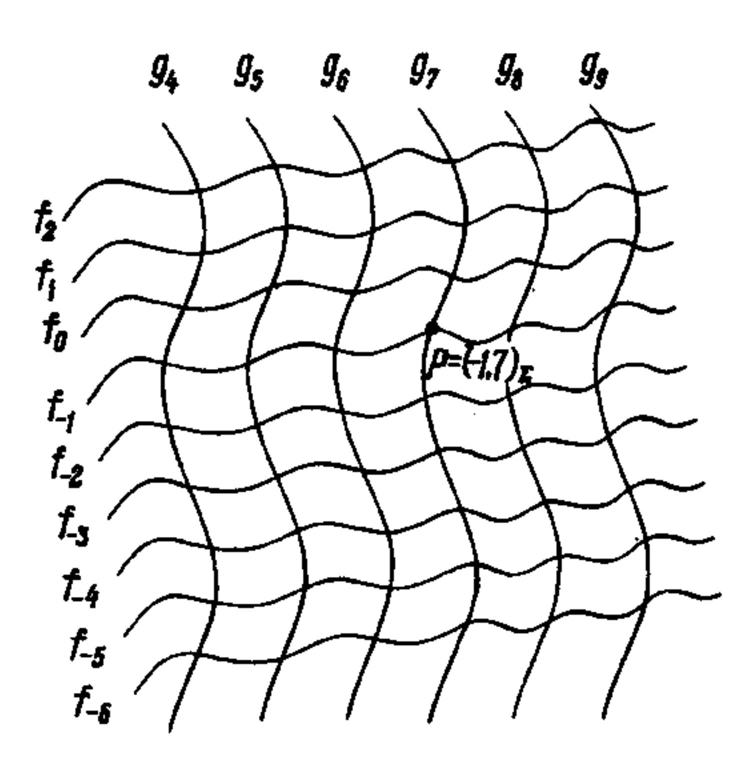


Рис. 2.69

*) Эта система координат совпадает с декартовой системой координат, определенной в начале 2.6.5, для случая $n = 2$. В литературе часто применяется также для общих косоугольных координат понятие «декартовы координаты». Тогда при $\omega = 90°$ ($w_1 = w_2 = w_3 = 0$) появляется понятие «прямоугольные декартовы координаты». В последующем под декартовыми координатами всегда следует понимать координаты прямоугольной системы координат, оси которых имеют одинаковые единицы масштаба.

однопараметрических семейства кривых (семейства координатных линий). Через каждую точку P плоскости при этом проходит только одна кривая каждого семейства. Две кривые, принадлежащие разным семействам, имеют ровно одну общую точку. Оба значения параметров, при которых кривые из двух семейств кривых проходят через одну и ту же точку P, называются *криволинейными координатами* точки P. На рис. 2.69 изображена такая координатная система с семействами кривых f_s и g_t (s, t – параметры).

Часто применяющейся криволинейной системой координат является *полярная система координат*. Она состоит из заданной фиксированной точки O плоскости (*полюса*), концентрических окружностей с центром в точке O и лучей с началом в точке O, один из которых называется *полярной осью* (рис. 2.70). Параметрами обоих семейств кривых (*полярными координатами*) являются радиус ρ для

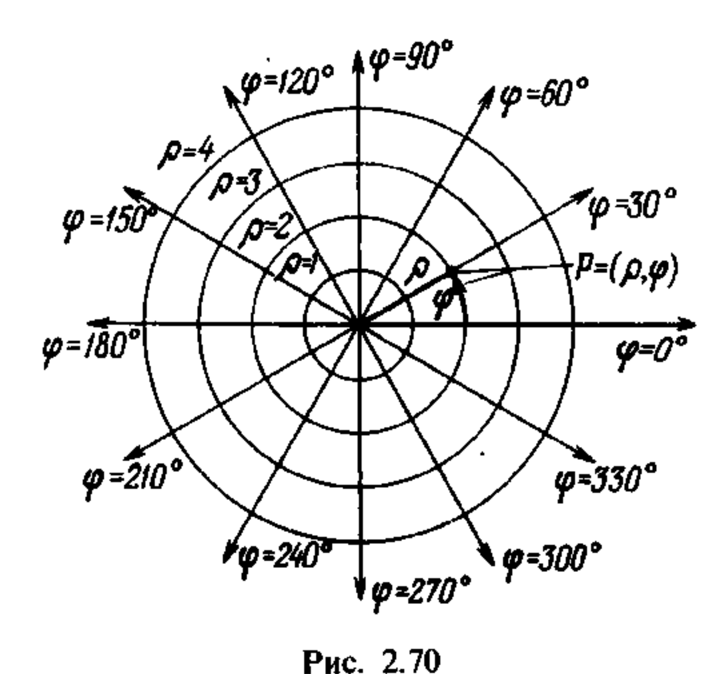


Рис. 2.70

семейства концентрических окружностей (*полярный радиус*, или *расстояние до полюса*) и угол φ между полярной осью и лучом для семейства лучей (*полярный угол*). Полярный угол считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки и отрицательным при отсчете в обратном направлении. Точка P в полярных координатах изображается так: $P = (\rho, \varphi)$.

2.6.5.1.3. Преобразование координат на плоскости. Параллельный перенос системы координат. Если прямолинейная система координат $\Sigma = \{O;\ g_1,\ g_2\}$ преобразована переносом на вектор $\overrightarrow{OQ}$ в систему координат $\Sigma' = \{Q;\ g'_1,\ g'_2\}$ с началом в точке $Q = (a,\ b)_\Sigma$ и координатными осями g'_1 и g'_2, параллельными осям g_1 и g_2, то имеют место

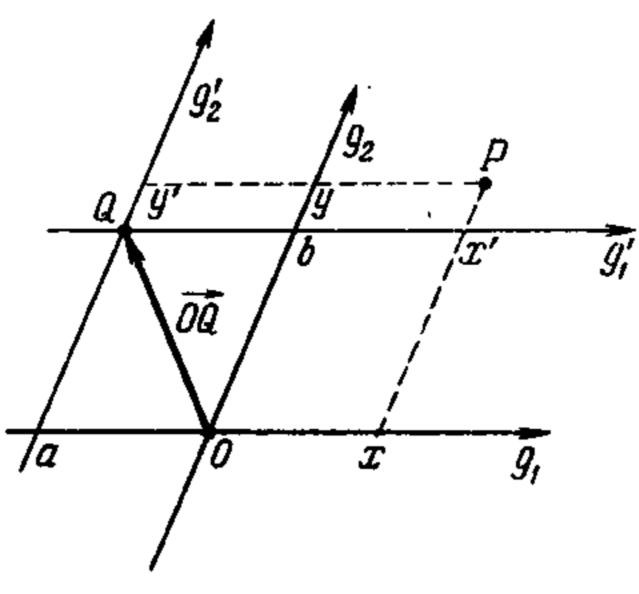


Рис. 2.71

следующие формулы преобразования: $x' = x - a$, $y' = y - b$. При этом $P = (x,\ y)_\Sigma = (x',\ y')_{\Sigma'}$ (рис. 2.71).

Поворот системы координат. Координатная система Σ с координатным углом ω при повороте на угол φ переходит в координатную систему Σ'; формулы преобразования имеют вид

$$x' = \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin\omega}x + \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}y,$$

$$y' = -\frac{\sin\varphi}{\sin\omega}x + \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}y.$$

При этом $P = (x,\ y)_\Sigma = (x',\ y')_{\Sigma'}$ (рис. 2.72).

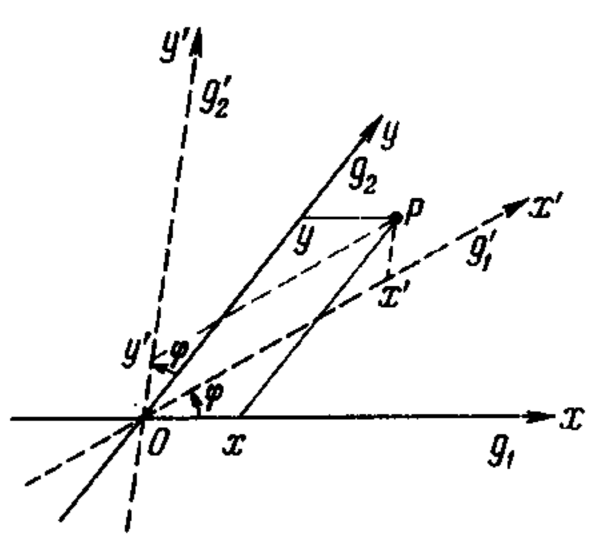


Рис. 2.72

Если $\omega = 90°$ (поворот декартовой системы координат на угол φ), то получаем

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Пусть Σ – прямолинейная система координат с координатным углом ω, Σ_1 – прямолинейная система координат с координатным углом ω_1, Σ_2 – полярная система координат, полярная ось которой Σ_2 совпадает с осью x в Σ. Пусть, далее, начала координат систем Σ и Σ_1 совпадают с полюсом системы Σ_2 (этого всегда можно добиться параллельным переносом систем координат Σ и Σ_1).

Тогда, если точка P, имеющая в этих трех системах координаты $P = (x,\ y)_\Sigma = (x_1,\ y_1)_{\Sigma_1} = (\rho,\ \varphi)_{\Sigma_2}$, задана только относительно одной системы координат, то ее координаты в других системах могут быть найдены по формулам

$$x = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}x_1 + \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}y_1,$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}x_1 + \frac{\sin\beta}{\sin\omega}y_1,$$

$$x_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}x - \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}y,$$

$$y_1 = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}x + \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}y,$$

$$x = \frac{\rho\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad y = \frac{\rho\sin\varphi}{\sin\omega},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y\sin\omega}{y\cos\omega + x};$$

где α – угол между положительными направлениями оси x в Σ и оси x_1 в Σ_1; β – угол между положительными направлениями оси x в Σ и оси y

в Σ_1 ($\omega'_1 = \beta - \alpha$; α, β считаются положительными при отсчете от полярной оси против часовой стрелки).

2.6.5.2. Координатные системы в пространстве.

2.6.5.2.1. Прямолинейные системы координат в пространстве. Прямолинейная система координат Σ в пространстве состоит из заданной фиксированной точки O пространства (*начала координат*) и трех прямых g_1, g_2, g_3, не лежащих в одной плоскости и пересекающихся в точке O,— *координатных осей* (осей x, y, z, или соответственно *оси абсцисс*, *оси ординат* и *оси аппликат*): $\Sigma = \{O;\ g_1,\ g_2,\ g_3\}$. Три плоскости, содержащие пары координатных осей, называются *координатными плоскостями* (плоскостями xy, xz и yz). На каждой из трех осей лучам, выходящим из точки O, приписываются положительное и отрицательное направления и на каждой прямой выбирается масштаб длины (рис. 2.73).

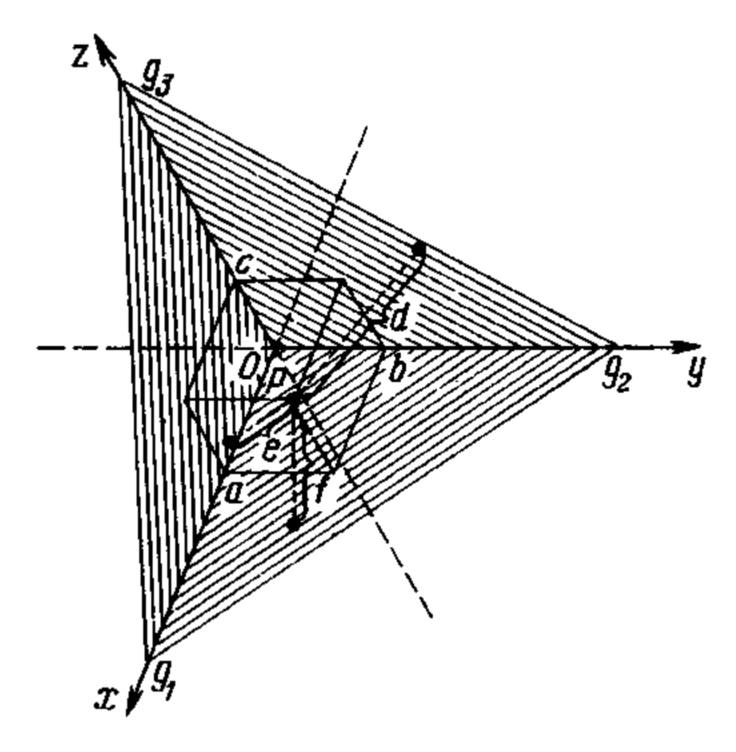


Рис. 2.73

Без ограничения общности можно считать, что масштабы длин всех трех осей равны (этого всегда можно добиться умножением масштаба каждой оси на соответствующее число). Пусть косинусы между положительными направлениями осей x, y и z (координатных углов) равны соответственно $\cos\angle(y, z) = w_1$, $\cos\angle(z, x) = w_2$ и $\cos\angle(x, y) = w_3$. При $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ система координат называется *прямоугольной* (или *декартовой*) *системой координат*; в противном случае система координат называется *косоугольной* *). В зависимости от взаимного расположения положительных направлений осей возможны *правая* и *левая* координатные системы (рис. 2.74). *Ковариантными координатами* точки P являются расстояния от точки до трех координатных плоскостей, взятые с соответствующими знаками.

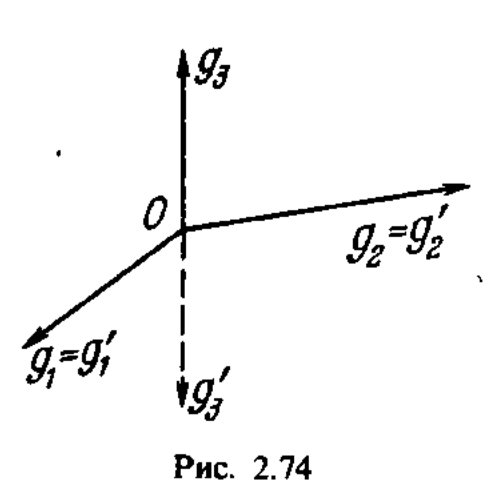


Рис. 2.74

Контравариантными координатами (параллельными координатами) точки P являются длины отрезков прямых, которые проектируют точку P поочередно на каждую из трех координатных плоскостей параллельно координатной оси, не лежащей в этой плоскости (см. рис. 2.73), взятые с соответствующими знаками. В декартовой системе координат ковариантные и контравариантные координаты совпадают. Координата точки положительна, если точка лежит по ту же сторону от координатной плоскости, проходящей через две координатные оси, куда указывает положительное направление третьей координатной оси. В противном случае координата точки отрицательна.

Пространство разбивается тремя координатными плоскостями на восемь октантов, знак каждой отдельной координаты в которых определяется в соответствии с таблицей:

Октант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Точка P с абсциссой a, ординатой b и аппликатой c относительно системы координат Σ записывается так: $P = P_\Sigma = (a,\ b,\ c)_\Sigma$. Если одновременно другие системы координат не используются, то индекс Σ можно опускать.

2.6.5.2.2. Криволинейные системы координат в пространстве. Криволинейные системы координат в пространстве являются обобщением прямолинейных. Они состоят из трех однопараметрических семейств поверхностей. Через каждую точку P пространства проходит только одна поверхность каждого семейства. Значения параметров для этих трех поверхностей и являются криволинейными координатами точки P.

Часто применяющимися криволинейными системами координат являются сферическая система координат и цилиндрическая система координат.

Сферическая система координат состоит из заданной фиксированной точки O (*полюса*) пространства, из ориентированной прямой g, проходящей через точку O, из полуплоскостей, ограниченных этой прямой (одна из них называется *полуплоскостью нулевого меридиана*), из конических поверхностей с вершинами в точке O и с прямой g в качестве оси и из сфер с центром в точке O. Параметром семейства сфер является радиус сферы ρ (*полярное расстояние*), параметром семейства полуплоскостей – угол φ, который полуплоскость образует с полуплоскостью нулевого меридиана (географическая *долгота*). Параметром семейства конических поверхностей является их угол раствора θ. Угол θ измеряется между положительным направлением прямой g и образующей боковой поверхности конуса (географическая *широта*). Положительные направления отсчета показаны на рис. 2.75. В сферических координатах точка P изображается в виде $P = (\rho,\ \varphi,\ \theta)$.

Цилиндрическая система координат состоит из заданной фиксированной точки O (начала координат), ориентированной прямой g, проходящей через эту точку, из плоскостей, перпендикулярных прямой g, из полуплоскостей, которые ограничены

*) См. сноску в 2.6.5.1.1.

прямой g (одна из них называется плоскостью *нулевого меридиана*), и из цилиндров, осью которых является прямая g. Параметром семейства перпендикулярных g плоскостей является расстояние z от точки O до плоскости: z положительно

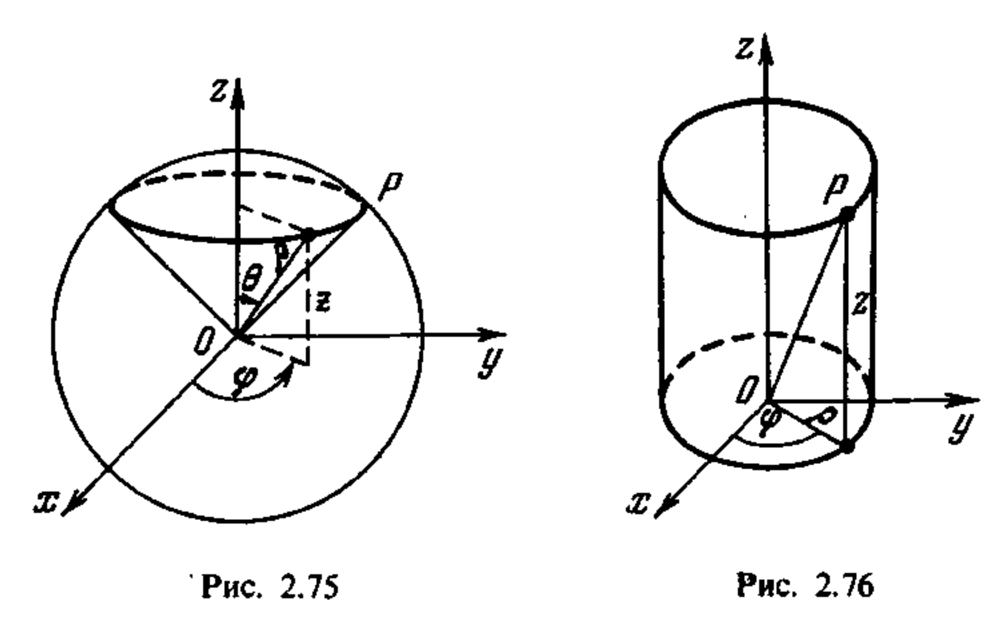


Рис. 2.75 Рис. 2.76

(отрицательно), если плоскость пересекает положительную (отрицательную) часть прямой g. Параметром пучка полуплоскостей является угол φ, который полуплоскость образует с полуплоскостью нулевого меридиана. Положительное направление отсчета показано на рис. 2.76. Параметром семейства цилиндров является радиус цилиндра ρ. В цилиндрической системе координат точка P изображается в виде $P = (\varphi, \rho, z)$.

2.6.5.2.3. Преобразование координат в пространстве.

Параллельный перенос. Система координат $\Sigma = \{O;\ g_1,\ g_2,\ g_3\}$ переносом на вектор $\overrightarrow{OQ}$ преобразуется в систему координат $\Sigma' = \{Q;\ g'_1,\ g'_2,\ g'_3\}$ с началом координат в точке $Q = (a, b, c)_\Sigma$ и координатными осями g'_1, g'_2 и g'_3, параллельными осям g_1, g_2 и g_3, при помощи следующих формул (рис. 2.77): $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$. При этом $P = (x,\ y,\ z)_\Sigma = (x',\ y',\ z')_{\Sigma'}$.

Рис. 2.77

Поворот системы координат. Поворот декартовой системы координат $\Sigma = \{O;\ g_1,\ g_2,\ g_3\}$ вокруг проходящей через начало координат оси g с направляющими косинусами

$$\cos\angle(g_1, g) = \alpha,\ \cos\angle(g_2, g) = \beta,\ \cos\angle(g_3, g) = \gamma$$

на угол θ переводит ее в систему координат $\Sigma' = \{O;\ g'_1,\ g'_2,\ g'_3\}$ (рис. 2.78) при помощи следующих формул перехода:

$$x' = x(\cos\theta + \alpha^2(1-\cos\theta)) + y(\gamma\sin\theta + \alpha\beta(1-\cos\theta)) + z(-\beta\sin\theta + \alpha\gamma(1-\cos\theta)),$$

$$y' = x(-\gamma\sin\theta + \beta\alpha(1-\cos\theta)) + y(\cos\theta + \beta^2(1-\cos\theta)) + z(\alpha\sin\theta + \beta\gamma(1-\cos\theta)),$$

$$z' = x(\beta\sin\theta + \gamma\alpha(1-\cos\theta)) + y(-\alpha\sin\theta + \gamma\beta(1-\cos\theta)) + z(\cos\theta + \gamma^2(1-\cos\theta)).$$

Здесь $P = (x,\ y,\ z)_\Sigma = (x',\ y',\ z')_{\Sigma'}$.

Если известны направляющие косинусы углов между осями декартовых систем Σ и Σ' с общим началом, то имеют место формулы:

$$x' = l_1x + m_1y + n_1z,\quad y' = l_2x + m_2y + n_2z,$$

$$z' = l_3x + m_3y + n_3z,$$

где l_i, m_i, n_i $(i = 1, 2, 3)$ – направляющие косинусы.

В векторной форме:

$$x' = xA,$$

где

$$x' = (x',\ y',\ z'),\quad x = (x,\ y,\ z).$$

Матрица перехода

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

является ортогональной (см. 2.4.4.2.5).

Если заданы две системы координат Σ и Σ' с совпадающими началами координат и известны косинусы углов между положительными направлениями осей системы Σ (оси x, y, z) и системы

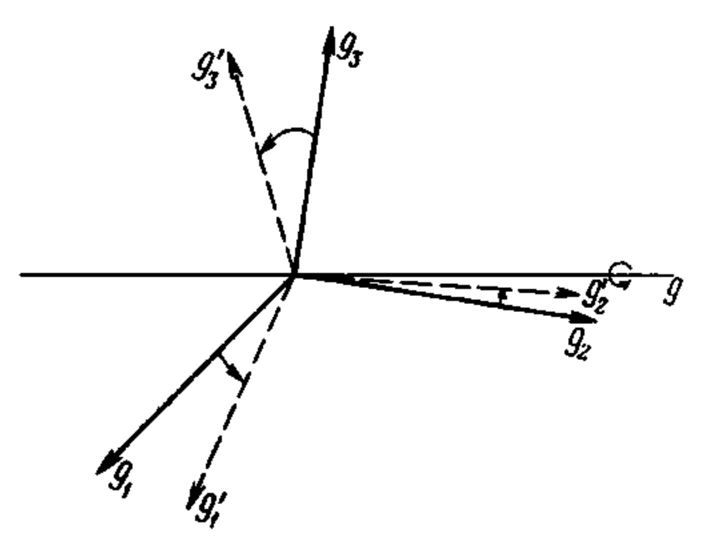


Рис. 2.78

Σ (оси x', y', z'), а также косинусы w_1, w_2, w_3 координатных углов системы Σ (см. 2.6.5.2.1), то, зная положение точки P в системе Σ', можно вычислить положение той же точки в системе Σ по нижеследующим формулам.

Пусть $P = (x,\ y,\ z)_\Sigma = (x',\ y',\ z')_{\Sigma'}$; тогда

$$x = \frac{(1-w_1^2)X - (w_3 - w_1w_2)Y - (w_2 - w_3w_1)Z}{\delta^2},$$

$$y = \frac{(1-w_2^2)Y - (w_1 - w_2w_3)Z - (w_3 - w_1w_2)X}{\delta^2},$$

$$z = \frac{(1-w_3^2)Z - (w_2 - w_3w_1)X - (w_1 - w_2w_3)Y}{\delta^2},$$

где $\delta^2 = 1 + 2w_1w_2w_3 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2$,

$$X = x'\cos\angle(x', x) + y'\cos\angle(y', x) + z'\cos\angle(z', x),$$

$$Y = x'\cos\angle(x', y) + y'\cos\angle(y', y) + z'\cos\angle(z', y),$$

$$Z = x'\cos\angle(x', z) + y'\cos\angle(y', z) + z'\cos\angle(z', z).$$

Пусть декартова (Σ), цилиндрическая (Σ_1) и сферическая (Σ_2) системы координат *согласованы:* начала координат систем Σ, Σ_1 и Σ_2 совпадают, главные прямые g систем Σ_1 и Σ_2 совпадают с осью z системы Σ, ограниченные прямой g полуплоскости нулевого меридиана систем Σ_1 и Σ_2 содержат положительную часть оси x системы Σ.

Тогда координаты точки P относительно трех систем Σ, Σ_1 и Σ_2 связаны друг с другом следующими формулами.

Если $P = (x, y, z)_\Sigma = (\rho, \varphi, z)_{\Sigma_1} = (\bar\rho, \varphi, \theta)_{\Sigma_2}$, то

$$x = \rho\cos\varphi = \bar\rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi = \bar\rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = z = \bar\rho\cos\theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\quad \bar\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

2.6.6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аффинное n-мерное пространство A_n над векторным пространством V_n есть множество A_n, каждой паре элементов которого P_1, P_2 поставлен в соответствие вектор из V_n, обозначаемый далее $\overline{P_1P_2}$, причем 1) для любых $P_1 \in A_n$, $x \in V_n$ существует один и только один элемент $P_2 \in A_n$, для которого $\overline{P_1P_2} = x$; 2) $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_3}$ для всех P_1, P_2, $P_3 \in A_n$. Элементы A_n называются его *точками*; вектор $\overline{P_1P_2}$ называется вектором *переноса* из точки P_1 в точку P_2.

Подмножество $L \subset A_n$ называется *плоскостью* в A_n, если вместе с точками $P_0, P_1, \ldots, P_n$ оно содержит также любую такую точку P, что $\overline{P_0P}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{P_0P_1}, \ldots, \overline{P_0P_n}$. Размерность подпространства V_m, порожденного векторами $\overline{P_0P}$, P_0, $P \in L$, называется размерностью плоскости L. *Гиперплоскостью* называется плоскость размерности $(n-1)$.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве относительно системы координат двумерного или трехмерного аффинного пространства или относительно прямолинейной параллельной системы координат отличается весьма незначительно. Как наиболее часто применяемой в дальнейшем прямолинейной параллельной системе координат будет отдаваться предпочтение.

2.6.6.1. Аналитическая геометрия на плоскости *). *Расстояние* d между двумя точками в параллельных или полярных координатах $P_1 = (x_1, y_1)_{\Sigma_1} = (\rho_1, \varphi_1)_{\Sigma_2}$ и $P_2 = (x_2, y_2)_{\Sigma_1} = (\rho_2, \varphi_2)_{\Sigma_2}$ вычисляется по следующим формулам:

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

В декартовых координатах $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

В последующем (если нет специальной оговорки) всегда имеются в виду декартовы координаты.

Координаты *середины* отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\quad y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Координаты точки P, которая *делит отрезок* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *в отношении* $\dfrac{m}{n} = \dfrac{d(P_1, P)}{d(P, P_2)} = \lambda$:

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{n+m} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y = \frac{ny_1+my_2}{n+m} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

При $\lambda < 0$ точка P лежит вне отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$. Координаты *центра тяжести* системы из n материальных точек $P_i = (x_i, y_i)$ с массами m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n m_ix_i}{\sum_{i=1}^n m_i},\quad y = \frac{\sum_{i=1}^n n_iy_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Ориентированная площадь S *многоугольника* с вершинами в точках $P_1, \ldots, P_n$:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2) +$$
$$+ (x_2-x_3)(y_2+y_3) + \ldots + (x_n-x_1)(y_n+y_1)].$$

Ориентированная площадь треугольника с вершинами в точках P_1, P_2, P_3:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

При вычислении по этим формулам площадь получается положительной, если обход вершин в порядке нумерации происходит против часовой стрелки, и отрицательной в противном случае. Если $S = 0$, то P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой (необходимое и достаточное условие).

2.6.6.1.1. Прямая. Каждая прямая на плоскости в параллельных координатах представима в виде $Ax + By + C = 0$, а в полярных координатах — в виде $\rho\cos(\varphi - \alpha) = p$, где p — расстояние от полюса до прямой, α — угол между полярной осью и нормалью к прямой.

Если $A = 0$ $(B = 0)$, то прямая параллельна оси x (оси y). Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

Если $B \neq 0$, то равенство $Ax + By + C = 0$ можно записать в виде $y = kx + b$. Прямая пересекает ось y в точке $P = (0, b)$.

В декартовой системе координат k — *угловой коэффициент* прямой: $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — угол между осью x и прямой).

Прямая может быть задана точкой $P_1 = (x_1, y_1)$ и угловым коэффициентом k или двумя точками $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Имеет место равенство $k = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Прямая пересекает ось x в точке $A = (a, 0)$ и ось y в точке $B = (0, b)$.

*) Векторное изображение (представление в векторной записи) дается только в 2.6.6.2. Оно совпадает с представлением (векторным изображением) в векторной записи для плоскости, если опускаются последняя компонента векторов и последняя строка и последний столбец матриц.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, где p – расстояние от прямой до начала координат, а α – угол между нормалью к прямой и осью x.

Нормальное уравнение прямой можно получить из уравнения $Ax + By + C = 0$, умножив его на нормирующий множитель $\mu = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2}$. Знак μ должен быть противоположен знаку C. Косинусы углов, образуемых прямой с осями координат, называются *направляющими косинусами*. Если $\angle$ (ось x, прямая) $= \gamma$ и $\angle$ (ось y, прямая) $= \delta$, то $\cos\delta = \cos(90° - \gamma) = \sin\gamma$, $\cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$.

Расстояние d от точки $P_1 = (x_1, y_1)$ до прямой, задаваемой уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, равно модулю числа $d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$ (подстановка координат точки в нормированное уравнение прямой). По этой формуле d положительно, если точка P_1 и начало координат лежат по разные стороны от прямой. В противном случае d отрицательно.

Координаты (x_0, y_0) точки пересечения двух прямых, задаваемых уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, то прямые параллельны ($k_1 = k_2$, или $A_1/A_2 = B_1/B_2$). Угол φ пересечения двух прямых (отсчитываемый против часовой стрелки) находится из любого из соотношений

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}.$$

При $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ прямые перпендикулярны.

Прямая $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ проходит через точку пересечения этих прямых, если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.6.6.1.2. Кривые 2-го порядка. *Кривой 2-го порядка* на плоскости называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (2.98)$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

В матричной форме:

$$rAr^T + 2gr^T + f = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

$$g = (d, e), \qquad r = (x, y).$$

После приведения уравнения кривой к каноническому виду (см. 2.6.6.2) кривые могут быть классифицированы следующим образом (условие $\lambda_1 > 0$ всегда может быть достигнуто заменой переменных или умножением обеих частей уравнения на -1).

1-й случай. *Центральные кривые* (существует центр симметрии). Общее уравнение кривой в каноническом виде: $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + g = 0$, где $\lambda_1 > 0$.

Классификация происходит согласно следующей таблице:

λ_2	g	Вид кривой
>0	<0	эллипс (рис. 2.79)
>0	>0	в действительных числах уравнение не имеет решения (мнимый эллипс)
>0	0	одна точка (0, 0) (пара мнимых пересекающихся прямых или вырожденный эллипс)
<0	$\neq 0$	гипербола (рис. 2.88)
<0	0	пара пересекающихся прямых

2-й случай. *Параболические кривые* (центра симметрии нет). Общее уравнение кривой в каноническом виде (с $\lambda_1 > 0$): $\lambda_1x^2 + 2hy + k = 0$.

Классификация происходит согласно следующей таблице:

h	k	Вид кривой
$\neq 0$	любое	парабола (рис. 2.96)
0	<0	пара прямых, параллельных оси y
0	0	двойная прямая (ось y)
0	>0	пара мнимых параллельных прямых

Кривые 2-го порядка на плоскости часто называются *коническими сечениями*, так как они могут быть получены в сечении плоскостью прямого кругового конуса. Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет гиперболой, параболой или эллипсом соответственно в зависимости от того, параллельна ли секущая плоскость двум или одной образующей конуса или не параллельна ни одной. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то получаются распадающиеся конические сечения. Параллельные прямые получаются, если конус вырождается в цилиндр (вершина конуса уходит в бесконечность).

Кривые 2-го порядка могут быть также определены при помощи *фокального свойства*: кривая 2-го порядка есть геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до заданной точки F (*фокуса*) и до заданной прямой (*директрисы*) есть величина постоянная, равная e (*эксцентриситету*). При $e < 1$ получается *эллипс*, при $e = 1$ – *парабола*, при $e > 1$ – *гипербола*.

Кривая 2-го порядка однозначно определяется заданием пяти *точек общего положения*: через заданные пять точек проходит одна и только одна кривая 2-го порядка. Если хотя бы три точки лежат на одной прямой, то получается распадающееся коническое сечение.

Полярное уравнение. В полярных координатах кривые 2-го порядка имеют уравнение

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

(p — параметр, e — эксцентриситет данной кривой, полюс находится в фокусе, полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине). Для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь.

Рис. 2.79

Последующие рассмотрения относятся к кривым 2-го порядка в каноническом виде.

Эллипсом называется множество (геометрическое место) всех точек $M = (x, y)$, для которых сумма расстояний до двух заданных фиксированных точек $F_1 = (+c, 0)$ и $F_2 = (-c, 0)$ (*фокусов*) постоянна (равна $2a$) (рис. 2.79). Расстояния $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ вычисляются по формулам

$$r_1 = a - ex, \qquad r_2 = a + ex.$$

Элементами эллипса являются: большая ось $AB = 2a$; малая ось $CD = 2b$; вершины A, B, C и D; фокусы $F_1 = (+c, 0)$ и $F_2 = (-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; *эксцентриситет* $e = c/a$ ($e < 1$); *фокальный параметр* $p = b^2/a$ (половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси).

Каноническое уравнение эллипса (координатные оси совпадают с осями эллипса) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрическое задание имеет вид

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

В *полярных координатах* (связанных с фокусом) имеем

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad 0 \leqslant e < 1.$$

Директрисы — прямые, параллельные малой оси и находящиеся на расстоянии $d = a/e$ от нее

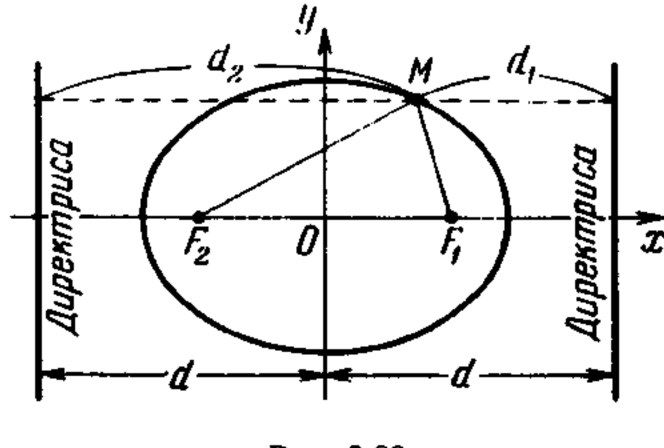
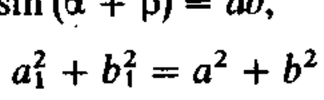


Рис. 2.80

(рис. 2.80). Для любой точки эллипса $M = (x, y)$ справедливо соотношение $r_1/d_1 = r_2/d_2 = e$.

Диаметры — хорды, проходящие через центр эллипса; они делятся в центре пополам (рис. 2.81). Геометрическим местом середин хорд, параллельных одному из диаметров эллипса, снова является диаметр, который называется *сопряженным* заданному. Если k и k' — угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров, то $kk' = -b^2/a^2$. Далее, если длины двух сопряженных диаметров равны $2a_1$ и $2b_1$, а α и β — острые углы между диаметрами и большой осью ($k = -\operatorname{tg}\alpha$, $k' = \operatorname{tg}\beta$), то



$$a_1b_1\sin(\alpha + \beta) = ab,$$
$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

(*теорема Аполлония*).

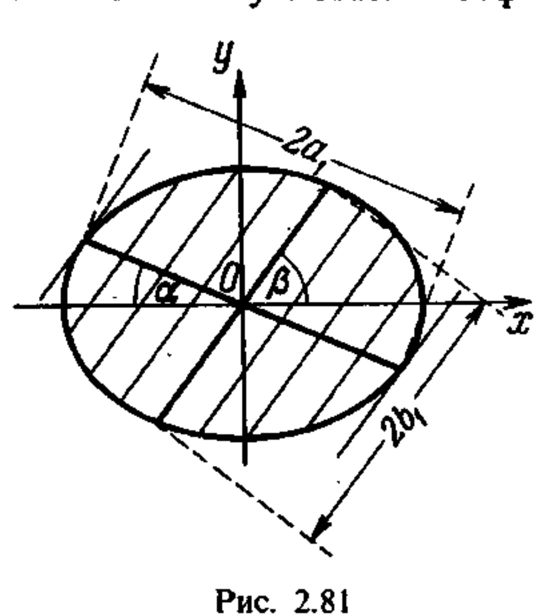


Рис. 2.81

Касательная к эллипсу в точке $M = (x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Нормаль и касательная к эллипсу в точке M являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов, образованных радиусами-векторами, проведенными из фокусов эллипса в эту точку (рис. 2.82). Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса тогда и только тогда, когда $A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0$.

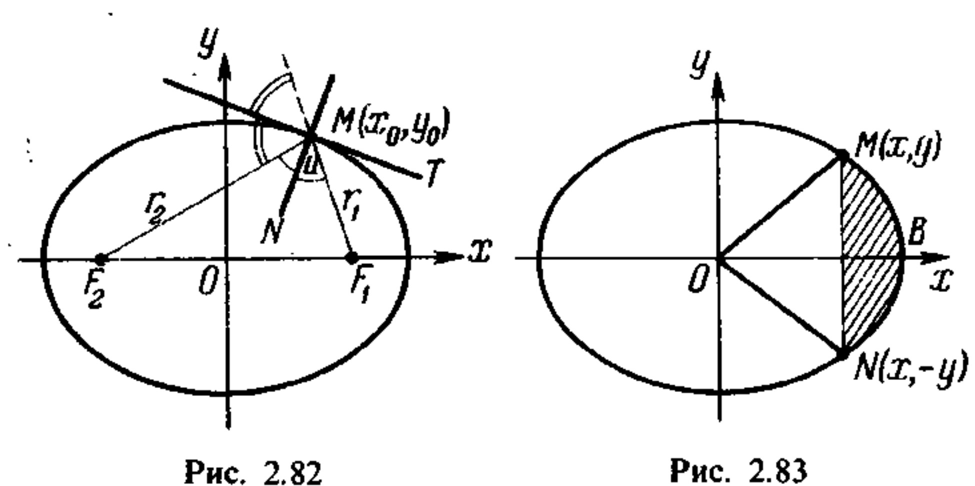


Рис. 2.82 Рис. 2.83

Радиус кривизны R в точке $M = (x_0, y_0)$ (см. рис. 2.82):

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\cos^3 u},$$

где u — угол между нормалью и радиусом-вектором, проведенным из фокуса в точку M ее пересечения с эллипсом.

Для вершин A и B (см. рис. 2.79) $R = b^2/a = p$; для вершин C и D $R = a^2/b$.

Площадь: $S = \pi ab$. Площадь сектора: $BOM = \dfrac{ab}{2}\arccos\dfrac{x}{a}$ (рис. 2.83). Площадь сегмента: $MBN = ab\arccos\dfrac{x}{a} - xy$.

Длина эллипса:

$$L = 4aE(e) = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5} - \ldots\right],$$

где $E(e) = E(e, \pi/2)$ — полный эллиптический интег-

рал 2-го рода. Если положить $\dfrac{a-b}{a+b}=\lambda$, то

$$L=\pi(a+b)\left[1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{64}+\frac{\lambda^6}{256}+\frac{25\lambda^8}{16384}+\ldots\right].$$

Приближенные формулы:

$$L\approx\pi\left[1{,}5(a+b)-\sqrt{ab}\right],$$

$$L\approx\pi(a+b)\frac{64-3\lambda^4}{64-16\lambda^2}.$$

Окружность – частный случай эллипса ($a=b$), так что ее свойства вытекают из свойств эллипса. Оба фокуса совпадают с центром окружности ($c=0$).

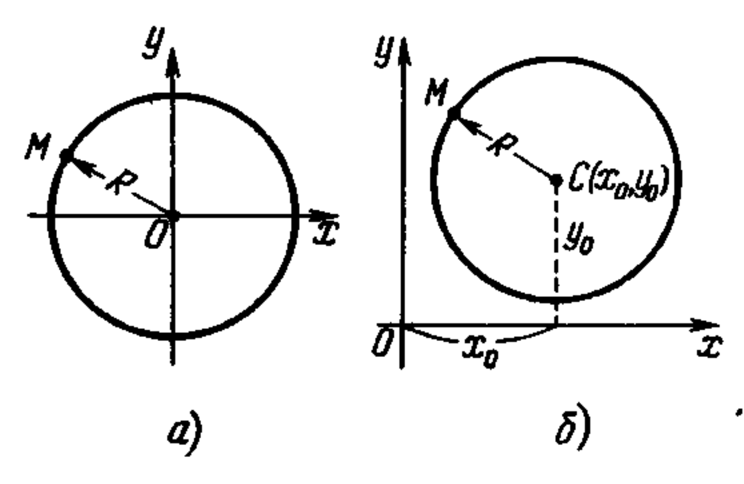


Рис. 2.84

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R (рис. 2.84, *а*): $x^2+y^2=R^2$.

Уравнение окружности с центром в точке $C=(x_0,\ y_0)$ и радиусом R (рис. 2.84, *б*);

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2;$$

в *параметрической форме* (рис. 2.85):

$$x=x_0+R\cos t,$$
$$y=y_0+R\sin t,$$

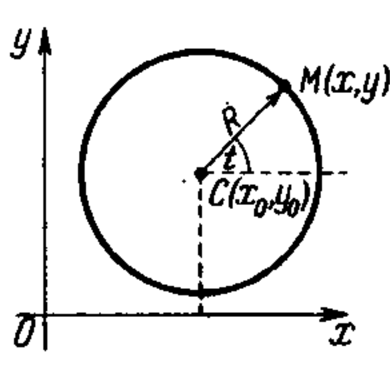


Рис. 2.85

где t – угол, образованный подвижным радиусом с положительным направлением оси Ox, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Уравнение (2.98) описывает окружность тогда и только тогда, когда $b=0$, $a=c\neq 0$ и $e^2+d^2-af>0$. Канонический вид уравнения (рис. 2.84) в этом случае: $x^2+y^2=R^2$.

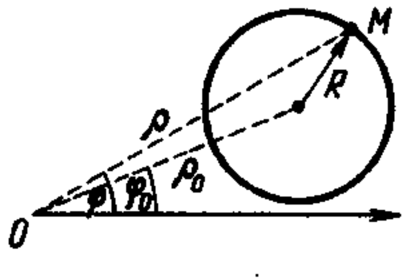


Рис. 2.86

Рис. 2.87

Уравнение окружности в *полярных координатах* имеет вид (рис. 2.86)

$$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=R^2;$$

здесь $(\rho_0,\ \varphi_0)$ – полярные координаты центра окружности. Если центр лежит на полярной оси и окружность проходит через полюс (рис. 2.87), то уравнение принимает вид $\rho=2R\cos\varphi$.

Гиперболой называется множество точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных фиксированных точек $F_1=(+c,\ 0)$ и $F_2=(-c,\ 0)$ (*фокусов*) постоянна (равна $2a<2c$).

Точки, для которых $r_1-r_2=2a$ $(r_1=|\overrightarrow{MF_1}|$, $r_2=|\overrightarrow{MF_2}|)$, принадлежат одной ветви гиперболы (на рис. 2.88 – *левой*); точки, для которых $r_2-r_1=2a$, принадлежат другой (*правой*) ветви.

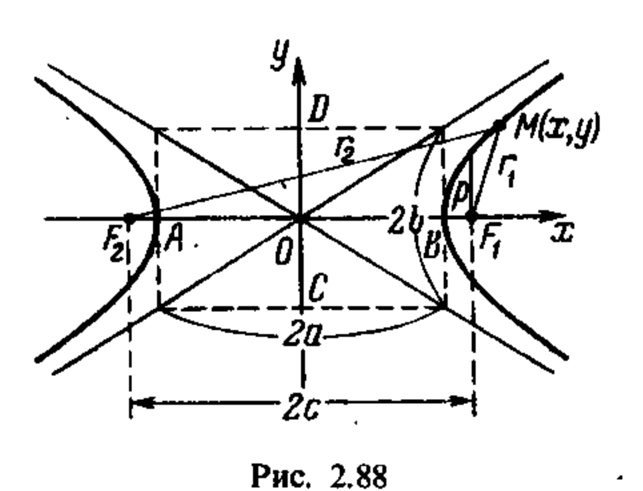


Рис. 2.88

Расстояния r_1 и r_2 вычисляют по формулам $r_1=\pm(ex-a)$, $r_2=\pm(ex+a)$. Верхний знак соответствует правой ветви, нижний – левой.

Элементы гиперболы: *действительная ось* $AB=2a$; *вершины* A, B; *центр* O; *фокусы* F_1, F_2, лежащие на действительной оси по обе стороны от центра на расстоянии $c(>a)$ от него; *мнимая ось* $CD=2b$ $(b=\sqrt{c^2-a^2})$; *фокальный параметр* $p=b^2/a$ (половина хорды, проведенной через фокус перпендикулярно действительной оси) и $e=c/a>1$ – *эксцентриситет* (см. рис. 2.88).

Каноническое уравнение гиперболы (оси координат совпадают с осями гиперболы) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение в *параметрической форме*: $x=a\operatorname{ch}t$, $y=b\operatorname{sh}t$, $-\infty<t<+\infty$.

Уравнение в *полярных координатах*:

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},\quad e>1.$$

Директрисы – прямые, перпендикулярные действительной оси и пересекающие ее на расстоянии $d=a/e$ от центра (рис. 2.89). Для любой точки $M(x,\ y)$ гиперболы $\dfrac{r_1}{d_1}=\dfrac{r_2}{d_2}=e$.

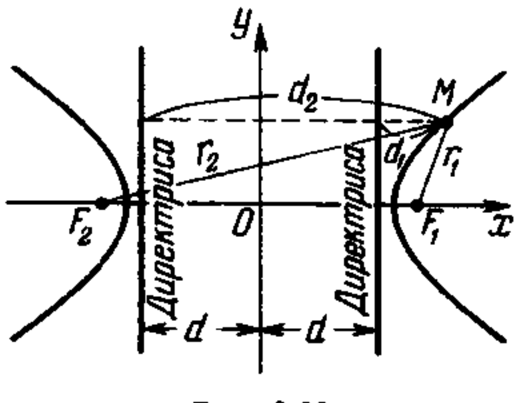


Рис. 2.89

Касательная к гиперболе в точке $M(x_0,\ y_0)$ имеет уравнение $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$. Касательная и нормаль к гиперболе являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов, образованных радиусами-векторами, проведенными

из фокусов в точку касания (рис. 2.90). Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы тогда и только тогда, когда $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

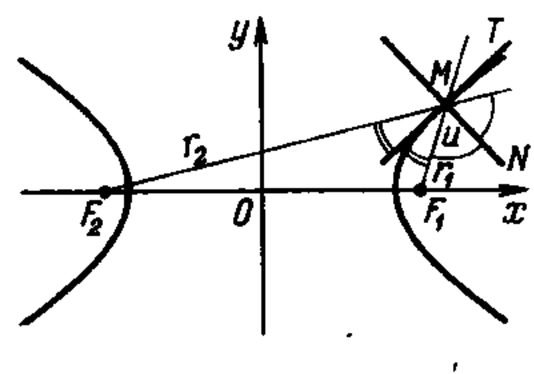


Рис. 2.90

Асимптоты гиперболы (рис. 2.91) – прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность. Угловые коэффициенты асимптот: $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm b/a$. Уравнения обеих асимптот: $y = \pm \dfrac{b}{a} x$.

Отрезок касательной TT_1 между асимптотами делится точкой касания пополам: $TM = MT_1$. Площадь треугольника TOT_1 между касательной

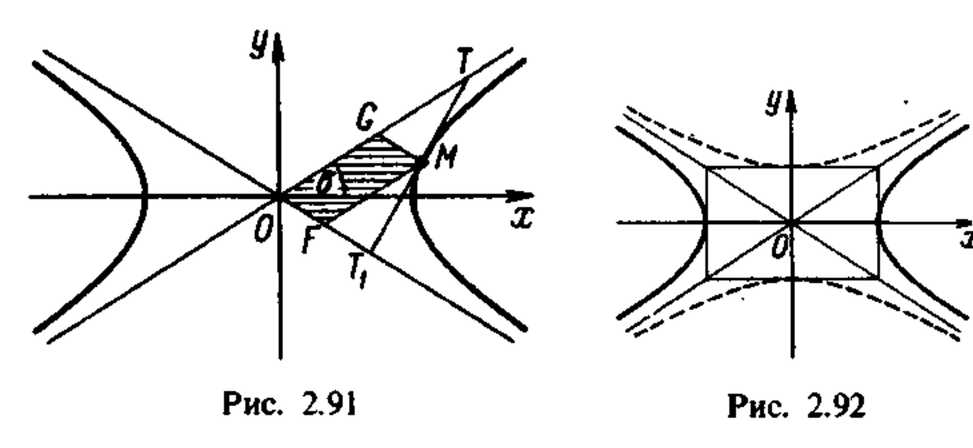


Рис. 2.91 Рис. 2.92

и обеими асимптотами равна ab (для любой точки гиперболы M). Если через точку M провести две прямые MF и MG, параллельные асимптотам, то площадь параллелограмма $OFMG$ равна $\dfrac{a^2+b^2}{4} = \dfrac{c^2}{4}$.

Сопряженные гиперболы (рис. 2.92)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

(вторая изображена на рис. 2.92 штриховой линией) имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них равна мнимой оси другой, и наоборот.

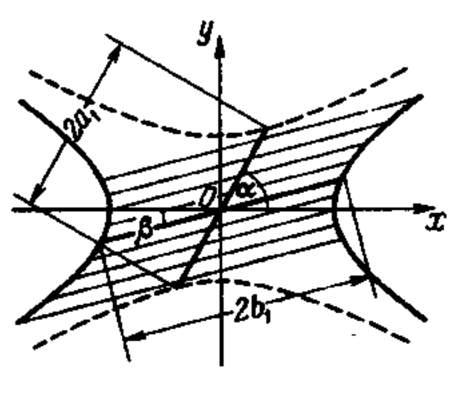


Рис. 2.93

Диаметры – хорды данной и сопряженной ей гипербол, проходящие через их общий центр; они делятся в центре пополам. Два диаметра с угловыми коэффициентами k и k' называются *сопряженными*, если $b^2/a^2 = kk'$. Каждый из обоих диаметров делит хорды данной или сопряженной ей гиперболы, параллельные другому диаметру, на две равные части *) (рис. 2.93). Если

*) Из двух сопряженных диаметров только один (для которого $|k| < b/a$) пересекает данную гиперболу. Получающаяся при этом хорда – диаметр в узком смысле слова – делится в центре пополам.

длины сопряженных диаметров равны $2a_1$ и $2b_1$, а α и β – острые углы, образованные этими диаметрами с действительной осью ($\alpha > \beta$), то

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2, \qquad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta).$$

Радиус кривизны R в точке $M = (x_0, y_0)$ (см. рис. 2.90):

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\cos^3 u},$$

где u – угол между нормалью и радиусом-вектором, проведенным из фокуса в точку касания. В вершинах A и B (см. рис. 2.88) $R = p = b^2/a$.

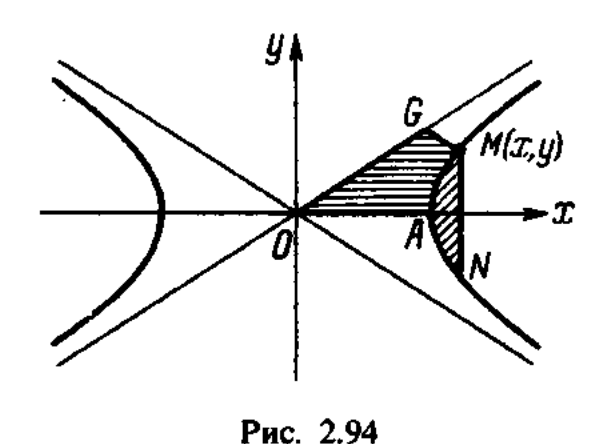


Рис. 2.94

Площадь сегмента гиперболы (рис. 2.94):

$$AMN = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = xy - ab \operatorname{Arch} \frac{x}{a}.$$

Площадь $OAMG = \dfrac{ab}{4} + \dfrac{ab}{2} \ln \dfrac{2|\overrightarrow{OG}|}{c}$ (отрезок MG параллелен асимптоте).

Равнобочная гипербола имеет равные оси: $a = b$. Ее уравнение: $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равнобочных гипербол перпендикулярны друг другу. Если выбрать асимптоты в качестве осей координат (рис. 2.95), то уравнение равнобочной гиперболы будет иметь вид $xy = a^2/2$.

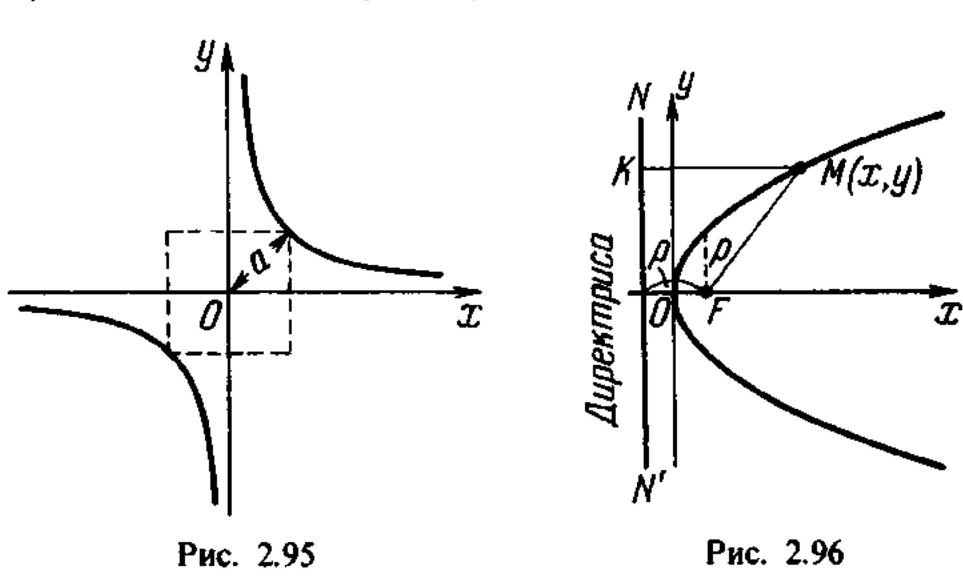


Рис. 2.95 Рис. 2.96

Парабола – это множество точек $M = (x, y)$, равноудаленных от фиксированной точки (*фокуса*) $F = (p/2, 0)$ и от данной прямой (*директрисы*) (рис. 2.96): $|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MK}| = x + \dfrac{p}{2}$.

Элементы параболы: ось x – *ось параболы*, *вершина* O, *фокус* $F = (p/2, 0)$, *директриса* (прямая, перпендикулярная оси x; уравнение: $x = -p/2$) и *фокальный параметр* p (расстояние от фокуса до директрисы, или половина хорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси x). *Эксцентриситет* параболы e равен единице.

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$ (см. рис. 2.96); в *полярных координатах*: $\rho = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}$; с осью, параллельной оси y: $y = ax^2 + bx + c$. Фокальный параметр параболы, задаваемый последним уравнением: $p = 1/(2\,|a|)$. При $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз (рис. 2.97), при $a < 0$ — вершиной вверх; координаты вершины: $x_0 = -b/(2a)$, $y_0 = (4ac - b^2)/(4a)$.

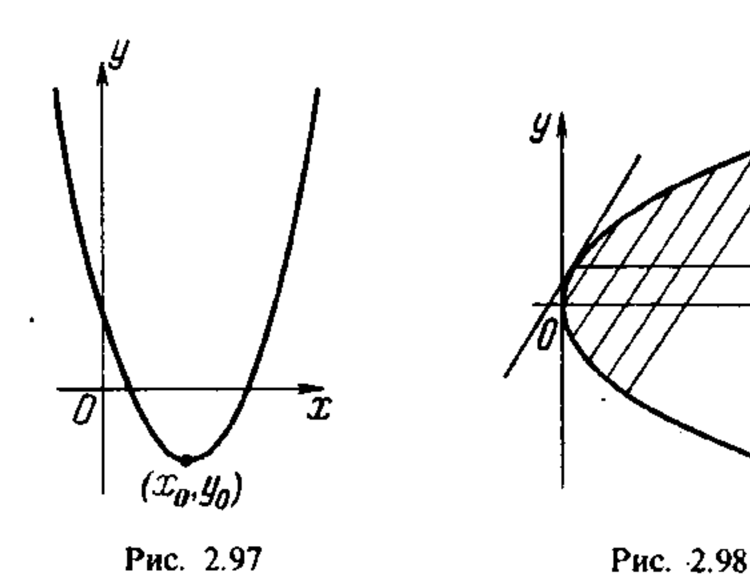


Рис. 2.97 Рис. 2.98

Под *диаметром* параболы понимают прямую, параллельную оси параболы. Диаметр делит пополам хорды, параллельные касательной, проведенной в конце диаметра (рис. 2.98). Если угловой коэффициент этих хорд равен k, то уравнение диаметра имеет вид $y = p/k$.

Уравнение *касательной* (рис. 2.99) к параболе в точке $M = (x_0, y_0)$: $yy_0 = p(x + x_0)$. Касательная и нормаль к параболе являются биссектрисами углов между фокальным радиусом-вектором точки параболы и диаметром, проходящим через эту же точку. Отрезок касательной к параболе между точками касания и пересечения с осью параболы (осью x) делится пополам касательной, проведенной через вершину параболы (осью y):

$$TS = SM, \qquad TF = FM, \qquad TO = OP = x_0.$$

Прямая $y = kx + b$ касается параболы тогда и только тогда, когда $p = 2bk$.

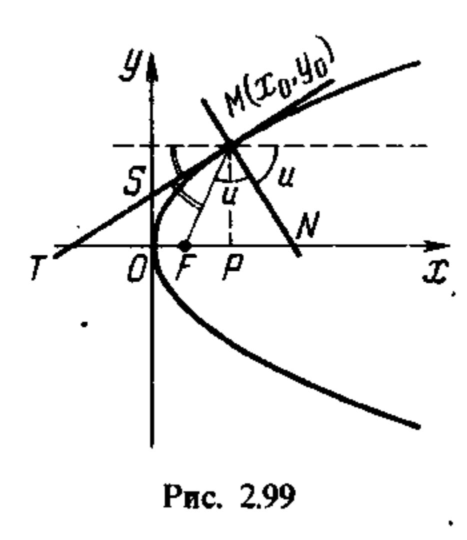


Рис. 2.99

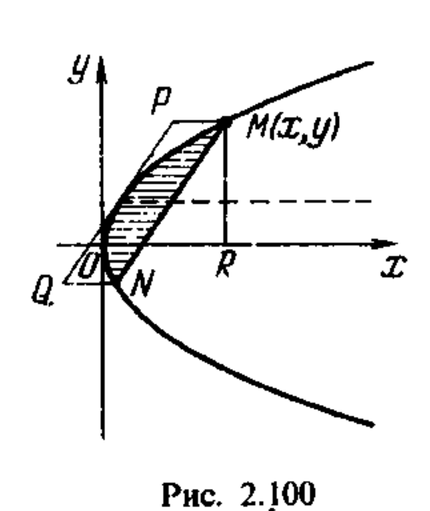


Рис. 2.100

Радиус кривизны параболы в точке $M = (x_1, y_1)$:

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\cos^3 u} = \frac{n^3}{p^2},$$

где $n = |\overrightarrow{MN}|$ — длина нормали $\overrightarrow{MN}$ (рис. 2.99). В вершине O радиус кривизны $R = p$.

Площадь сегмента параболы MON равна двум третям площади параллелограмма $PQNM$ (рис. 2.100). Площадь $OMR = \dfrac{2}{3}xy$.

Длина дуги параболы от вершины O до точки $M = (x, y)$:

$$OM = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] = \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Приближенно при малых значениях $\dfrac{x}{y}$

$$L_{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

2.6.6.2. Аналитическая геометрия в пространстве. *Расстояние* между двумя точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ в параллельной системе координат равно

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)w_1 + 2(z_2 - z_1)(x_2 - x_1)w_2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)w_3]^{1/2},$$

где w_1, w_2, w_3 — косинусы координатных углов (см. 2.6.5.2.1). В декартовых координатах

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты *середины отрезка* $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Координаты точки P, которая *делит отрезок* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *в отношении* $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}} = \lambda$:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если $\lambda < 0$, то точка P лежит вне отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$. *Координаты центра тяжести* $P(x, y, z)$ системы n материальных точек $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ с массами m_i:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ориентированный объем треугольной пирамиды с вершинами в точках P_1, P_2, P_3 и P_4:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}.$$

Объем положителен, если ориентация тройки векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$ совпадает с ориента-

цией системы координат. Если $V = 0$, то четыре точки лежат в одной плоскости (необходимое и достаточное условие).

В дальнейшем мы будем рассматривать только декартовы системы координат.

2.6.6.2.1. Прямая. Каждая *прямая в пространстве* может быть задана системой линейных уравнений относительно координат (пересечение двух плоскостей, рис. 2.101):

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{2.99}$$

Или *в векторной форме*:

$$\mathbf{r}\mathbf{N}_1 + D_1 = 0, \qquad \mathbf{r}\mathbf{N}_2 + D_2 = 0,$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{N}_i = (A_i, B_i, C_i)$ $(i = 1, 2)$.

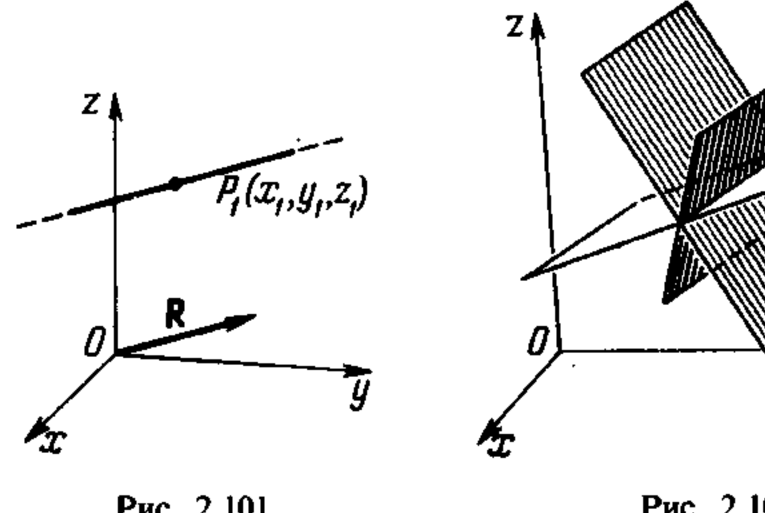


Рис. 2.101

Рис. 2.102

Прямая может быть задана точкой $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и параллельным ей вектором (*направляющим вектором*) $\mathbf{R} = (l, m, n)$ (рис. 2.102). Тогда *уравнение прямой в координатной форме* имеет вид*)

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}; \tag{2.100}$$

в векторной форме:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}\lambda,$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$;

в параметрическом виде:

$$x = x_1 + l\lambda, \quad y = y_1 + m\lambda, \quad z = z_1 + n\lambda.$$

При этом между (2.99) и (2.100) существует следующая связь:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Прямая однозначно определяется двумя точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. *Уравнение прямой:*

в координатной форме (см. сноску):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \tag{2.101}$$

в векторной форме:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

где $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ есть направляющий вектор $\mathbf{R}$ прямой:

$$\mathbf{R} = (l, m, n) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Расстояние d от точки $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ до прямой, заданной в виде (2.100), вычисляется по формуле

$$d^2 = \frac{1}{l^2 + m^2 + n^2}\{[(x_3 - x_1)m - (y_3 - y_1)l]^2 + [(y_3 - y_1)n - (z_3 - z_1)m]^2 + [(z_3 - z_1)l - (x_3 - x_1)n]^2\}.$$

Кратчайшее расстояние d между двумя прямыми, заданными уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$
$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

может быть вычислено по формуле

$$d = \frac{\pm\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}. \tag{2.102}$$

Две прямые пересекаются тогда и только тогда, когда стоящий в числителе формулы (2.102) определитель обращается в нуль ($d = 0$). Если уравнения обеих прямых объединить в систему и решить ее относительно x, y, z, то будут получены координаты точки пересечения. Угол пересечения двух прямых равен углу между направляющими векторами $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ этих прямых;

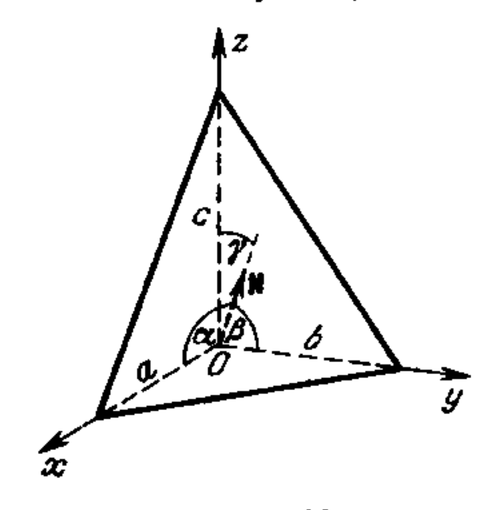


Рис. 2.103

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|}.$$

2.6.6.2.2. Плоскость. Каждую *плоскость в пространстве* можно задать линейным уравнением относительно координат (рис. 2.103):

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2.103}$$

В векторной форме:

$$\mathbf{r}\mathbf{N} + D = 0, \quad \mathbf{N} = (A, B, C), \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Перпендикулярный плоскости вектор $\mathbf{N}$ называется *нормалью к плоскости*. Если $|\mathbf{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$, то уравнение плоскости может быть записано в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad p \geqslant 0$$

(*нормальное уравнение плоскости*).

Умножением на нормирующий множитель $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак которого противоположен знаку D) уравнение (2.103) может быть приведено к нормальному;

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*) В случае, если знаменатель какой-либо из дробей равен 0, то равен 0 и соответствующий числитель.

суть *направляющие косинусы нормали*; p — расстояние от начала координат до плоскости.

Если в уравнении (2.103) $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат. При $A = 0$ ($B = 0$, $C = 0$) плоскость параллельна оси x (оси y, оси z), при $A = B = 0$ ($A = C = 0$, $B = C = 0$) плоскость параллельна плоскости xy (плоскости xz, плоскости yz).

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Эта плоскость пересекает оси координат в точках $P_1 = (a, 0, 0)$, $P_2 = (0, b, 0)$ и $P_3 = (0, 0, c)$.

Плоскость однозначно определяется:

(I) тремя своими точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, не лежащими на одной прямой;

(II) двумя своими точками P_1 и P_2 и параллельным плоскости направлением, задаваемым вектором $\mathbf{R} = (l, m, n)$, не параллельным $\overrightarrow{P_1P_2}$;

(III) точкой P_1 и двумя параллельными плоскости направлениями, задаваемыми двумя линейно независимыми векторами $\mathbf{R}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R}_2 = (l_2, m_2, n_2)$;

(IV) точкой и ненулевым вектором $\mathbf{N} = (A, B, C)$, коллинеарным вектору нормали к плоскости.

Тогда уравнения плоскости получаются следующим образом:

Случай (I):
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$ (смешанное произведение векторов),

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ — радиусы-векторы трех точек P_1, P_2, P_3, а $\mathbf{r} = (x; y; z)$.

Случай (II):
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{R} = 0$.

Случай (III):
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0$.

Случай (IV): $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$;

в векторной форме: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0$.

Множеством решений системы, состоящей из уравнений нескольких плоскостей, является *точка* или *линия пересечения* этих плоскостей (прямая). Если система уравнений не имеет решений, то плоскости не имеют общих точек.

Угол пересечения φ *двух плоскостей* равен углу между векторами нормалей $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ к соответствующим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|}.$$

Угол пересечения ψ *между плоскостью и прямой*: $\psi = 90° - \chi$ (χ — угол между вектором нормали $\mathbf{N}$ к плоскости и направляющим вектором $\mathbf{R}$ прямой):

$$\cos\chi = \sin\psi = \frac{|\mathbf{NR}|}{|\mathbf{N}||\mathbf{R}|}.$$

2.6.6.2.3. Поверхности 2-го порядка. *Поверхностями 2-го порядка* в пространстве называются такие множества точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0; \quad (2.104)$$

в матричной форме:

$$\mathbf{r}A\mathbf{r}^T + 2\mathbf{a}\mathbf{r}^T + a_{44} = 0,$$

где

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (a_{14}, a_{24}, a_{34}) \quad (A \neq O).$$

Приведение к каноническому виду. При параллельном переносе системы координат на вектор $\mathbf{r}^*$, координаты которого удовлетворяют уравнению $A\mathbf{r}^* = -\mathbf{a}$, в уравнении поверхности 2-го порядка исчезают линейные члены. Уравнение принимает вид

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z' + b_{44} = 0, \quad (2.105)$$

где x', y', z' — координаты относительно новой системы координат Σ'.

В матричной форме: $\mathbf{r}'B\mathbf{r}'^T + b_{44} = 0$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, $B = \| b_{ij} \|$. (Начало новой системы координат P является центром симметрии поверхности 2-го порядка, т. е. если $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ — точка поверхности, то $-\mathbf{r}' = (-x', -y', -z')$ — также точка поверхности 2-го порядка.) Матрицы A и B — симметрические ($a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$), поэтому их собственные значения действительны, а собственные векторы ортогональны.

При последующем преобразовании (преобразование к главным осям) к системе координат Σ'' с началом координат, остающимся в точке P, и осями координат, совпадающими по направлению с собственными векторами, уравнение поверхности 2-го порядка приобретает вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + c_{44} = 0, \quad (2.106)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения матрицы B.

В матричной форме:

$$\mathbf{r}''C\mathbf{r}''^T + c_{44} = 0, \quad \mathbf{r}''^T = (x'', y'', z''),$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

где x'', y'' и z'' — координаты точки на поверхности 2-го порядка относительно Σ''. Если собственное значение имеет кратность k, то k линейно независимых собственных векторов следует ортогонализировать при помощи метода Грама-Шмидта (см. 2.4.4.1.5).

Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированные собственные векторы, принадлежащие B, то уравнение (2.106) получается из уравнения (2.105), если положить $\mathbf{r}' = \mathbf{r}''D^T$. Здесь D – матрица, столбцы которой составлены из координат ортонормированных собственных векторов матрицы B (D ортогональна). Уравнение (2.106) называется *каноническим уравнением* поверхности 2-го порядка. Оси координат являются осями симметрии поверхности.

Если система уравнений $A\mathbf{r}^* = -\mathbf{a}$ не имеет решений (не существует центра симметрии), то по крайней мере одно из собственных значений равно нулю. Приведение к каноническому виду производится аналогично случаю ненулевых собственных значений. Необходимо следить лишь за тем, чтобы в случае двукратного собственного значения, равного нулю, собственный вектор был выбран так, чтобы он был ортогонален вектору $\mathbf{a}$ (свободному члену): $\mathbf{a}\mathbf{r}^T = 0$. Этим обеспечивается исчезновение двух линейных членов в уравнении (2.104). После преобразования к главным осям уравнение поверхности 2-го порядка приобретает вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + mz' = 0 \qquad (2.107)$$

(при этом возможно равенство $\lambda_2 = 0$); x', y', z' – координаты относительно системы Σ'.

В дальнейшем предполагается, что поверхности 2-го порядка приведены к каноническому виду (формулы (2.106) и (2.107)). Тогда возможна следующая классификация (условие $\lambda_1 > 0$ всегда может быть выполнено путем замены переменных или умножением уравнения на -1).

Канонический вид: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$.

λ_2	λ_3	d	Поверхность
>0	>0	<0	эллипсоид
>0	>0	>0	мнимый эллипсоид
>0	>0	0	вырожденный эллипсоид – мнимый конус с действительной вершиной
>0	<0	<0	однополостный гиперболоид
>0	<0	>0	двуполостный гиперболоид
>0	<0	0	эллиптический конус (ось конуса – ось z)
>0	0	>0	цилиндр с мнимыми образующими
>0	0	<0	эллиптический цилиндр
>0	0	0	пара мнимых пересекающихся плоскостей
<0	0	$\neq 0$	гиперболический цилиндр
<0	0	0	пара пересекающихся плоскостей, параллельных оси z
0	0	<0	пара параллельных плоскостей, перпендикулярных оси x
0	0	>0	пара мнимых параллельных плоскостей
0	0	0	координатная плоскость (плоскость Oyz)

Канонический вид: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + mz = 0$.

λ_1	λ_2	m	Поверхность
>0	>0	<0	эллиптический параболоид
>0	<0	<0	гиперболический параболоид («седло»)
>0	0	$\neq 0$	параболический цилиндр

Некоторые свойства поверхностей 2-го порядка (заданы в каноническом виде).

Поверхности 2-го порядка с центром симметрии.

Эллипсоид (рис. 2.104): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, где a, b и c – полуоси.

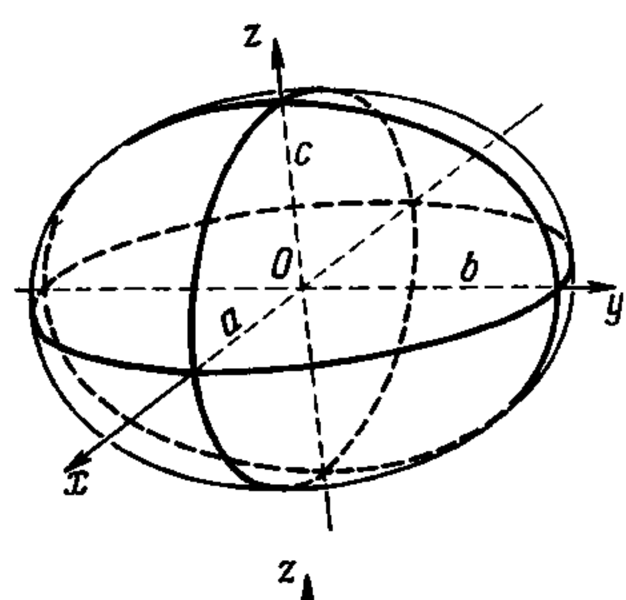


Рис. 2.104

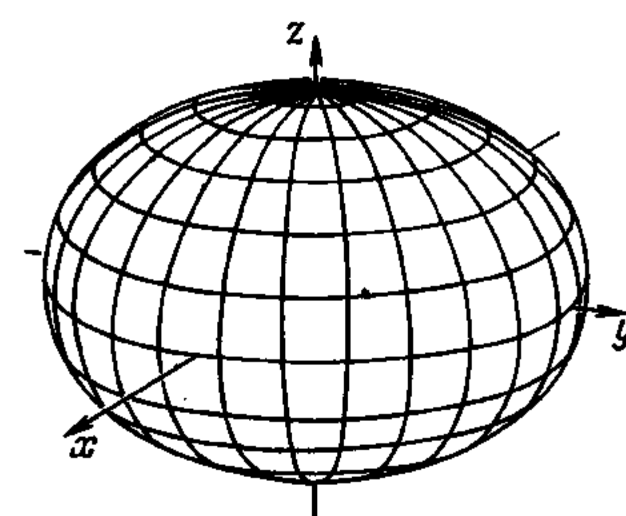


Рис. 2.105

Если $a = b > c$, то имеем сплющенный эллипсоид вращения, получающийся при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, лежащего в плоскости Oxz, вокруг его малой оси (рис. 2.105). При $a = b < c$ имеем вытянутый эллипсоид вращения,

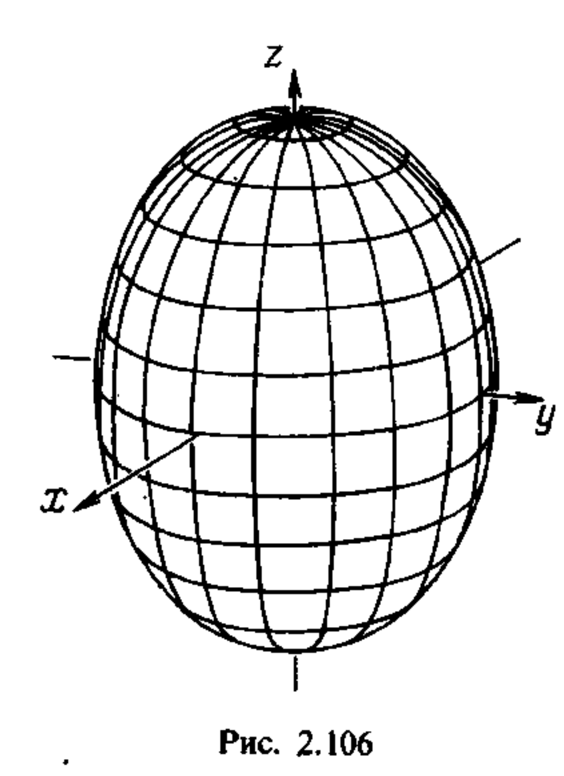


Рис. 2.106

который получается при вращении лежащего в плоскости Oxz эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг его большой оси (рис. 2.106). При $a=b=c$ имеем сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Сечение эллипсоида любой плоскостью есть эллипс (в частном случае – круг). Объем эллипсоида равен $\frac{4}{3}\pi abc$, объем сферы равен $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Однополостный гиперболоид (рис. 2.107):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

a и b – действительные полуоси, c – мнимая полуось. (О прямолинейных образующих см. в конце раздела.)

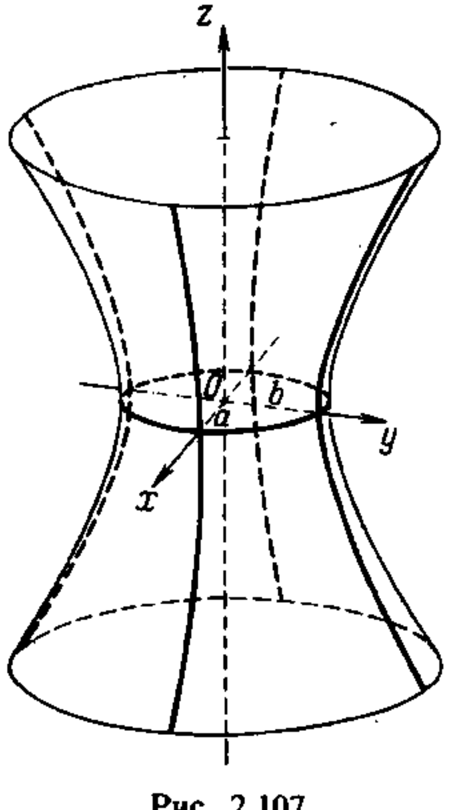


Рис. 2.107

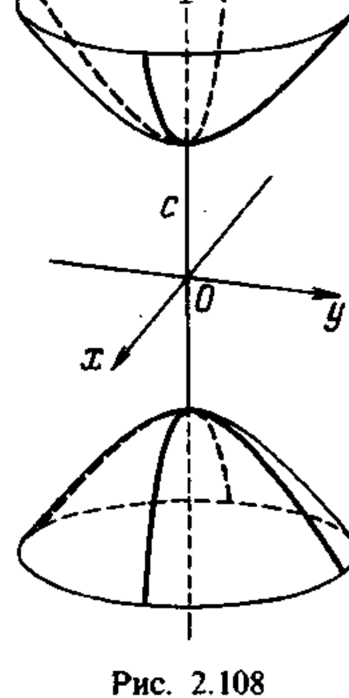


Рис. 2.108

Двуполостный гиперболоид (рис. 2.108):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

c – действительная полуось, a и b – мнимые полуоси.

Для обоих гиперболоидов сечения, параллельные оси z, – гиперболы (для однополостного гиперболоида может быть пара пересекающихся прямых); сечения, параллельные плоскости Oxy, – эллипсы.

Если $a=b$, то гиперболоид может быть получен вращением гиперболы с полуосями a и c вокруг оси z: мнимой – в случае однополостного и действительной – в случае двуполостного гиперболоида.

Конус (рис. 2.109)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

имеет вершину в начале координат; за его направляющую кривую может быть взят эллипс с полуосями a и b, плоскость которого перпендикулярна оси z и находится на расстоянии c от начала координат. Этот конус является асимптотическим для обоих гиперболоидов

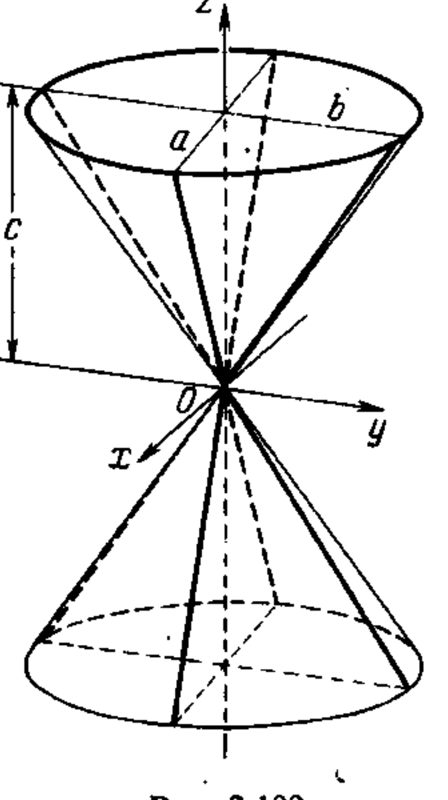


Рис. 2.109

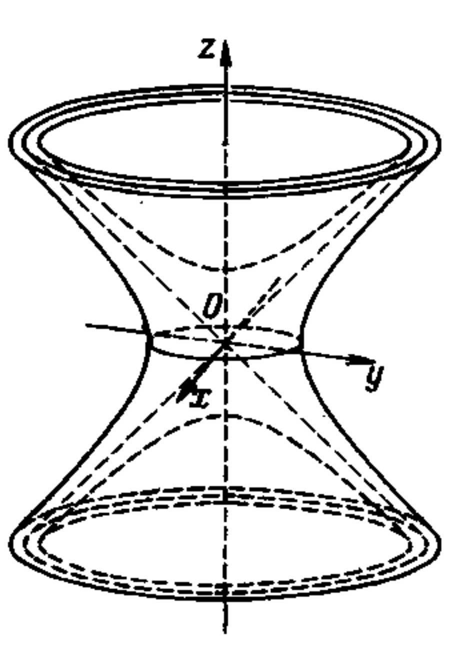


Рис. 2.110

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, т. е. каждая из его образующих при удалении в бесконечность неограниченно приближается к обоим гиперболоидам (рис. 2.110). Если $a=b$, то имеем прямой круговой конус.

Поверхности 2-го порядка, не имеющие центра симметрии.

Эллиптический параболоид (рис. 2.111): $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Сечения, параллельные оси z, – параболы; сечения, параллельные плоскости Oxy, – эллипсы. Если $a=b$, то имеем *параболоид вращения*, получаемый при вращении параболы $z=x^2/a^2$, лежащей в плоскости Oxz, вокруг ее оси.

Объем части параболоида, отсекаемой плоскостью, перпендикулярной его оси, на высоте h, равен $\frac{1}{2}\pi abh$, т. е. равен половине объема эллиптического цилиндра с такими же основанием и высотой.

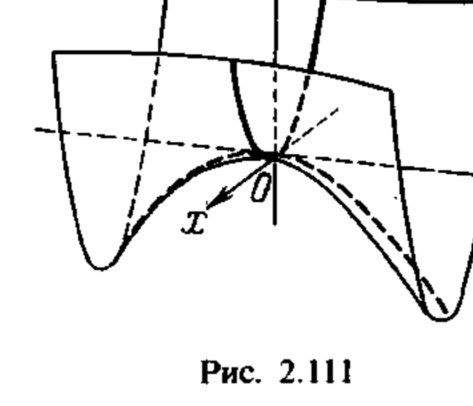


Рис. 2.111

Гиперболический параболоид (рис. 2.112):

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Сечения, параллельные плоскости Oyz, – конгруэнтные (одинаковые) параболы; сечения, параллельные плоскости Oxz, – также конгруэнтные параболы; сечения, па-

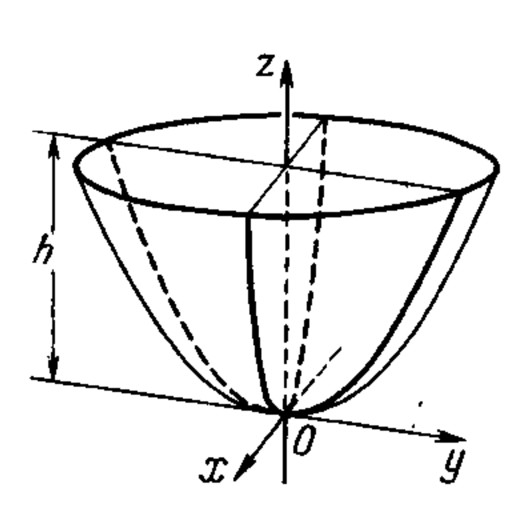


Рис. 2.112

раллельные плоскости Oxy, – гиперболы (а также пары пересекающихся прямых).

Общие свойства. *Прямолинейной образующей* поверхности называется прямая линия,

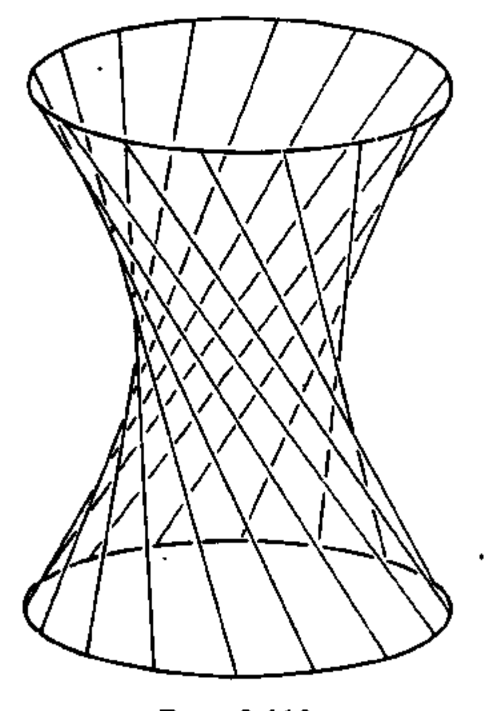


Рис. 2.113

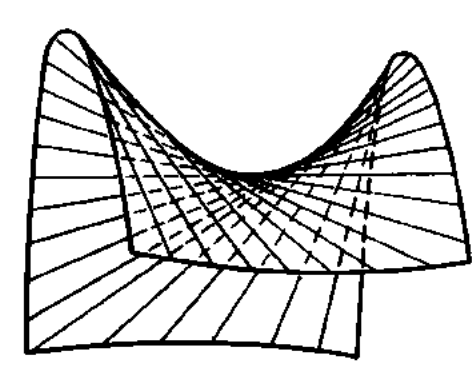


Рис. 2.114

целиком лежащая на данной поверхности; например, прямолинейные образующие конической или цилиндрической поверхности.

Однополостный гиперболоид (рис. 2.113) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\text{I. } \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b};$$

$$\text{II. } \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b};$$

u и v – произвольные величины.

Гиперболический параболоид (рис. 2.114) $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ также имеет два семейства образующих:

$$\text{I. } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u, \quad u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z;$$

$$\text{II. } \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=v, \quad v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z;$$

здесь u и v – также произвольные величины. Через каждую точку поверхности в обоих случаях проходят две прямые: по одной образующей из каждого семейства (на рис. 2.113 и 2.114 показано лишь по одному семейству прямых).

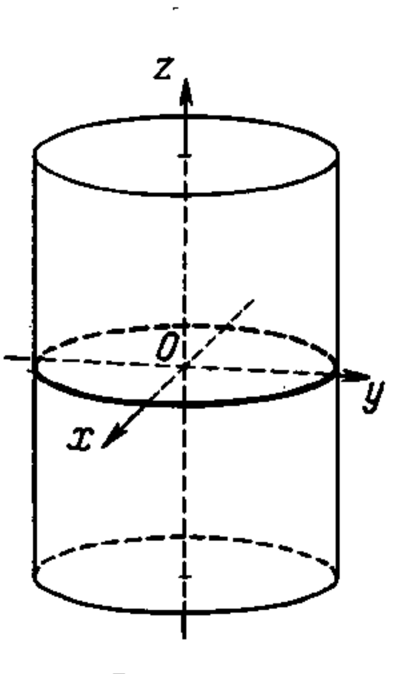


Рис. 2.115

Цилиндры. Форма цилиндра определяется его направляющей. Мы будем считать ее расположенной в плоскости Oxy, а образующие – параллельными оси z. Тогда имеются три цилиндра 2-го порядка:

эллиптический цилиндр (рис. 2.115)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

при $a=b=R$ получаем *прямой круговой цилиндр*

$$x^2+y^2=R^2;$$

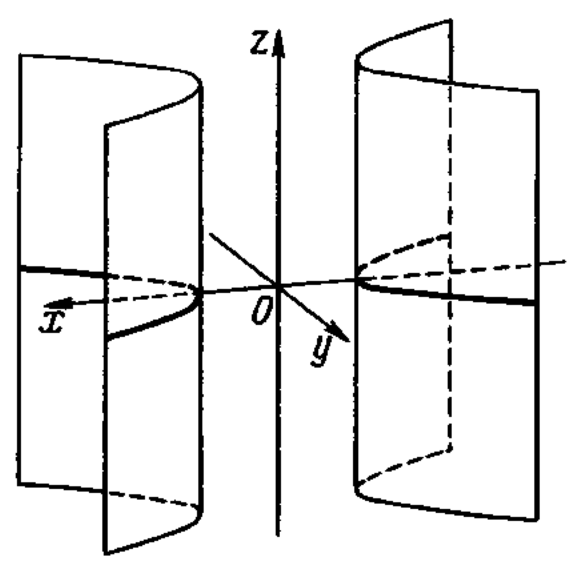


Рис. 2.116

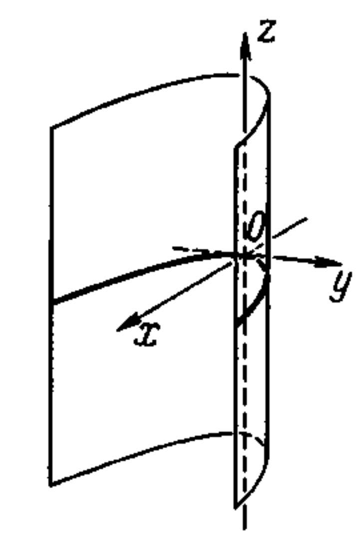


Рис. 2.117

гиперболический цилиндр (рис. 2.116)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

параболический цилиндр (рис. 2.117)

$$y^2=2px.$$

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа, с которыми обычно приходится иметь дело – натуральные, целые (положительные и отрицательные), рациональные и иррациональные, – составляют множество действительных чисел.

3.1.1.1. Система аксиом действительных чисел. Множество **R** действительных чисел может быть охарактеризовано следующими шестнадцатью аксиомами.

Аксиомы сложения.

1. Для любых чисел a, $b \in \mathbf{R}$ определено единственное число $a + b \in \mathbf{R}$, называемое *суммой* чисел a и b.

2. Для любых a, $b \in \mathbf{R}$ имеет место соотношение $a + b = b + a$*) (*коммутативность*).

3. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ имеет место соотношение $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность*).

4. Существует число $0 \in \mathbf{R}$ такое, что $a + 0 = a$ для всех $a \in \mathbf{R}$. Число 0 носит название *нуль*.

5. Для любого числа $a \in \mathbf{R}$ существует число $b \in \mathbf{R}$ такое, что $a + b = 0$.

Аксиомы умножения.

6. Для любых чисел a, $b \in \mathbf{R}$ определено единственное число $a \cdot b \in \mathbf{R}$, называемое *произведением* чисел a и b.

7. Для любых a, $b \in \mathbf{R}$ имеет место соотношение $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность*).

8. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ имеет место соотношение $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*ассоциативность*).

9. Существует число $1 \in \mathbf{R}$ такое, что $1 \cdot a = a$ для всех $a \in \mathbf{R}$. Число 1 носит название *единица*.

10. Для любого $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, существует $b \in \mathbf{R}$ такое, что $a \cdot b = 1$.

11. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ имеем $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*дистрибутивность*).

Таким образом, множество **R** образует относительно сложения коммутативную группу, а множество **R** без нуля образует коммутативную группу относительно умножения.

Следствия из аксиом сложения и умножения. 1) Для двух действительных чисел a и b имеется ровно одно действительное число x такое, что $a + x = b$. Число x называется *разностью* чисел b и a и обозначается $b - a$. При этом говорят, что b – *уменьшаемое*, a – *вычитаемое* и a *вычитается* из b. В случае $0 - a$ пишут $-a$. Таким образом, число b из аксиомы 5 однозначно определено.

2) Для любого $a \in \mathbf{R}$ имеем: $a = -(-a)$, $-0 = 0$.

3) Для любых a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ имеем: $b - a = d - c$ эквивалентно тому, что $a + d = b + c$;

$$(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c);$$

$$(b + c) - (a + d) = (b - a) - (d - c).$$

4) Из $a \cdot b = 0$ следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$.

5) Для действительных чисел a и b, где $a \neq 0$, существует единственное действительное число x такое, что $a \cdot x = b$. Число x называется *частным* (*дробью*) от деления b на a и обозначается $\frac{b}{a}$ или b/a. При этом b называется *делимым* (*числителем*), а a – *делителем* (*знаменателем*).

6) Для любого $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ имеем $\dfrac{1}{1/a} = a$.

7) Для любых a, b, c, $d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ равенство $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ эквивалентно тому, что $a \cdot d = b \cdot c$; кроме того,

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c},$$

$$\frac{b/a}{d/c} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}.$$

8) Для любых a, $b \in \mathbf{R}$ и любого $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ выполняется соотношение

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

9) Для любого $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $-a = (-1) \cdot a$.

10) Для любых a, $b \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$.

11) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Множество **R** действительных чисел обладает вследствие указанных свойств алгебраической структурой поля (коммутативного тела).

Кроме того, в **R** вводится отношение порядка («больше», «меньше», «равно»), удовлетворяющее следующим аксиомам.

*) Тождественность двух действительных чисел выражается при помощи знака равенства. Если a и b – различные действительные числа, то пишут $a \neq b$.

Аксиомы порядка.

12. Для двух чисел a, $b \in \mathbf{R}$ имеет место одно (и только одно) из трех соотношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

13. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ таких, что $a < b$ и $b < c$, справедливо соотношение $a < c$ (*транзитивность*).

14. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ таких, что $a < b$, справедливо соотношение $a + c < b + c$.

15. Для любых a, b, $c \in \mathbf{R}$ таких, что $a < b$ и $c > 0$, справедливо соотношение $a \cdot c < b \cdot c$.

Если $a < b$, то говорят, что a *меньше* b (или b *больше* a); в этом случае пишут также $b > a$. Если или $a < b$, или $a = b$, то пишут $a \leqslant b$. Действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a > 0$, называются *положительными*; действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a < 0$, называются *отрицательными*.

Следствия из аксиом порядка. 1) Если $a < b$, то $-a > -b$. 2) Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$. 3) Если $a < b$ и $c < d$, причем $b > 0$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot d$. 4) $1 > 0$. 5) Если $a > 0$, то $1/a > 0$.

16. *Принцип непрерывности Дедекинда.* Пусть множество $\mathbf{R}$ действительных чисел разделено на два класса K_1 и K_2 так, что: а) классы K_1 и K_2 не пусты; б) каждое действительное число относится только к одному классу; в) из условий $a \in K_1$ и $b < a$ следует, что $b \in K_1$.

Тогда существует единственное действительное число s такое, что все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a' < s$, принадлежат классу K_1, а все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $a'' > s$, принадлежат классу K_2. Число s называется *сечением* множества действительных чисел.

Множество $\mathbf{R}$ действительных чисел полностью определяется указанными аксиомами 1 – 16.

Геометрическое изображение действительных чисел. Если на прямой g заданием точки O и единичного вектора введена система координат, то каждая точка M прямой g однозначно определяется своей координатой x. Таким образом, каждой точке M прямой g соответствует одно действительное число x, и обратно: каждому действительному числу x соответствует одна точка M прямой g. Прямая g называется *числовой прямой*. Таким образом, точки прямой g и соответствующие им действительные числа могут употребляться равнозначно. При этом говорят: точка a *лежит левее* b (или b *лежит правее* a) в случае, если $a < b$. В частности, отрицательные числа лежат левее нулевой точки O, а положительные числа – правее точки O.

3.1.1.2. Натуральные, целые и рациональные числа. К понятию натуральных чисел приходят в процессе счета. Натуральные числа получаются путем последовательного прибавления 1, начиная с 1. Множество *натуральных чисел* $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ обладает следующими свойствами:

1. $1 \in \mathbf{N}$.
2. Из $n \in \mathbf{N}$ следует $n + 1 \in \mathbf{N}$.
3. Если $n \in \mathbf{N}$, то $n - 1 \in \mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда $n \neq 1$.
4. Если M – подмножество $\mathbf{N}$ со свойствами: а) $1 \in M$; б) из $n \in M$ следует $n + 1 \in M$, то $M = \mathbf{N}$.

Свойство 4 выражает тот факт, что таким путем последовательного прибавления получаются все натуральные числа. Это свойство называется *аксиомой индукции*. Оно позволяет проводить доказательства по индукции.

Принцип доказательства по методу полной (математической) индукции. Пусть $A(n)$ – зависящее от $n \in \mathbf{N}$ утверждение. Если доказано, что: а) $A(1)$ выполняется; б) при условии, что $A(n)$ справедливо для некоторого n, верно также $A(n+1)$ (шаг индукции), то $A(n)$ справедливо для всех $n \in \mathbf{N}$ *).

Пример. Доказать правильность утверждения $A(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. Очевидно, что $A(1)$ верно. Пусть $A(n)$ верно для некоторого числа $n \in \mathbf{N}$; тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Следовательно, верно также $A(n+1)$. Тогда, согласно аксиоме индукции, утверждение $A(n)$ верно для всех $n \in \mathbf{N}$.

Из принципа непрерывности Дедекинда вытекает

Аксиома Архимеда. Для каждого действительного числа a существует натуральное число n такое, что $a < n$.

Сумма и произведение натуральных чисел суть натуральные числа. Однако если $n \leqslant m$, то $n - m \notin \mathbf{N}$. Следующее определение приводит к такому расширению области натуральных чисел, в котором операция вычитания выполнима неограниченно: действительное число g называется *целым числом*, если существуют такие натуральные числа n и m, что $g = n - m$.

Сумма, разность и произведение целых чисел – всегда целые числа. Множество целых чисел $\mathbf{Z}$ образует коммутативное кольцо. Частное от деления целых чисел не всегда есть целое число.

Действительное число a называется *рациональным*, если существуют такие целые числа g_1 и g_2 ($g_2 \neq 0$), что $a = g_1/g_2$. В противном случае a называется *иррациональным*.

Числа g_1 и g_2 не определены однозначно числом a: числитель и знаменатель дроби могут быть домножены на одно и то же целое число p ($p \neq 0$): $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g_1 p}{g_2 p}$. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbf{Q}$.

Каждое действительное число может быть записано в виде десятичной дроби. При этом рациональным числам и только им соответствуют периодические десятичные дроби. Однако, например, разложение в десятичную дробь действительного числа $\sqrt{2}$, т. е. такого однозначно определенного положительного действительного числа, квадрат которого равен 2, не является периодическим. Таким образом, $\sqrt{2}$ – иррациональное число. Множество рациональных чисел бесконечно и счетно, а множество иррациональных чисел несчетно (см. 3.1.2). Множества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ всюду плотны в $\mathbf{R}$, т. е. в каждом интервале $\{x \mid a < x < b\}$ суще-

*) Индукция может начинаться не с 1, а с любого числа $n_0 \in \mathbf{N}$ ($n_0 \geqslant 1$). В этом случае $A(n)$ верно для всех $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0$.

ствуют как рациональные, так и иррациональные числа.

3.1.1.3. Абсолютная величина числа. Число $|a|$, $a \in \mathbf{R}$, удовлетворяющее соотношению

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases}$$

называется *абсолютной величиной* числа a (таким образом, $|a| = \sqrt{a^2}$).

Для любых a, $b \in \mathbf{R}$

1) $|a| \geqslant 0$, $|-a| = |a|$, $a \leqslant |a|$;

2) если $|a| = 0$, то это эквивалентно тому, что $a = 0$;

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$;

4) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (*неравенство треугольника*);

5) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

3.1.1.4. Элементарные неравенства. Для действительных чисел a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеют место:

обобщенное неравенство треугольника

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|;$$

неравенство Коши — Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Если $a \in \mathbf{R}$, $a > -1$ и $n \in \mathbf{N}$, то $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (*неравенство Бернулли*).

Если $a \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $n \in \mathbf{N}$, то $(1 + a)^n \leqslant 1 + (2^n - 1)a$.

Если $n \in \mathbf{N}$ и $n \geqslant 6$, то $(n/3)^n < n! < (n/2)^n$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа. Тогда $A_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ называется *средним арифметическим*,

$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_i \neq 0$, — *средним геометрическим*.

$M_n = \dfrac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n}$, $a_i \neq 0$, — *средним гармоническим* чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Если $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$M_n \leqslant G_n \leqslant A_n.$$

3.1.2. ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В $\mathbf{R}^n$

Множество M называется *конечным*, если либо оно пусто, либо найдется натуральное n такое, что M может быть взаимно однозначно отображено на подмножество $N_n \subset \mathbf{N}$: $N_n = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leqslant n\}$ (т. е. может быть занумеровано не более чем n числами). В противном случае M называется *бесконечным*. Бесконечное множество M называется *счетным*, если существует взаимно однозначное отображение множества M на $\mathbf{N}$. Конечное или бесконечное счетное множество M называется *не более чем счетным*. В противном случае M называется *несчетным множеством*.

Примеры. 1) $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Q}$ — бесконечные счетные множества. 2) Множества $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ несчетны.

Множество точек из $\mathbf{R}^n$ называется *точечным множеством*. При $n = 1$, т. е. для случая числовой прямой $\mathbf{R}$, точечные множества называются также *числовыми множествами*.

Примеры. 1) Множество $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ является точечным множеством из $\mathbf{R}^2$ (внутренность единичной окружности)*).

2) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_i| \leqslant 1/2,\ i = 1, 2, 3\}$ — точечное множество из $\mathbf{R}^3$ (куб с ребром, равным 1).

3) $M = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ — числовое множество.

Числовое множество M называется *ограниченным сверху*, если существует $C \in \mathbf{R}$ такое, что $x \leqslant C$ для всех $x \in M$. Число C называется *верхней границей* множества M. При этом говорят, что число C *ограничивает* M *сверху*; M называется *ограниченным снизу*, если существует число $C' \in \mathbf{R}$ такое, что $C' \leqslant x$ для всех $x \in M$. При этом говорят, что C' *ограничивает* M *снизу* (C' — *нижняя граница* M). Множество M называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Число G называется *верхней гранью* (*точной верхней границей*), числового множества M, если G есть верхняя граница и для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое $x' \in M$, что $G - \varepsilon < x'$.

Число g называется *нижней гранью* (*точной нижней границей*) числового множества M, если g есть нижняя граница и для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое $x' \in M$, что $x' < g + \varepsilon$.

Верхняя и нижняя грани числового множества M обозначаются соответственно

$$G = \sup M = \sup_{x \in M} x, \quad g = \inf M = \inf_{x \in M} x.$$

Таким образом, для ограниченного сверху (снизу) множества M число $\sup M$ ($\inf M$) является наименьшим (наибольшим) числом, ограничивающим M сверху (соответственно снизу). Если $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$), то это число называется *максимальным* (*минимальным*) *элементом множества* M и обозначается

$$\max M = \max_{x \in M} x \ (\text{соответственно } \min M = \min_{x \in M} x).$$

Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет, и притом только одну, верхнюю (нижнюю) грань.

Примеры. 1) Множество $M = \{x \mid x \in \mathbf{Q},\ 0 \leqslant x < 1\}$ является ограниченным. Всякое число $C \geqslant 1$ ограничивает M сверху. Далее, $\sup M = 1$, $\inf M = \min M = 0$. Множество M не имеет максимального элемента.

2) Множество $\mathbf{N}$ ограничено снизу, но не ограничено сверху.

3) Для множества $M = \{x \mid x = 1 + \dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N}\}$ имеем $\sup M = \max M = 3$, $\inf M = 2$. Множество M не имеет минимального элемента.

Пусть a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Тогда множество $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x < b\}$ называют *интервалом*, множество $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$ — *отрезком* (*сегментом*), а множества $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x < b\}$ и $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x \leqslant b\}$ — *полуинтервалами*; для интервалов, полуинтервалов и отрезков часто используется общий термин *промежуток*, a и b — концы промежутка, число $b - a$ — длина промежутка. Рассматриваются также

*) В последующем для геометрической наглядности всегда будет рассматриваться декартова система координат.

неограниченные интервалы:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < a\},$$
$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \leqslant a\}.$$

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $Q(y_1, \ldots, y_n)$ – две точки пространства $\mathbf{R}^n$; тогда число

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

называется *расстоянием* между точками P и Q. В случае $n = 1$ получаем $d(P, Q) = |x_1 - y_1|$.

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть P – точка пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда множество

$$U_\varepsilon(P_0) = \{P \mid d(P, P_0) < \varepsilon\}$$

называется *ε-окрестностью* точки P_0. ε-окрестность точки P_0 состоит, таким образом, из всех внутренних точек n-мерного шара радиуса ε с центром в точке P_0. Иными словами, ε-окрестность P_0 есть множество точек пространства $\mathbf{R}^n$, расстояние которых до точки P_0 меньше ε. В случае $n = 1$ ε-окрестность точки $P(x)$ есть интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Множество $U(P_0) \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *окрестностью* P_0, если оно содержит какую-нибудь ε-окрестность P_0.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно может быть заключено в n-мерный шар конечного радиуса. *Диаметром* множества называется верхняя грань расстояний между его точками.

Точка $Q \in \mathbf{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $M \subseteq \mathbf{R}^n$, если в каждой ε-окрестности точки Q найдется отличная от нее точка из M. Точка множества M, не являющаяся предельной для M, называется *изолированной*.

Если Q – предельная точка множества M, то в каждой ε-окрестности точки Q лежит бесконечно много точек из M. Предельная точка множества M может не принадлежать этому множеству.

Примеры. 1) Конечное множество не имеет предельных точек.

2) Множество $M = \{x \mid x = 1 + (n+1)/n,\ n \in \mathbf{N}\}$ имеет предельную точку $x = 2$.

3) Каждое рациональное число является предельной точкой множества иррациональных чисел.

4) Каждое действительное число является предельной точкой множества рациональных чисел.

5) Каждая точка пространства $\mathbf{R}^n$ – предельная точка этого пространства.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. Любое бесконечное ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ имеет по крайней мере одну предельную точку.

Пусть M – множество из $\mathbf{R}^n$. Множество точек $\mathbf{R}^n$, не принадлежащих M, называется *дополнением* M.

Пусть M' – множество всех предельных точек множества M. M' – называется *производным множеством* множества M. Множество $\overline{M} = M \bigcup M'$ называется *замыканием* M.

Справедливы следующие включения: $(M')' \subseteq M'$, $\overline{M}$. Кроме того, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. $M' \subseteq M$. Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым*, если для каждой точки $P \in M$ существует ε-окрестность $U_\varepsilon(P)$, такая, что $U_\varepsilon(P) \subseteq M$. Пустое множество замкнуто и открыто одновременно.

а) Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

б) Пересечение произвольного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

в) Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

г) Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

д) Объединение произвольного числа открытых множеств есть открытое множество.

Примеры. 1) Любое конечное множество точек замкнуто.

2) Для любого точечного множества его производное множество и его замыкание замкнуты.

3) Множество $\mathbf{Q}$ не открыто и не замкнуто в $\mathbf{R}$.

4) Пространство $\mathbf{R}^n$ является как открытым, так и замкнутым множеством.

5) Множество $M = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ не открыто и не замкнуто в $\mathbf{R}$.

6) Любая ε-окрестность точки $P \in \mathbf{R}^n$ – открытое множество.

7) Промежуток $[a, b] \subset \mathbf{R}$ является замкнутым множеством.

Точка P множества $M \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества M, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(P)$ такая, что $U_\varepsilon(P) \subseteq M$. Точка $P \in \mathbf{R}^n$ называется *внешней точкой* для множества M, если она является внутренней точкой его дополнения. Точка P называется *граничной точкой* множества M, если в любой ε-окрестности точки P есть как точки множества M, так и его дополнения. Множество всех граничных точек множества M называется *границей* M.

Примеры. 1) Все точки множества $M = (0, 1) \subset \mathbf{R}$ внутренние.

2) Каждое иррациональное число есть граничная точка множества $\mathbf{Q}$.

3) Множество $M_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ является множеством всех внешних точек множества $M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Единичная окружность является границей M_1 и M_2.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (образом отрезка при непрерывном отображении), все точки которой принадлежат этому множеству. Множество M называется *связным*, если не существует таких открытых G_1 и G_2, что $M \subset G_1 \bigcup G_2$, $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$, а $M \bigcap G_1$ и $M \bigcap G_2$ одновременно непусты. Линейно связное множество связно.

Если $M \subseteq \mathbf{R}^n$ – открытое связное множество, то любые две точки из M можно соединить ломаной, полностью расположенной в M. В частности, открытое связное множество линейно связно.

Пример. Кольцо $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < a < x_1^2 + x_2^2 < b\} \subset \mathbf{R}^2$ является связным множеством.

Открытое связное точечное множество называется *областью*. Ограниченная область G называется *односвязной областью*, если ее граница – связное множество. В противном случае G называется *многосвязной областью*. Объединение

области G и ее границы называется *замкнутой областью.*

Если область G односвязна, то любая замкнутая кривая без самопересечений, лежащая в G, может быть стянута в точку путем непрерывной деформации внутри области G.

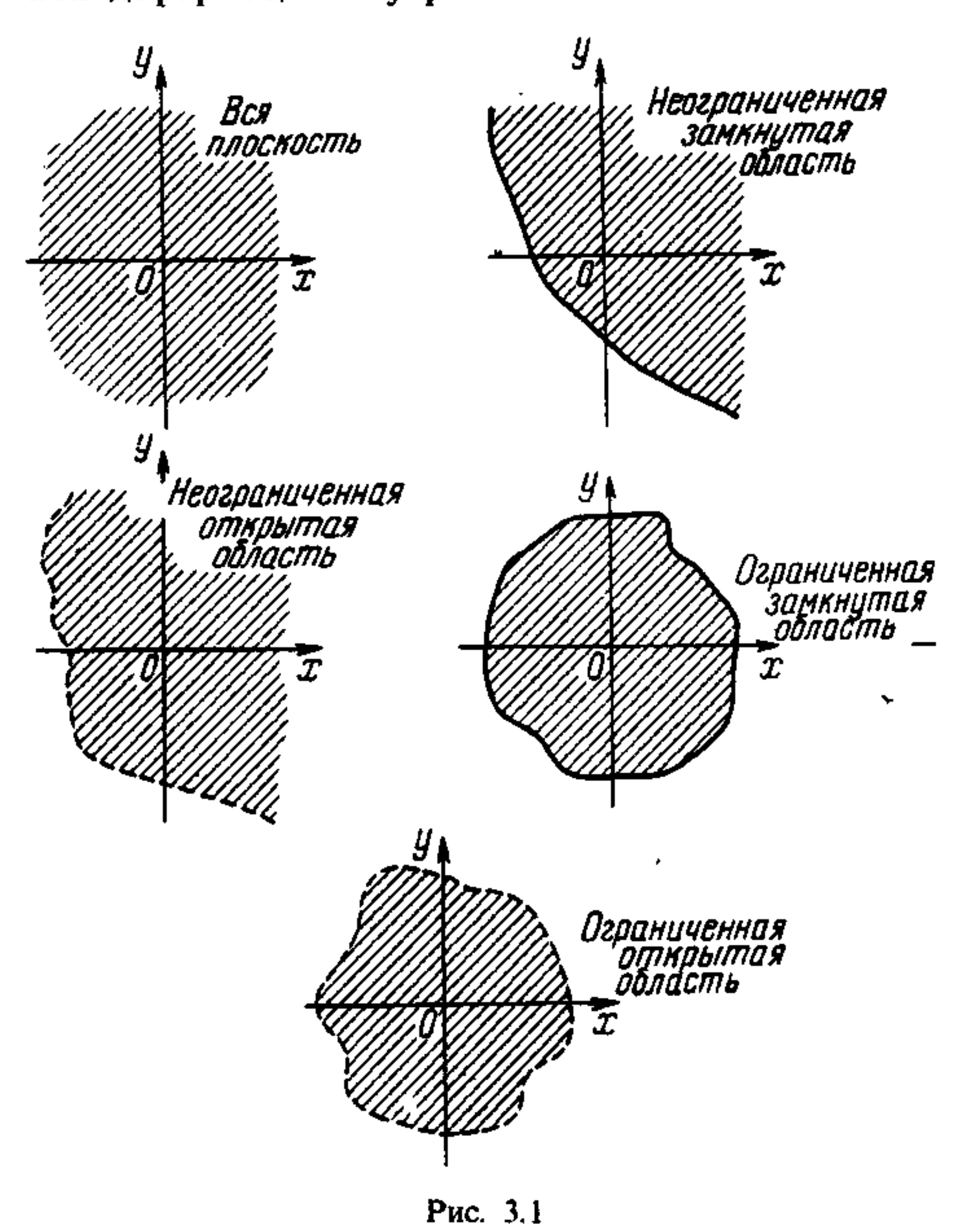


Рис. 3.1

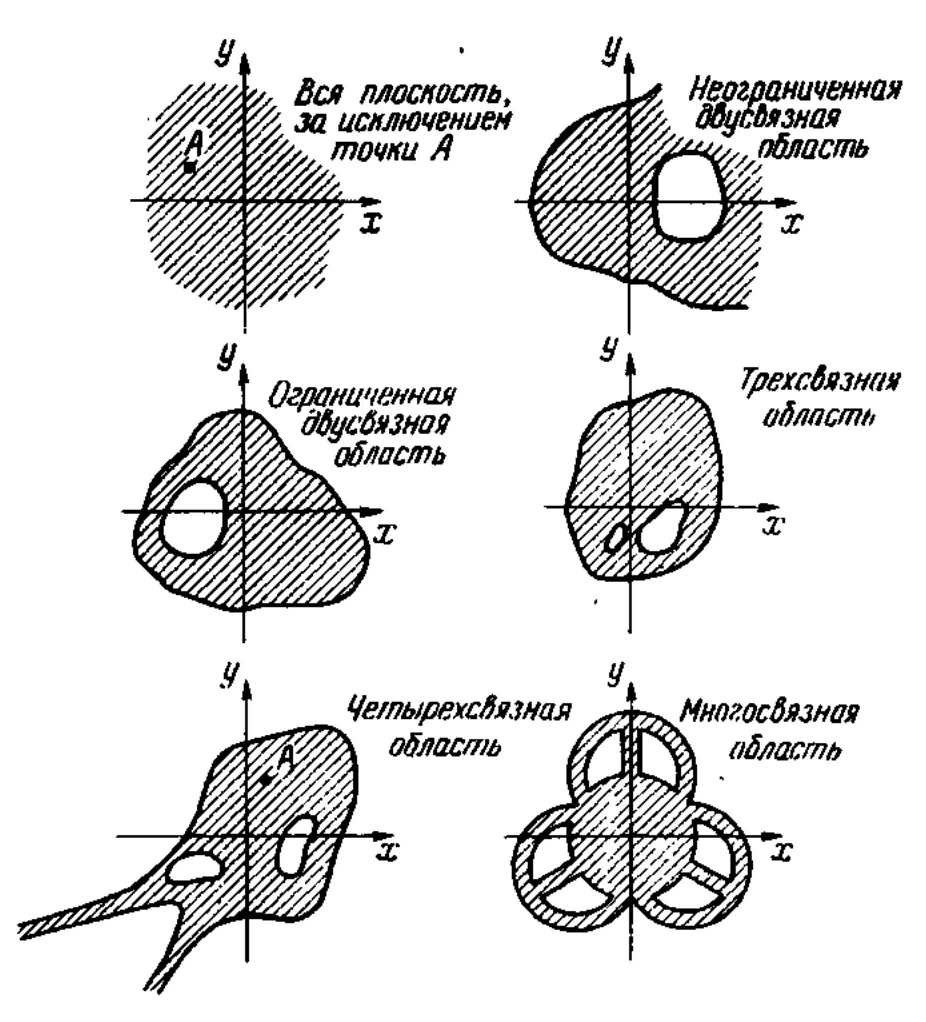


Рис. 3.2

Примеры. 1) Множество $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ односвязно.

2) Кольцо $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < a < x_1^2 + x_2^2 < b\}$ является двусвязной областью.

3) Множество $M = \left\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\right\} \cup \cup \left\{(x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\right\}$ не является связным.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками P, $Q \in M$ ему принадлежат все точки соединяющего их отрезка.

Пример. Прямоугольник $M = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqslant a, |x_2| \leqslant \leqslant b\} \subset \mathbf{R}^2$ – выпуклое множество.

Если каждой точке $P \in M$ поставить в соответствие некоторую окрестность $U(P)$, то совокупность этих окрестностей образует *покрытие* множества M. При этом разным точкам может быть сопоставлено одно и то же множество, являющееся их общей окрестностью. Поэтому покрытие множества может состоять и из конечного набора окрестностей.

Лемма Гейне – Бореля о конечном покрытии. **Если $M \subset \mathbf{R}^n$ – замкнутое ограниченное множество, то из любого покрытия множества M открытыми множествами можно выбрать конечное покрытие.**

3.1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1.3.1. Числовые последовательности.

3.1.3.1.1. Ограниченность, сходимость. Примеры. Однозначное отображение множества натуральных чисел во множество действительных чисел $\mathbf{R}$ называется *числовой последовательностью* или, короче, *последовательностью* $\varphi(n) = a_n$; пишут: $\varphi = \{a_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $K \in \mathbf{R}$, что $|a_n| \leqslant K$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N *), что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a **), то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *сходится к пределу a.* При этом пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ или $a_n \to a$. Если последовательность сходится к a, то вне любой ε-окрестности a лежит лишь конечное число членов этой последовательности. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся.*

Примеры. 1) Последовательность $\{1/n\}$ сходится к нулю: если задать произвольное $\varepsilon > 0$ и выбрать $N > 1/\varepsilon$, что всегда возможно в силу принципа Архимеда, то для всех $n \geqslant N$ имеет место соотношение $|1/n - 0| = = 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon$.

2) Последовательность $\{n\}$ является неограниченной и расходящейся.

3) Последовательность $\{(-1)^n\}$ является ограниченной и расходящейся.

4) Последовательность $\{(n+1)/n\}$ сходится, и $\lim\limits_{n \to \infty} (n+1)/n = 1$.

5) Последовательности $\{(-1)^n/n\}$ и $\{q^n\}$, $|q| < 1$, сходятся к 0.

6) Последовательность $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$ ($n \geqslant 2$) сходится и имеет пределом $\sqrt{2}$.

7) Для $a > 0$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей (неубывающей)*, если $a_{n+1} \geqslant a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго*

*) Вообще говоря, зависящее от ε.

**) Последовательность может иметь только один предел.

возрастающей, если $a_{n+1} > a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей* (*невозрастающей*), если $a_{n+1} \leqslant a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго убывающей*, если $a_{n+1} < a_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными* последовательностями.

3.1.3.1.2. Теоремы о числовых последовательностях. Для числовых последовательностей справедливы следующие теоремы.

1. Любая сходящаяся последовательность ограничена.

2. Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена. Если возрастающая (убывающая) последовательность сходится, то ее предел совпадает с верхней (нижней) гранью множества ее значений.

3. *Критерий сходимости Коши.* Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое*) $N \in \mathbf{N}$, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ имеет место неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

4. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ выполняются соотношения

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

Если, кроме того, $b \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, все $b_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b$.

5. Если $\{a_n\}$ сходится к a, то $\{|a_n|\}$ сходится к $|a|$.

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Тогда, начиная с некоторого номера, все $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

7. Из $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \ldots + a_n)/n = a$.

8. Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, а последовательность $\{b_n\}$ сходится к нулю, то последовательность $\{a_n b_n\}$ также сходится к нулю.

9. Если для членов последовательности $\{a_n\}$ имеет место двойное неравенство $A \leqslant a_n \leqslant B$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $A \leqslant a \leqslant B$.

10. Если все члены последовательности $\{a_n\}$ попарно различны, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ существует тогда и только тогда, когда множество значений $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничено и a является его единственной предельной точкой.

11. Если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то последовательность $\{b_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Пусть $\{a_n\}$ – заданная последовательность, и пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность ($k \in \mathbf{N}$, $n_k \in \mathbf{N}$). Последовательность (a_{n_k}) называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет определенный конечный предел a или ее предел равен ∞ *), то такой же предел имеет и любая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ не имеет определенного предела (конечного или бесконечного), то это не означает, что и подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ не имеет предела (конечного или бесконечного). Если подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то его называют *частичным пределом* для последовательности $\{a_n\}$.

Из любой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ всегда можно извлечь такую подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, которая сходилась бы к конечному пределу (теорема Больцано – Вейерштрасса). Если последовательность $\{a_n\}$ не ограничена, то из нее всегда можно выделить подпоследовательность, имеющую частичный предел (например, бесконечный).

Итак, для любой последовательности $\{a_n\}$ независимо от того, ограничена она или нет, существуют частичные пределы (конечные или равные $\pm\infty$). Наибольший и наименьший из этих частичных пределов всегда существуют и обозначаются соответственно

$\overline{\lim}\, a_n$ (*верхний предел* последовательности $\{a_n\}$),

$\underline{\lim}\, a_n$ (*нижний предел* последовательности $\{a_n\}$).

Равенство этих пределов есть условие, необходимое и достаточное для существования предела (конечного или бесконечного) последовательности $\{a_n\}$.

Примеры. 1) Последовательность $\{(1 + 1/n)^n\}$ строго возрастает, ограничена и вследствие этого сходится. Ее предел обозначается буквой e. Число $e = 2{,}71828\ldots$ играет важную роль в качестве основания натуральных логарифмов.

2) Последовательность $\{1/n^2\}$ строго убывает, ограничена и, следовательно, сходится. Ее предел $\inf\{1/n^2 \mid n \in \mathbf{N}\} = 0$.

3) Для чисел $a_1, \ldots, a_r$; $b_1, \ldots, b_s \in \mathbf{R}$ таких, что $a_r \neq 0$, $b_s \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{r} a_{r-i} n^i}{\sum\limits_{k=0}^{s} b_{s-k} n^k} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < s, \\ a_0/b_0 & \text{при } r = s, \\ +\infty & \text{при } r > s \text{ и } a_0/b_0 > 0, \\ -\infty & \text{при } r > s \text{ и } a_0/b_0 < 0. \end{cases}$$

4) Последовательность $\{a_n\}$: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ограничена и расходится. Ее подпоследовательность $\left\{1 + \frac{1}{2k}\right\}$ сходится к $+1$, а подпоследовательность $\left\{-1 + \frac{1}{2k+1}\right\}$ сходится к -1. При этом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$. Последовательность $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ сходится к нулю; следовательно, $\left\{\frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{2^n}\right\}$ также сходится к нулю.

3.1.3.2. Последовательности точек. Однозначное отображение φ множества $\mathbf{N}$ в пространство $\mathbf{R}^n$ называется *последовательностью* точек из $\mathbf{R}^n$:

$$\varphi(k) = P_k(x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbf{R}^n \text{ **)};$$

пишут: $\varphi = \{P_k\}$.

Последовательность точек $\{P_k\}$ называется *ограниченной*, если множество ее значений $\{P_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}^n$ ограничено. Точка $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$

*) Вообще говоря, зависящее от ε.

*) То есть для любого $E > 0$ существует такое $N \in \mathbf{N}$, что $|a_n| > E$ для всех $n > N$. Аналогично определяются пределы $+\infty$ и $-\infty$.

**) Далее координаты точек опускаются ради простоты записи.

называется *пределом* последовательности $\{P_k\}$, если $\lim_{k\to\infty} d(P_k, P_0) = 0$, т. е. если расстояния от точек P_k до P_0 образуют сходящуюся к нулю числовую последовательность. Если последовательность $\{P_k\}$ имеет пределом P_0, то говорят, что она *сходится к пределу* P_0. При этом пишут: $\lim_{k\to\infty} P_k = P_0$*).

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Если последовательность сходится к P_0, то вне любой ε-окрестности точки P_0 лежит лишь конечное число членов данной последовательности.

Последовательность точек $\{P_k(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$ сходится к $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ тогда и только тогда, когда сходятся последовательности соответствующих координат, т. е. когда $\lim_{k\to\infty} x_s^k = x_s^0$ для $s = 1, 2, \ldots, n$.

Примеры. 1) Последовательность точек $\{P_k\}$ из $\mathbf{R}^2$: $(x_1^k, x_2^k) = ((k+1)/k, 1/k)$ ограничена и сходится к точке $P_0(1, 0)$, так как $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

2) Последовательность $\{P_k\}$ точек из $\mathbf{R}^2$: $(x_1^k, x_2^k) = (1/k^2, k^3 - 1)$ не ограничена и расходится, поскольку $\lim_{k\to\infty} (k^3 - 1) = +\infty$.

Так как сходимость последовательностей точек из $\mathbf{R}^n$ может быть сведена к сходимости числовых последовательностей, то большинство теорем о числовых последовательностях переносится на последовательности точек. В частности:

1. Всякая сходящаяся последовательность точек ограничена.

2. *Критерий сходимости Коши*: последовательность точек $\{P_k\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbf{N}$, что для любых $k, l \geqslant N$ справедливо неравенство $d(P_k, P_l) < \varepsilon$**).

3.1.4. ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1.4.1. Функции одного действительного переменного.

3.1.4.1.1. Определение, графическое изображение, ограниченность. Пусть A и B – множества в $\mathbf{R}$. Однозначное отображение f множества A в B называется *действительной функцией одного действительного переменного****)* (см. также 4.1.4.5). Множество A называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Элемент $y \in W(f)$, который ставится в соответствие элементу $x \in D(f)$, обозначается $f(x)$ и называется *значением функции f в точке x*. Множество $\{f(x) \mid x \in D(f)\} \subset B$ называется *множеством значений* f и обозначается $W(f)$.

Функция f полностью определена, если известна область ее определения и для каждого значения $x \in D(f)$ известно значение функции $f(x)$, т. е. известно правило, по которому находится это значение. Правило установления соответствия $x \to f(x)$ часто может быть выражено в форме аналитической зависимости.

Следует различать обозначения f и $f(x)$. Символом f обозначают функцию, в то время как $f(x)$ есть значение функции f в точке $x \in D(f)$. Однако простоты ради используют выражение «функция $f(x)$», понимая под этим функцию, определенную посредством отображения $x \to f(x)$ при $x \in D(f)$.

Графическое изображение функции. Пусть x и y – координаты точки P в декартовой системе координат. Множество $\{P(x, f(x)) \mid x \in D(f)\} \subset \mathbf{R}^2$ называется *графиком функции f*. При этом координата x называется *абсциссой* или *аргументом*, координата $y = f(x)$ – *ординатой* или *значением функции*, а уравнение $y = f(x)$ – *функциональной зависимостью*.

Важным вспомогательным средством при построении графика функции или при выяснении ее характерных свойств является построение *таблицы значений* функции, в которой для известных значений аргумента указаны соответствующие значения функции. Графики и таблицы для важнейших элементарных функций приведены в 1.1.1.2 и 2.5.

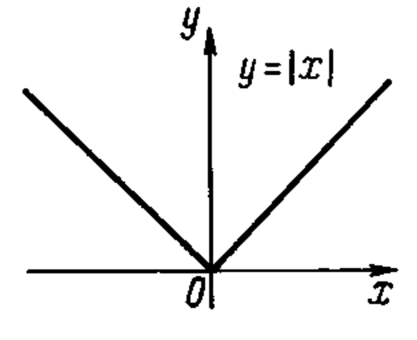


Рис. 3.3

Функция f не обязательно должна быть задана явно – уравнением $y = f(x)$. Она может быть определена также *неявно* – уравнением $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in M \subset \mathbf{R}^2$, *параметрически* $(x = x(t), y = y(t), t \in E \subset \mathbf{R})$ и т. д.

Примеры. 1) Функция $y = f(x) = |x|$, $D(f) = \mathbf{R}$, имеет область значений $W(f) = \{y \mid y \geqslant 0\}$ (рис. 3.3).

2) Всякая последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ является функцией с областью определения $\mathbf{N}$ и областью значений

$$W(f) = \{a_n = f(n) \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

3) Функция f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx+2}{nx+1} = \begin{cases} 1 \text{ при } x \neq 0, \\ 2 \text{ при } x = 0, \end{cases} \quad D(f) = \mathbf{R},$$

имеет область значений $W(f) = \{1, 2\}$.

4) Уравнение $yx - \sin x = 0$ определяет функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ и } D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Сумма, разность, произведение и частное функций f и g определяются следующим образом:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad D(f \pm g) = D(f) \cap D(g);$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) g(x), \quad D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g);$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap [D(g) \setminus \{x \mid g(x) = 0\}].$$

Если f – взаимно однозначная функция, то обратное к f отображение g также однозначно, т. е. тоже является функцией (см. 4.1.4.4).

Обратное отображение g, соответствующее взаимно однозначному отображению f, такому,

*) Последовательность точек в $\mathbf{R}^n$ может иметь не более одного предела.

**) Это – так называемое *свойство полноты* пространства $\mathbf{R}^n$.

***) Пока речь идет о действительных функциях действительного переменного, мы будем их кратко называть *функциями*.

что $D(f) \subseteq \mathbf{R}$, $W(f) \subseteq \mathbf{R}$, называется *обратной функцией* по отношению к функции f.

Очевидно, что $D(g) = W(f)$, $W(g) = D(f)$, $f[g(x)] = x$ при $x \in D(g)$, $g[f(x)] = x$ при $x \in D(f)$, а функциональная зависимость $y = f(x)$ эквивалентна функциональной зависимости $x = g(y)$.

Для того чтобы из функции $y = f(x)$ получить обратную функцию g, необходимо разрешить уравнение $y = f(x)$ относительно x и (в том случае, если в дальнейшем независимое переменное будет обозначаться посредством x) поменять переменные x и y местами. При этом графиком обратной функции g является график функции f, зеркально отраженный относительно прямой $y = x$.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^2$, $D(f) = W(f) = \{x \mid x \geqslant 0\}$, имеет обратную функцию $g(x) = \sqrt{x}$. На всей области $D(f) = \mathbf{R}$ функция x^2 не имеет обратной.

2) Функцией, обратной к показательной функции $f(x) = e^x$, $D(f) = \mathbf{R}$, является логарифмическая функция $g(x) = \ln x$, $D(g) = \{x \mid x > 0\}$.

3) Функция $f(x) = \sin x$ имеет в $D(f) = [-\pi/2, \pi/2]$ обратную функцию $g(x) = \arcsin x$, $D(g) = [-1, 1]$. На всем множестве $\mathbf{R}$ функция $\sin x$ не имеет обратной.

Если f и g — функции одного переменного, то функция F, определенная соотношением $y = F(x) = g[f(x)]$ на области определения $D(F) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\}$, называется *сложной функцией* или *суперпозицией* (а также *композицией*) функций f и g и обозначается $g \circ f$. Следует иметь в виду, что здесь операция проводится справа налево.

Пример. Если $f(x) = ax + b$, $D(f) = \mathbf{R}$ и $g(x) = \sqrt{x}$, $D(g) = \{x \mid x \geqslant 0\}$, то $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{ax+b}$. Область определения есть $D(g \circ f) = \{x \mid ax + b \geqslant 0\}$.

Функция f называется *ограниченной на множестве* $E \subset D(f)$, если существует такое число A, что $|f(x)| \leqslant A$ для всех $x \in E$. Функция f называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на E, если множество значений f при $x \in E$ ограничено сверху (снизу).

Верхняя (нижняя) грань множества M значений функции f на E называется *верхней* (*нижней*) *гранью функции* f и обозначается $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ $(\inf\limits_{x \in E} f(x))$.

Если число $\sup f$ $(\inf f)$ на E принадлежит соответствующему множеству значений M, то оно называется *наибольшим* (*наименьшим*) *значением* f на E и обозначается $\max\limits_{x \in E} f(x)$ $(\min\limits_{x \in E} f(x))$. При этом говорят, что функция f достигает на E своего максимального (минимального) значения.

Примеры. 1) Функции $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ ограничены на $\mathbf{R}$, так как для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$. При этом

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \sin x = \sup_{x \in \mathbf{R}} \cos x = \max_{x \in \mathbf{R}} \sin x = \max_{x \in \mathbf{R}} \cos x = 1.$$

2) Функция $f(x) = x^2$ ограничена на $\mathbf{R}$ снизу, но не ограничена сверху. Однако f ограничена на любом ограниченном подмножестве $E \subset \mathbf{R}$.

Функция $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$, $a_0 \neq 0$, называется *целой рациональной функцией* или *многочленом* n-*й степени*. Многочлен нулевой степени называется *константой*. Функция называется (*дробной*) *рациональной функцией*, если она является частным от деления двух многочленов. Рациональная функция называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе.

Графиком функции, равной константе, является прямая, параллельная оси абсцисс; графиком многочлена первой степени — прямая, пересекающая ось абсцисс под некоторым (не нулевым и не прямым) углом; графиком многочлена второй степени — парабола.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, является правильной рациональной функцией.

3.1.4.1.2. Предел функции одного переменного. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *предел*, равный A, и обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$*), что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Другими словами, f имеет в точке x_0 *предел*, равный A, если для каждой ε-окрестности точки A существует такая δ-окрестность точки x_0, что все точки δ-окрестности, за исключением, быть может, точки x_0, отображаются функцией f в ε-окрестность точки A.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Функция f имеет в точке x_0 предел A тогда и только тогда, когда для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Примеры. 1) Функция $f(x) = x$ имеет в любой точке x_0 предел, равный x_0, так как для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

2) Функция $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$

не имеет предела в 0. Если, например, взять последовательности $x_n = 1/n$ и $x_m = -1/m$, то получим

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{m \to \infty} x_m = 0, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1, \quad \lim_{m \to \infty} f(x_m) = 0.$$

3) Функция $f(x) = 1/x$ не имеет предела в 0. Иначе должна была бы сходиться к конечному пределу последовательность $\{f(1/n)\} = \{n\}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Критерий Коши. Пусть функция f определена в окрестности x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x_1, x_2, удовлетворяющих условию $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Иногда важно знать поведение функции справа (соответственно слева) от точки x_0, так что целесообразно ввести следующее определение.

*) δ, вообще говоря, зависит от ε.

Функция f имеет в точке x_0 *предел справа* (*слева*), равный A и обозначаемый $f(x+0)$ ($f(x-0)$),

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A$$

$$(f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A),$$

если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$ ($(x_0-\delta, x_0)$) имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пример. Для функции $f=\begin{cases}1 \text{ при } x\geqslant 0,\\ 0 \text{ при } x<0\end{cases}$

$$f(+0)=\lim_{x\to+0} f(x)=1,$$

$$f(-0)=\lim_{x\to-0} f(x)=0.$$

Функция f имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в точке x_0 существуют пределы этой функции как справа, так и слева, и они равны.

Определение предела может быть обобщено на случай, когда x неограниченно возрастает (соответственно убывает), в предположении, что область определения функции не ограничена. Это позволяет выяснить характер поведения функции «в бесконечности».

Пусть область определения функции не ограничена сверху (снизу); тогда f обладает при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) *пределом*, равным A, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое x_1, что для всех $x>x_1$ ($x<x_1$) имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x)=A).$$

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Если взять $x_1=\frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, то для всех $x\geqslant x_1$ будем иметь $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x_1}=\varepsilon$.

Наконец, можно определить также понятие «бесконечно большая функция», т. е. функция, значения которой неограниченно возрастают (по абсолютной величине) при приближении аргумента к какой-либо точке, в окрестности которой функция определена. Обзор возможных определений предела дан в табл. 3.1.

Основные теоремы о пределах функций.

Если для одного из пяти случаев: $x\to x_0$, $x\to x_0\pm 0$, $x\to\pm\infty$ существуют $\lim f_1(x)=A_1$, $\lim f_2(x)=A_2$, то

а) $\lim(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))=c_1A_1+c_2A_2$;

б) $\lim f_1(x)f_2(x)=A_1A_2$;

в) $\lim f_1(x)/f_2(x)=A_1/A_2$, если $A_2\neq 0$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x=\lim\limits_{x\to 0} x\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0.$

3.1.4.1.3. Вычисление пределов. Для вычисления пределов функций пользуются указанными выше определениями и теоремами, а также следующими приемами.

I. Определение предела посредством преобразования функциональной зависимости к удобному виду.

Примеры. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+x+1)=n.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$

II. *Правило Лопиталя.* Если при $x\to x_0$ (соответственно $x\to\pm\infty$) в функции $F(x)$ возникают неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для вычисления $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ (соответственно $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$) можно зачастую успешно применять следующие правила.

IIа) Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ при $x\in U(x_0)\setminus\{x_0\}$. Если при этом

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Таблица 3.1

	Обозначение	Определение
Предел функции f в точке $x=x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	Для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
«Обращение функции f в бесконечность» в точке $x=x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\ =+\infty$	Для любого M существует $\delta(M)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$, имеет место неравенство $f(x)>M$
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	Для любого M существует $\delta(M)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$, имеет место неравенство $f(x)<M$
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	Для любого M существует $\delta(M)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x)\rvert>M$

Продолжение

	Обозначение	Определение
Предел функции f при $x \to + \infty$, соответственно $x \to - \infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
«Обращение функции f в бесконечность» при $x \to +\infty$, соответственно $x \to -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \geqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$	Для любого M существует $x_0(M)$ такое, что для всех $x \leqslant x_0$ имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$
Пределы справа и слева	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$	Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
«Обращение функции f в бесконечность» справа и слева в точке	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $f(x) > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $f(x) < M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$
	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$	Для любого M существует $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $\lvert f(x) \rvert > M$

Соответствующее утверждение имеет место и в том случае, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, а также при $x \to x_0 \pm 0$.

IIб) Пусть функции f и g дифференцируемы при $x > a$ $(a > 0)$ и, кроме того, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, а также $g'(x) \neq 0$ при $x > a$.

Тогда, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Аналогичное утверждение справедливо при $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$, а также при $x\to-\infty$.

Примеры. 1) Пусть $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$, $x_0=0$. Из $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$, согласно IIa), следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=-\frac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$.

4) $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=$
$=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{x^{-1}}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-1)}{1+x^{-2}}=$
$=\frac{(-1)}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-2}}=-1$.

6) $\lim\limits_{x\to\pi/2}((\pi-2x)\operatorname{tg}x)=\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\pi-2x}{\operatorname{ctg}x}=$
$=\lim\limits_{x\to\pi/2}((-2)(-\sin^2 x))=2$.

III. Если f непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=x_0$, то (см. 3.1.4.1.4) $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(x_0)$.

Примеры. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(1+x)/x}=$
$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)/x}=e^1=e$.

2) $\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

IV. Использование разложения функции в ряд Тейлора.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

3.1.4.1.4. Непрерывные функции одного переменного. Функция f называется *непрерывной* в точке $x_0\in D(f)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, принадлежащих $D(f)$ и таких, что $|x-x_0|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Примеры. 1) Функция $f(x)=C$ непрерывна в точке $x_0\in\mathbf{R}$. Если взять произвольное $\varepsilon>0$, то для любого положительного δ и всех x, таких, что $|x-x_0|<\delta$, имеем $|f(x)-f(x_0)|=|C-C|=0<\varepsilon$.

2) Функция $f(x)=x$ непрерывна в точке $x_0\in\mathbf{R}$. Если положить $\delta=\varepsilon$, причем $\varepsilon>0$ – произвольное число, то для всех x, таких, что $|x-x_0|<\delta$, имеем $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$.

Между непрерывностью функции f в точке x_0 и существованием предела f в x_0 имеется следующая связь:

функция f, определенная в некоторой окрестности x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует предел функции f в точке x_0, равный $f(x_0)$, т. е. когда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Функция f непрерывна в точке $x_0\in D(f)$ тогда и только тогда, когда для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n\in D(f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

Примеры. 1) Функция

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0\end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0=0$.

2) Функция $f(x)=1/x$ не является непрерывной в точке $x_0=0$.

3) Функция

$$f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0=0$.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $E\subset D(f)$, если f непрерывна в каждой точке $x_0\in E$.

Если f не является непрерывной в точке x_0 (*разрывна* или имеет *разрыв в точке* x_0), то x_0 называется *точкой разрыва функции* f.

Грубо говоря, непрерывность функции f означает, что в результате небольшого изменения значения аргумента значение функции также изменяется мало. Если $D(f)$ – промежуток и график функции f на $E\subset D(f)$ является куском «сплошной», непрерывной кривой, то f непрерывна на E.

Основные свойства непрерывных функций.

Сумма, разность и произведение непрерывных функций также являются непрерывными функциями.

Если f непрерывна и не равна нулю в точке x_0, то $1/f$ также является непрерывной в точке x_0.

Многочлен непрерывен во всех точках множества $\mathbf{R}$.

Дробно-рациональная функция непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель отличен от нуля.

Пример. Функция $f(x)=\frac{x^4-2x^2+3}{x^3-1}$ непрерывна на множестве $\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

Пусть функция f непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0. Тогда существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x\in U(x_0)\cap D(f)$ имеет место неравенство $f(x)>0$ $(f(x)<0)$.

Любая функция, представимая в виде суммы степенного ряда, непрерывна в точках, лежащих внутри интервала сходимости этого ряда.

Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g – в точке $f(x_0)$, то сложная функция $g\circ f$ непрерывна в точке x_0.

Пример. Из непрерывности функций $f(x)=\sin x$ и $g(x)=e^x$ в $\mathbf{R}$ следует непрерывность сложной функции $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=e^{\sin x}$ в $\mathbf{R}$.

Аналогично понятию одностороннего предела вводится понятие непрерывности справа и слева.

Функция f называется *непрерывной справа* (*слева*) в точке $x_0\in D(f)$, если для любого $\varepsilon>0$ сущест-

вует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x - x_0 < \delta$ $(0 \leqslant x_0 - x < \delta)$, имеет место неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция f непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 как справа, так и слева.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0 = 0$ справа, но не является непрерывной слева.

3.1.4.1.5. Точки разрыва и порядок величины функций.

1. *Устранимый разрыв.* Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и не является непрерывной в этой точке. Функция f имеет в точке x_0 *устранимый разрыв*, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. При этом функция

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in D(f) \setminus \{x_0\}, \\ A & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет устранимый разрыв в точке x_0. Функция $f^*(x) = 1$, $D(f^*) = \mathbf{R}$, непрерывна в точке $x_0 = 0$.

2. *Конечный разрыв* (*скачок функции*). Пусть для функции f существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$, причем $A \neq B$. Тогда говорят, что функция f имеет в точке разрыва x_0 *скачок*, равный по величине $|B - A|$.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

имеет в точке 0 скачок, равный 1.

3. *Бесконечный разрыв.* Если для функции f имеет место соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$, то точку x_0 называют точкой *бесконечного разрыва* функции f.

Пример. Функция $f(x) = 1/x$ имеет бесконечный разрыв в точке $x_0 = 0$.

Точки устранимого и конечного разрывов называются также *точками разрыва 1-го рода. Точками разрыва 2-го рода* являются точки бесконечного разрыва и те точки, в которых не существует конечного предела либо справа, либо слева.

График функции с точками разрыва 1-го и 2-го рода показан на рис. 3.4. Точки A, D, F, G – точки разрыва 1-го рода (A, F, G – конечного разрыва, D – устранимого); B, C, E – 2-го рода (B, E – бесконечного разрыва).

Рис. 3.4

Пример. Дробно-рациональная функция имеет не более чем конечное число точек бесконечного разрыва.

Функция f называется *кусочно непрерывной* на отрезке $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, если f непрерывна во всех точках $x \in I$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

4. *Порядок величины функций.* Следующие определения дают возможность сравнивать две функции.

Если для функции f, определенной в окрестности точки x_0, имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{|x - x_0|^s} \right| = c,$$

где $c > 0$ и $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, то точка x_0 называется *нулем функции f порядка s* в случае $s > 0$ *и точкой бесконечного разрыва функции f порядка* $(-s)$ (полюсом порядка s) в случае $s < 0$.

Если $\lim\limits_{x \to \infty} |x^s f(x)| = c$, где $c > 0$, $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, то говорят, что функция $f(x)$ является *бесконечно малой порядка* s при $x \to \infty$, если $s > 0$ (соответственно бесконечно большой порядка $(-s)$ при $x \to \infty$, если $s < 0$)*).

Не для всякой функции, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x)| = \infty$, можно указать порядок «обращения в бесконечность». Например, показательная функция растет при $x \to +\infty$ быстрее, чем любая степень x^s.

Примеры. 1) Для функции $\sin x$ точка 0 является нулем порядка 1, так как $\lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1$.

2) Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно большой порядка n при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} |x^{-n} \cdot x^n| = 1$.

Для сравнения порядка величины двух функций f и g употребляются символы o и O (читается: «o малое» и «O большое»). Если для двух функций f и g существует такая функция h, бесконечно малая при $x \to x_0$ (соответственно при $x \to \pm\infty$), что $f = gh$ (в частности, если $\lim(f/g) = 0$), то пишут:

$$f(x) = o(g(x)).$$

Читается: «$f(x)$ есть *o малое от $g(x)$ при $x \to x_0$*» (соответственно «при $x \to \pm\infty$»).

Пример. $\sin x = o(\sqrt[3]{x})$ при $x \to 0$.

Если для двух функций f и g существует такое $M \in \mathbf{R}$, что $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ при $x \to x_0$ (соответственно при $x \to \pm\infty$), то пишут:

$$f(x) = O(g(x)).$$

Читается: «$f(x)$ есть *O большое от $g(x)$ при $x \to x_0$*» (соответственно «при $x \to \pm\infty$»).

Пример. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$.

3.1.4.1.6. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезках.

Всякая функция, непрерывная на отрезке $I = [a, b]$**), ограничена на I.

*) При $x \to \pm\infty$ определение аналогично.

**) В концевых точках a и b функция f должна быть односторонне непрерывна.

Пример. Функция $f(x) = \frac{e^x \sin \pi x}{\ln x}$, $x > 1$, $f(1) = -\pi e$, $D(f) = [1, a]$ $(a > 1)$, непрерывна на $D(f)$ и, следовательно, ограничена.

Теорема Вейерштрасса. Для каждой функции, непрерывной на $I = [a, b]$, существуют $m = \min_{x \in I} f(x)$, $M = \max_{x \in I} f(x)$.

Пример. Функция f из предыдущего примера достигает на $[1, a]$ своих верхней и нижней граней.

Теорема Коши о прохождении через нуль. Если f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, то существует точка $x \in [a, b]$, в которой f обращается в нуль (аналогичное утверждение имеет место в случае $f(a) < 0$, $f(b) > 0$).

Пример. Функция $f(x) = \frac{x}{10} - \ln x$ непрерывна на $[1, e]$. Из $f(1) > 0$, $f(e) < 0$ следует существование точки $x_0 \in [1, e]$, в которой f обращается в нуль.

Теорема о промежуточном значении. Пусть f непрерывна на $[a, b]$, и пусть $m = \min_{x \in I} f(x) < \max_{x \in I} f(x) = M$ и $\alpha \in (m, M)$. Тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f(x_0) = \alpha$. Таким образом, $W(f) = [m, M]$.

Функция f называется *убывающей* (*возрастающей*) на $[a, b] \subseteq D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \leqslant f(x_2))$. Функция f называется *строго убывающей* (*строго возрастающей*) на $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

Если f является убывающей или возрастающей, то она называется *монотонной* функцией.

Показательная функция $f(x) = e^x$ строго возрастает на каждом замкнутом отрезке $[a, b]$, так как для $x_1 < x_2$ имеем $e^{x_2 - x_1} > 1$, откуда следует $e^{x_1} < e^{x_2}$.

Свойства монотонных функций.

1. Возрастающая (убывающая) на $[a, b]$ функция f непрерывна на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она принимает каждое значение из промежутка $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$.

2. Если f монотонна на $[a, b]$, то она может иметь на $[a, b]$ не более чем счетное множество точек разрыва, и каждая ее точка разрыва — 1-го рода.

3. Пусть f непрерывна и строго возрастает (убывает) на $[a, b]$. Тогда на множестве $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$ определена непрерывная строго возрастающая (убывающая) функция g, обратная для f.

Пример. Функция $f(x) = e^x$ непрерывна и строго возрастает на любом $[a, b]$, $W(f) = \{y \mid y > 0\}$.

Обратная для нее функция $g(x) = \ln x$, $D(g) = \{x \mid x > 0\}$, также непрерывна и строго возрастает в $D(g)$.

Функция f называется *равномерно непрерывной* на $M \subseteq D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$*), что для любых $x_1, x_2 \in M$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пример. Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна при $x \in (0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в интервале $(0, 1)$.

*) Число δ не зависит от выбора x_1, x_2.

Если f равномерно непрерывна на M, то f непрерывна на M. Если множество M ограничено и замкнуто, то верно и обратное: всякая непрерывная на $[a, b]$ функция равномерно непрерывна на $[a, b]$.

3.1.4.1.7. Специальные виды функций.

1. Периодические функции. Функция f называется *периодической*, если найдется такое $T \neq 0$, что из $x \in D(f)$ следует $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$ и $f(x + T) = f(x)$.

Наименьшее положительное T, удовлетворяющее указанным условиям, называется *периодом* функции f.

Пример. Функции $\sin x$ и $\cos x$ — периодические с периодом 2π.

2. Функции ограниченной вариации. Пусть Z — разбиение отрезка $[a, b]$ с точками разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Если f — такая функция, что $[a, b] \subset D(f)$, то число $V(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ называется *вариацией* функции f относительно разбиения Z. Если существует конечная верхняя грань $V(f, [a, b]) = \sup_Z V(f, Z)$ по всем разбиениям отрезка $[a, b]$, то она называется *полной вариацией функции f на отрезке* $[a, b]$. При этом f называется *функцией ограниченной вариации**).

Свойства функций ограниченной вариации.

1) Всякая монотонная на $[a, b]$ функция является функцией ограниченной вариации.

2) Всякая дифференцируемая на $[a, b]$ функция, производная которой ограничена на $[a, b]$, является функцией ограниченной вариации.

3) Функция, определенная на $[a, b]$, является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух возрастающих функций.

4) Всякая функция ограниченной вариации интегрируема по Риману (см. 3.1.7.1).

Примеры. 1) Если f возрастает на $[a, b]$, то $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$.

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cos(\pi/2x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

не является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$. При разбиении $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ получаем $V(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, откуда вследствие расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ следует утверждение.

3. Абсолютно непрерывные функции. Функция f называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a, b] \subset D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы содержащихся в $[a, b]$ непересекающихся отрезков $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) < \delta$, выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \right| < \varepsilon.$$

Всякая абсолютно непрерывная на $[a, b]$ функция является равномерно непрерывной функцией и функцией ограниченной вариации.

4. Полунепрерывные функции. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*) в x_0, если для любой после-

*) Функции ограниченной вариации могут быть как непрерывными, так и разрывными. С другой стороны, существуют непрерывные функции неограниченной вариации (см. пример 2).

довательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0) \quad (\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(x_0)).$$

Функция f называется *полунепрерывной* в точке x_0, если f полунепрерывна в точке x_0 сверху или снизу.

Пример. Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in M = \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ 0 \text{ при } x \in [0, 1] \setminus M \end{cases}$$

является полунепрерывной сверху при $x_0 \in M$ и полунепрерывной снизу при $x_0 \in [0, 1] \setminus M$. При этом f разрывна в каждой точке своей области определения.

5. Функции, удовлетворяющие условию Липшица. Если для функции f, для которой $[a, b] \subset D(f)$, существует такая постоянная L, что для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$, то говорят, что функция f на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет *условию Липшица с постоянной Липшица*, равной L.

1) Каждая функция, удовлетворяющая на $[a, b]$ условию Липшица, является абсолютно непрерывной функцией.

2) Всякая дифференцируемая на $[a, b]$ функция, производная которой ограничена на $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ не удовлетворяет условию Липшица на $(0, 1]$, так как множество $\{1/\sqrt{x} \mid x \in (0, 1)\}$ не является ограниченным.

3.1.4.2. Функции нескольких действительных переменных.

3.1.4.2.1. Определение, графическое изображение, ограниченность. Определение функции одного действительного переменного (см. 3.1.4.1.1) будет теперь обобщено на функции n действительных переменных. Область определения такой функции – подмножество в $\mathbf{R}^n$. Точку, которой в декартовой системе координат соответствует последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$, обозначают $P(x_1, \ldots, x_n)$ или, кратко, $P(x_i)$.

Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}$. Однозначное отображение f множества A в множество B называется (*действительной*) *функцией n действительных переменных* (см. также 4.1.4.5). Множество A называется *областью определения* f и обозначается $D(f)$. Образ $y \in W(f)$ элемента $(x_1, \ldots, x_n) = (x_i) = P(x_i) \in D(f)$ обозначается $f(x_1, \ldots, x_n)$, или $f(x_i)$, или $f(P)$. Число $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *значением функции в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. Множество $\{f(P) \mid P \in D(f)\} \subset B$ называется *множеством значений* f и обозначается $W(f)$.

Каждой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$ соответствует только одна точка $y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$. Уравнение $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, как и в 3.1.4.1, называется *функциональной зависимостью*. Функция f не обязательно должна быть задана явно – уравнением $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, но может быть, например, задана *неявно* – уравнением вида $F(x_1, \ldots, x_n; y) = 0$.

Пример. Правилом сопоставления $(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, определяется функция с областью определения $D(f) = \mathbf{R}^2$ и множеством значений $W(f) = \{y \mid y \in \mathbf{R}, y \geqslant 0\}$. Уравнением функции f является уравнение $y = x_1^2 + x_2^2$.

Графическое изображение функции двух переменных. Для функций двух переменных x_1, x_2, как и для функций одного переменного, возможно геометрическое представление (в декартовых координатах x_1, x_2, y пространства $\mathbf{R}^3$). Множество точек

$$\{P(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in D(f)\} \subset \mathbf{R}^3$$

называется *графиком* функции f. Таким образом, для построения графика функции f значение функции $f(x_1, x_2)$ откладывается на прямой, проходящей через точку $(x_1, x_2) \in D(f)$, в направлении оси y. Для большинства рассматриваемых на практике функций точки P образуют поверхность в пространстве $\mathbf{R}^3$, которая и является графиком функции f. Вспомогательным средством при построении графика или выявлении основных свойств функции является построение *таблицы значений*, в которой для конкретных точек области определения указаны соответствующие значения функции. Для функции более чем двух переменных аналогичная наглядная геометрическая интерпретация, вообще говоря, уже невозможна.

Линии уровня, поверхности уровня. Если $c \in W(f)$, то точечное множество

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbf{R}^n$$

называется *поверхностью уровня* функции f. Таким образом, на поверхности уровня функция f имеет постоянное значение. В случае $n = 2$ это точечное множество называется *линией уровня*. Линия уровня – это спроектированная на плоскость x_1Ox_2 кривая пересечения графика функции f с плоскостью, параллельной плоскости x_1Ox_2.

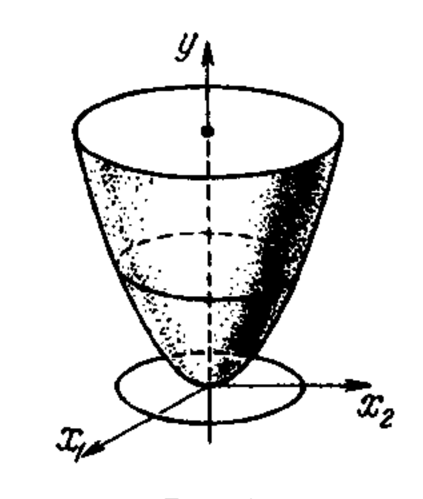


Рис. 3.5

Примеры. 1) Линии уровня функции $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, суть окружности с центром в точке $(0, 0)$. Если пересечь график f плоскостью, содержащей ось y, то полученная кривая пересечения будет параболой. Таким образом, график функции f представляет собой параболоид вращения (рис. 3.5).

2) Линии уровня $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, суть гиперболы (или пара пересекающихся прямых – при $c = 0$). График функции f – гиперболический параболоид.

3) График функции $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, – плоскость, содержащая точку $(0, 0)$. Линии уровня f – прямые.

Функция f, где $D(f) \in \mathbf{R}^n$, называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на $E \subset D(f)$, если множество $\{f(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in E\}$ ограничено сверху (снизу) в $\mathbf{R}$. Функция f называется *ограниченной на* E, если f ограничена на E как сверху, так и снизу.

Пусть функция f ограничена на $E \subset D(f) \subset \mathbf{R}^n$ сверху (снизу). *Верхняя* (*нижняя*) *грань множества* $M = \{f(x_i) \mid (x_i) \in E\}$ значений *функции f на E* обозначается $\sup\limits_{(x_i)\in E} f(x_i)$ $(\inf\limits_{(x_i)\in E} f(x_i))$.

Если $\sup f$ $(\inf f)$ на множестве E принадлежит множеству M, то ее называют *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции f на E* и обозначают через

$$\max_{(x_i)\in E} f(x_i) \quad (\min_{(x_i)\in E} f(x_i)).$$

Примеры. 1) Функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$ ограничена на $D(f)$ снизу, но не является ограниченной сверху.

2) Функция $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, ограничена на $E = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.

Функция f такая, что $D(f) \subset \mathbf{R}^n$, называется *однородной степени* k, если для любого действительного числа $\lambda > 0$ и любого $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ точка $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ лежит в $D(f)$ и имеет место равенство $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема Эйлера. Если однородная функция f с показателем однородности, равным k, дифференцируема, то имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = kf(x_1, \ldots, x_n).$$

Примеры. 1) Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $D(f) = \mathbf{R}^2$, – однородная степени 2.

2) Функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}$, $D(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, – однородная степени $-1/2$.

3.1.4.2.2. Пределы функций многих переменных. Определения предела из 3.1.4.1.2 теперь обобщаются следующим образом. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_i^0) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$, за исключением, быть может, точки P_0. Функция f имеет в P_0 *предел*, равный A и обозначаемый $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $P(x_i)$, удовлетворяющих условию $0 < d(P, P_0) < \delta$, имеет место неравенство $|f(P) - A| < \varepsilon$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки P_0, за исключением, быть может, самой точки P_0. Функция f имеет в точке P_0 предел, равный A, тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек $\{P_m\}$ такой, что $P_m \in D(f)$, $P_m \neq P_0$ и $\lim_{m \to \infty} P_m = P_0$, имеет место равенство $\lim_{m \to \infty} f(P_m) = A$.

Пусть область определения функции f не ограничена в $\mathbf{R}^n$. Функция f имеет при $P \to \infty$ *предел*, равный A и обозначаемый $\lim_{P \to \infty} f(P) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b > 0$ такое, что для всех $P \in D(f)$, удовлетворяющих условию $d(P, 0) > b$, имеет место неравенство $|f(P) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах из 3.1.4.1.2 легко обобщаются на функции многих переменных.

Примеры. 1) Для всех $P_0(x_1^0, x_2^0) \in \mathbf{R}^2$ справедливо соотношение

$$\lim_{(x_i) \to (x_i^0)} (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2.$$

2) Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^5}{(x_2 - x_1^2)^2 + x_1^6} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

не имеет предела в точке (0, 0): если, например, рассмотреть последовательность $\{1/k, 1/k^2\}$, то получим $\lim_{k \to \infty} \{1/k, 1/k^2\} = (0, 0)$, а $\lim_{k \to \infty} f(1/k, 1/k^2) = +\infty$.

3.1.4.2.3. Непрерывные функции многих переменных. Функция f называется *непрерывной* в точке $P_0 \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $P \in D(f)$, удовлетворяющих условию $d(P, P_0) < \delta$, имеет место неравенство

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если f непрерывна в точке P_0, то для любой ε-окрестности $f(P_0)$ существует такая δ-окрестность $U_\delta(P_0)$ точки P_0, что для всех $P \in U_\delta(P_0)$ значения функции $f(P)$ лежат в ε-окрестности $f(P_0)$.

Пример. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $D(f) = \mathbf{R}^n$, непрерывна во всех точках $P(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$. Если указать произвольное $\varepsilon > 0$ и положить $\delta = \varepsilon/\sqrt{n}$, то для всех $P(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $d(P, P_0) < \delta$, на основании неравенства Коши – Буняковского получим, что

$$|f(P) - f(P_0)| = \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^0| \leq$$

$$\leq \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^0|^2} < \sqrt{n}\,\delta = \varepsilon.$$

Функция f, определенная в окрестности P_0, непрерывна в P_0 тогда и только тогда, когда f имеет в P_0 предел, равный значению функции в этой точке, т. е. когда $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция f, определенная в окрестности точки P_0, непрерывна в P_0 тогда и только тогда, когда для всех последовательностей точек $\{P_i\}$, для которых $P_i \in D(f)$ и $\lim_{i \to \infty} P_i = P_0$, выполняется равенство $\lim_{i \to \infty} f(P_i) = f(P_0)$.

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}$$

имеет разрыв в точке (0, 0), так как последовательность $\{1/k, 1/k\}$ имеет предел $\lim_{k \to \infty} \{1/k, 1/k\} = (0, 0)$, а $\lim_{k \to \infty} f\{1/k, 1/k\} = 1/2 \neq f(0, 0)$.

Из непрерывности функции f следует, что математические операции lim и f можно переставлять: если найти вначале значения функции $f(P_i)$, а затем предел $\lim_{i \to \infty} f(P_i)$, то получим значение функции в точке предела $\lim_{i \to \infty} P_i = P_0$.

Определения и теоремы для непрерывных функций одного переменного (см. 3.1.4.1.4) можно перенести на функции многих переменных.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $E \subset \mathbf{R}^n$, если она непрерывна во всех точках множества E.

Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве* E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $P_1, P_2 \in E$, удовлетворяющих условию $d(P_1, P_2) < \delta$, выполнено неравенство $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$.

Пусть заданы n функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, таких, что $D(\varphi_i) \subset \mathbf{R}^k$, $\bigcap_{i=1}^{n} D(\varphi_i) = D \neq \varnothing$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, и

функция f, такая, что $(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n$ для всех $(t_1, \ldots, t_k) \in D$. Отображение F, которое каждому набору k чисел $(t_1, \ldots, t_k) \in D$ ставит в соответствие число $F(t_1, \ldots, t_k) = f[\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)]$, называется *сложной функцией*.

Пример. Пусть $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$, $D(\varphi_1) = D(\varphi_2) = [0, 2\pi)$ и $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbf{R}^2$. Тогда $F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $D(F) = [0, 2\pi)$. $F(t)$ является сложной функцией.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных функций являются непрерывными функциями. Частное непрерывных функций – непрерывная функция в точках, в которых знаменатель отличен от нуля.

2) Если f непрерывна в точке P_0 и $f(P_0) > 0$ $(f(P_0) < 0)$, то существует окрестность $U(P_0)$ точки P_0 такая, что для всех $P \in U(P_0) \cap D(f)$ выполнено неравенство $f(P) > 0$ $(f(P) < 0)$.

3) Если f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве E, то f ограничена на E.

4) Всякая непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E функция равномерно непрерывна на E.

5) Всякая непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E функция достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

6) *Теорема о промежуточном значении.* Если f непрерывна в области*) E и $f(P_1) = a$, $f(P_2) = b$ для P_1, $P_2 \in E$, причем $a < b$, то для каждого $y \in (a, b)$ найдется точка $P \in E$, в которой $f(P) = y$.

7) Если f непрерывна на $D(f) \subset \mathbf{R}^n$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны на $D(\varphi_i) \subset \mathbf{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$, то сложная функция F, составленная из f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, непрерывна на $D(F)$.

3.1.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1.5.1. Определение и геометрическая интерпретация первой производной. Примеры. Если f – функция одного переменного и $x_0 \in (a, b)$, то функция φ, определенная равенством

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называется *разностным отношением* функции f в точке x_0**).

Геометрическая интерпретация. Пусть на графике функции f в координатной системе x, y заданы фиксированная точка $P_0(x_0, y_0)$ и подвижная точка $P(x, y)$, и пусть секущая, проведенная через эти точки, образует угол β с положительным направлением оси x. Тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Разностное отношение функции f в точке x_0 равно, таким образом, угловому коэффициенту секущей, проведенной через точки P и P_0 (рис. 3.6).

*) Напомним, что область связна.

**) Следует обратить внимание на то, что x_0 – фиксированная точка.

Функция f называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a, b)$, если существует предел разностного отношения функции f в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Этот предел называется *производной* функции f в точке x_0.

$$f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0),\ (df/dx)(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Геометрическая интерпретация. Если на графике функции подвижная точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(x_0, y_0)$ (см. рис. 3.6), то, вообще

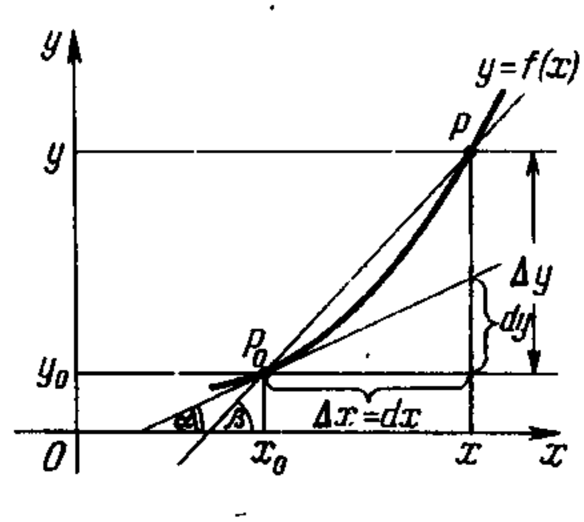


Рис. 3.6

говоря, изменяется также угловой коэффициент секущей. Если существует производная функции f в точке x_0, то прямую, проходящую через точку $P_0(x_0, y_0)$ и такую, что $\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x_0)$, где α – угол наклона этой прямой, называют *касательной к графику* функции f в точке $P_0(x_0, y_0)$. Таким образом, уравнение касательной есть $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Функция f называется *дифференцируемой справа* (*слева*) в точке x_0, если существует предел справа (слева) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \varphi(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \varphi(x)\right)$ разностного отношения φ в точке x_0. Этот предел называется *производной справа* (*слева*) *функции f в точке* x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$, $f'(x_0 + 0)$ $(f'_-(x_0), f'(x_0 - 0))$.

Если существует $f'(x_0)$, то функция f дифференцируема справа и слева в точке x_0 и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Обратно, если существуют односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то существует также $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Функция f называется *дифференцируемой на множестве* E, если она дифференцируема во всех точках $x_0 \in E$*). Функция f называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема на $D(f)$. Если f дифференцируема, то функция f', определенная соответствием $x \to f'(x)$, называется *производной функции* f.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

*) Функция f, дифференцируемая на $E = [a, b]$, должна быть дифференцируема в точках a и b односторонне.

Таблица 3.2

Функция	Производная	Функция	Производная
C (const)	0	$\operatorname{cosec} x$	$-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{crsec} x$
x	1		
x^n	nx^{n-1}		
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\operatorname{arcsec} x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{arccosec} x$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln x$		
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\lg x$	$\dfrac{1}{x}\lg e \approx \dfrac{0{,}4343}{x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Arsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\operatorname{Arch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\operatorname{Arth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\sec x$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\dfrac{1}{1-x^2}$

2) Для функции $f(x) = C$ (C — постоянная) имеем $f'(x_0) = 0$.

3) Показательная функция $f(x) = e^x$ дифференцируема, и $f(x) = f'(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

4) Для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

5) Любой степенной ряд дифференцируем во всех точках, лежащих внутри интервала сходимости.

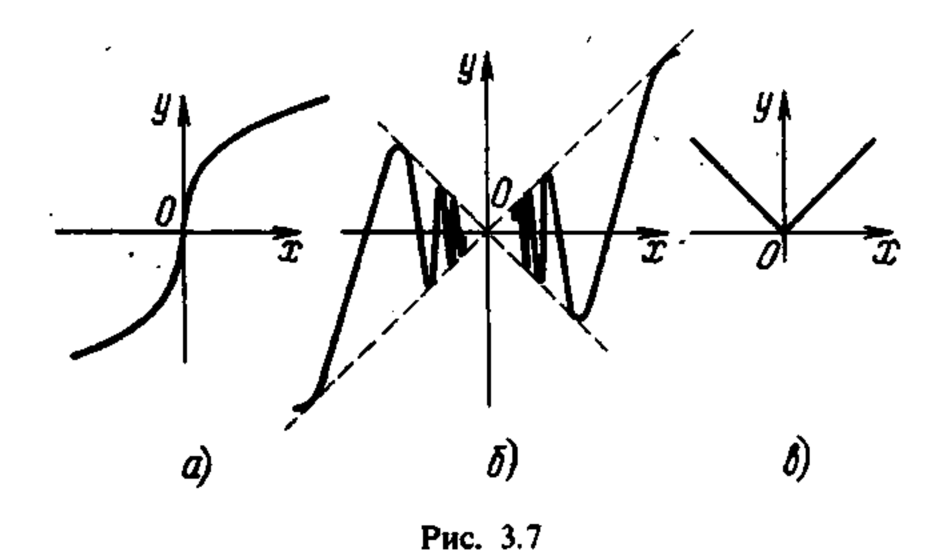


Рис. 3.7

6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$, так как не существует конечного предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}.$$

7) Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, так как не существует предела $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$.

8) $f(x) = |x|$ является дифференцируемой справа и слева в точке $x_0 = 0$. Но так как $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$, то f не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Графики функций из примеров 6) — 8) показаны соответственно на рис. 3.7, *а*—*в*. Они не обладают касательными в точке (0, 0)*).

9) Пусть f дифференцируема и $f(x) > 0$ для всех $x \in D(f)$. Производная функции $\ln f$, т. е. $(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$, называется *логарифмической производной* функции f.

10) Для вычисления производной функции $f(x) = x^x$, $D(f) = \{x \mid x > 0\}$, следует найти вначале логарифмическую производную $(\ln f(x))' = \dfrac{d(x \ln x)}{dx} = \ln x + 1$. Отсюда получается $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

Производные важнейших элементарных функций приведены в табл. 3.2.

3.1.5.2. Производные высших порядков. Пусть производная f' функции f дифференцируема в точке $x_0 \in D(f')$. Тогда $(f'(x))'|_{x = x_0}$ называется *второй производной* функции f в точке x_0.

Обозначение:

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) = (d^2 f/dx^2)(x_0).$$

*) По определению касательная к графику функции не может быть вертикальной.

Действуя подобным образом, определяют *n-ю производную*, или *производную n-го порядка*, функции f в точке x_0:

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'\,|_{x=x_0} = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0).$$

Производные $f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, \ldots$ обозначаются также $f^{III}, f^{IV}, f^{V}, f^{VI}, \ldots$

Если существует $f^{(n)}(x_0)$, то функция f называется *n раз дифференцируемой в точке* x_0. Имеет место следующее равенство:

$$(f^{(n)}(x))^{(m)}\,|_{x=x_0} = f^{(n+m)}(x_0).$$

Функция f называется *n раз непрерывно дифференцируемой на множестве E*, если она n раз дифференцируема в точке $x \in E$ и $f^{(n)}$ непрерывна на E.

Пример. n-я производная многочлена n-й степени есть постоянная.

Дальнейшие примеры производных высших порядков элементарных функций приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Функция	n-я производная
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ (при целочисленном m и $n>m$ n-я производная равна 0)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{\ln a}\dfrac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k\ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ при четном n, $\operatorname{ch} x$ при нечетном n
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$ при четном n, $\operatorname{sh} x$ при нечетном n

3.1.5.3. Свойства дифференцируемых функций.

1. Функция, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке.

2. Пусть функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $c_1 f_1 + c_2 f_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, также дифференцируема в точке x_0 и

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)'\,|_{x_0} = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0).$$

Произведение $f_1 f_2$ также дифференцируемо в точке x_0, и имеет место следующее *правило дифференцирования произведения:*

$$(f_1 f_2)'\,|_{x_0} = f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0).$$

В случае, если $f_2(x_0) \neq 0$, частное f_1/f_2 дифференцируемо в точке x_0, и имеет место следующее *правило дифференцирования дроби:*

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'\Bigg|_{x_0} = \frac{f_1'(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) f_2'(x_0)}{(f_2(x_0))^2}.$$

Примеры. 1) Функция $f(x) = e^x \sin x$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x_0) = e^{x_0}(\sin x_0 + \cos x_0).$$

2) Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ дифференцируема в точках

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{x \mid x = (2k+1)\pi/2,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

и

$$f'(x_0) = \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 x_0 = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

3. Пусть функции f и φ дифференцируемы соответственно в x_0 и t_0, и пусть $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и обладает производной

$$(f(\varphi))'\,|_{t=t_0} = f'[\varphi(t_0)]\cdot\varphi'(t_0).$$

Примеры. 1) Функция $f(x) = e^{\sin x}$ дифференцируема в точках $x_0 \in \mathbf{R}$, и

$$f'(x_0) = e^{\sin x_0}\cos x_0.$$

2) Показательная функция общего вида $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, и так как $a^x = e^{x\ln a}$, то

$$f'(x_0) = e^{x_0 \ln a}\ln a = a^{x_0}\ln a.$$

4. Пусть функция f дифференцируема и строго монотонна на (a, b). Пусть также в точке $x_0 \in (a, b)$ производная $f'(x_0)$ не равна нулю. Тогда обратная функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, и ее производная есть

$$(g(y))'\,|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Примеры. 1) Показательная функция $f(x) = e^x$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Следовательно, $g(y) = \ln y$ дифференцируема в точке $y_0 = e^{x_0}$. Ее производная есть

$$(g)'\,|_{y=y_0} = (\ln y)'\,|_{y=y_0} = \frac{1}{y_0} = \frac{1}{e^{x_0}}.$$

2) Для $x \in \mathbf{R}$ имеем $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Если функции f_1 и f_2 n раз дифференцируемы в точке x_0, то функция $f_1 f_2$ также n раз дифференцируема в точке x_0, и имеет место *формула Лейбница*:

$$(f_1 f_2)^{(n)}\,|_{x_0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(k)}(x_0) f_2^{(n-k)}(x_0),$$

если считать, что $f_i^{(0)}(x_0) = f_i(x_0)$ $(i = 1, 2)$.

Для функций, дифференцируемых в интервале, имеют место следующие теоремы.

Теорема Ролля. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Таким образом, при выполнении предположений этой теоремы график функции f имеет в точке x_0 касательную, параллельную оси x. Из теоремы

Ролля следует, в частности, что между двумя нулями многочлена находится по крайней мере один нуль производной этого многочлена.

Теорема Лагранжа (*о конечном приращении*). Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b), то найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Положив $b - a = k$ и $\theta = (x_0 - a)/k$, получим $f(a + k) = f(a) + f'(a + \theta k)\,k$, причем $\theta \in (0, 1)$.

Геометрическая интерпретация. Если для функции f выполняются условия теоремы Лагранжа, то к графику функции f можно провести по меньшей мере одну касательную, параллельную секущей, проведенной через точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Если f дифференцируема на (a, b) и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x) = C = \text{const}$.

Теорема Коши. Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы в (a, b), и пусть $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Пусть функция f дифференцируема $n + 1$ раз в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ $(\alpha > 0)$. Тогда для всех $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ имеет место *формула Тейлора*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + R_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{f^{\nu}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + r_{n+1}(x),$$

где

$$r_{n+1}(x) = o((x - x_0)^{n+1}),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Величина $R_n(x)$ называется *остаточным членом* (*в форме Лагранжа*) формулы Тейлора.

В частном случае, когда $x_0 = 0$, получается *формула Маклорена*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

В случае $n = 0$ формула Тейлора сводится к теореме Лагранжа. Если f бесконечно дифференцируема в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (т. е. имеет в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ производные всех порядков) и для всех $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ имеет место равенство $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, то функцию f можно представить в виде суммы *ряда Тейлора*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

для всех $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

При $x_0 = 0$ этот ряд называется также *рядом Маклорена*. Следовательно, если $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ при $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, то функция $f(x)$ может быть аппроксимирована в $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ многочленом n-й степени $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$ (см. также 3.1.14.6).

Пример. Показательная функция $f(x) = e^x$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}$. Из соотношения $f^{(n)} = f$ для всех $n \in \mathbb{N}$ получается формула Маклорена:

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} + \frac{e^{\theta x}}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

Для каждого $x \in \mathbb{R}$ имеем $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\theta x}}{(n + 1)!}x^{n+1} = 0$, и, следовательно, $e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$. В частности, отсюда следует:

$$e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}.$$

3.1.5.4. Монотонность и выпуклость функций. Функция f, дифференцируемая на (a, b), возрастает (убывает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$. Если при этом не существует интервала $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ такого, что $f'(x) = 0$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, то f строго возрастает (убывает).

Таким образом, угол наклона касательной к графику дифференцируемой возрастающей (убывающей) функции является неотрицательным (неположительным).

Если для дифференцируемой функции f: а) $f(x_0) \geqslant 0$, б) для каждого $x \geqslant x_0$ выполняется условие $f'(x) \geqslant 0$, то $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant x_0$.

Примеры. 1) Для функции $f(x) = e^x$ при любом $x \in \mathbb{R}$ имеем $f'(x) = f(x) > 0$. Следовательно, f строго возрастает на $\mathbb{R}$.

2) Функция $f(x) = x - \sin x$ строго возрастает на $I = (0, 2\pi)$, так как для $x \in I$ имеем $f'(x) = 1 - \cos x > 0$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) = x - \sin x > 0$ при $x \in I$, а отсюда и при всех $x > 0$.

3) Функция $f(x) = e^{-x} + x - 1$ строго возрастает на $[0, +\infty)$, так как $f'(x) = -e^{-x} + 1 > 0$ при $x > 0$. Отсюда, так как $f(x) = 0$, следует, что $f(x) > 0$, т. е. $e^{-x} > 1 - x$ при $x > 0$.

Дифференцируемая на (a, b) функция f называется *выпуклой вниз* (соответственно *строго выпуклой вниз*) на (a, b), если $f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ (соответственно

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1))$$

для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 \neq x_2$.

Дифференцируемая на (a, b) функция f называется *выпуклой вверх* (соответственно *строго выпуклой вверх**)), если $f(x_2) \leqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ (соответственно $f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$) для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 \neq x_2$.

*) Часто в литературе используют вместо «выпуклый вниз» термин «вогнутый», а вместо «выпуклый вверх» просто «выпуклый»; такая терминология имеется и в некоторых разделах этого справочника.

Геометрическая интерпретация выпуклости функции. Из неравенств, указанных в определении выпуклости, следует, что график функции f, выпуклой вниз, нигде не лежит под касательной к нему. Если f строго выпукла вниз, то график f, за исключением точки касания, всегда лежит над любой касательной к нему. Соответствующие утверждения имеют место и для случая выпуклости вверх.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз в $D(f) = \mathbf{R}$, так как для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_1 \neq x_2$, выполнено неравенство $x_2^2 > x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_1) = 2x_1x_2 - x_1^2$.

Критерии выпуклости функции.

1. Дифференцируемая на (a, b) функция f выпукла вниз (вверх) на (a, b) тогда и только тогда, когда f' возрастает (убывает) на (a, b). Функция f строго выпукла вниз (вверх) на (a, b) тогда и только тогда, когда f' строго возрастает (убывает) на (a, b).

2. Дважды дифференцируемая в (a, b) функция f выпукла вниз (вверх) на (a, b) тогда и только тогда, когда для всех $x \in (a, b)$ имеет место неравенство $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$.

Примеры. 1) Показательная функция $f(x) = e^x$ строго выпукла вниз на $\mathbf{R}$, так как для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем: $f'(x) = e^x > 0$ – строго возрастающая в $\mathbf{R}$ функция.

2) Функция $f(x) = \cos x$ строго выпукла вверх в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, так как для всех $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ имеем $f''(x) = -\cos x < 0$.

3.1.5.5. Экстремумы и точки перегиба. Пусть функция f определена на (a, b), и пусть $x_0 \in (a, b)$. Значение $f(x_i)$ называется *локальным минимумом* (*максимумом*) функции f на (a, b), если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $U(x_0) \subset (a, b)$, и для всех $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ выполнено неравенство

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Максимум или минимум функции f называется (*локальным*) *экстремумом* функции f на (a, b).

Экстремумы функции f на (a, b) являются, таким образом, наибольшими или наименьшими значениями функции относительно некоторой окрестности. Они отличаются, вообще говоря, от наименьшего $m = \min\limits_{x \in (a, b)} f(x)$ и наибольшего $M = \max\limits_{x \in (a, b)} f(x)$ значений функции на всей области определения. Если, однако, f выпукла вниз (вверх) на (a, b) и имеет минимум (максимум) в (a, b), то он совпадает с $m(M)$. Наибольшее (наименьшее) значение функции f, дифференцируемой на $[a, b]$, достигается либо в одной из точек локального максимума (минимума), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Таким образом, если множество локальных максимумов (минимумов) конечно и если известны все локальные максимумы (минимумы) функции f на $[a, b]$ и значения функции в точках a и b, то перебором можно определить $\max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ $(\min\limits_{x \in [a, b]} f(x))$.

Пример. $f(0) = 0$ является локальным минимумом функции $f(x) = x^2$ на $[-1, +1]$, который совпадает с наименьшим значением f на $[-1, +1]$.

Необходимое условие существования экстремума. Если $f(x_0)$ является экстремумом дифференцируемой функции f, то $f'(x_0) = 0$. Касательная к графику функции f, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси x.

Пример. Так как $f(0) = 0$ является минимумом функции $f(x) = x^2$, то $f'(0) = 0$.

Достаточные условия существования экстремума.

1. Если f дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то функция f имеет в точке x_0 локальный минимум (максимум).

2. Пусть f k раз дифференцируема в точке x_0. Далее, пусть $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ при $\nu = 1, \ldots, k - 1$ и $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Если k четное, то f имеет в точке x_0 при $f^{(k)}(x_0) > 0$ минимум и при $f^{(k)}(x_0) < 0$ максимум. Если k нечетно, то экстремума нет.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^4$ имеет локальный минимум в точке $x_0 = 0$, который совпадает с абсолютным минимальным значением f в $\mathbf{R}$, так как f в $\mathbf{R}$ четыре раза непрерывно дифференцируема и

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \; f^{(4)}(0) = 4! > 0.$$

2) Для функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$ выполняется необходимое условие экстремума $f'(0) = 0$. Однако $f(0) = 0$ не является точкой экстремума функции f.

3) Функция $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ имеет минимум в точке $x_0 = 1/3$ и максимум в точке $x_2 = -1$. Однако, поскольку $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, у функции f в $\mathbf{R}$ нет наибольшего и наименьшего значений.

4) Пусть среди прямоугольников с одинаковым периметром необходимо найти максимальный по площади. Если a, b – длины сторон прямоугольника, то его площадь равна $S = a \cdot b$. Из условия $P = 2(a + b) = \text{const} > 0$ следует, что $b = P/2 - a$ и $S(a) = a(P/2 - a)$. Решение задачи сводится, таким образом, к нахождению максимального значения функции S, где $D(S) = [0, P/2]$. Уравнение $S'(a) = -2a + P/2 = 0$ имеет единственное решение $a_0 = P/4$. Так как $S''(a_0) = -2 < 0$, то S имеет в точке $a_0 = P/4$ локальный максимум, который вследствие того, что $S(0) = S(P/2) = 0$, совпадает с максимальным значением S. Искомый прямоугольник есть квадрат со стороной $a = P/4$.

5) Пусть заданы n значений измеримой величины $a_1, \ldots, a_n$. Число x (среднее значение) должно быть определено так, чтобы сумма квадратов отклонений величин a_k от x принимала минимальное значение, т. е. надо определить минимум функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - x)^2, \quad D(f) = \mathbf{R}.$$

Уравнение $f'(x) = -2 \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - x) = 0$ имеет единственное решение $x_0 = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Из того, что $f''(x_0) = 2n > 0$, следует, что f имеет в точке x_0 локальный минимум, который совпадает с минимальным значением f в $\mathbf{R}$. Искомое среднее значение равно среднему арифметическому значений измеряемой величины.

Предположения о дифференцируемости функции f в необходимых (соответственно достаточных) условиях экстремума могут не выполняться, но тем не менее функция f может иметь экстремумы. Например, функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, однако имеет в ней минимум. В подобных случаях нужно пытаться найти значения экстремумов непосредственно на основе определения. При этом важным вспомогательным средством являются соображения о монотонности вблизи исследуемых точек. Функция $f(x) = |x|$, например, является строго убывающей при $x < 0$ и строго возрастающей при $x > 0$. Следовательно, $f(0) = 0$ является ее минимумом.

Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Функция f имеет в точке

x_0 *точку перегиба* тогда и только тогда, когда функция f' имеет в точке x_0 локальный экстремум.

Геометрическая интерпретация. Если f имеет в точке x_0 точку перегиба, то график функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ «перегибается» через касательную к нему в этой точке, т. е. в некоторой окрестности точки x_0 кривая при $x < x_0$ и при $x > x_0$ лежит по разные стороны от касательной.

Необходимое условие существования точки перегиба. Если функция f, дважды дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0, имеет в x_0 точку перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие существования точки перегиба. Если f в некоторой окрестности точки x_0 k раз дифференцируема, причем k нечетно, $k \geqslant 3$, и $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ при $\nu = 2, 3, \ldots, k-1$, а $f^{(k)}(x_0) \neq \neq 0$, то функция f имеет в x_0 точку перегиба.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^3$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку перегиба, так как $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$.

2) $f(x) = \sin x$ имеет в $x_0 = 0$ точку перегиба; $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f'''(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$.

3.1.5.6. Элементарное исследование функции. При помощи дифференциального исчисления во многих случаях можно получить представление о поведении графика функции, не заполняя подробных таблиц значений функции, которые в большинстве своем неудовлетворительно отражают важнейшие качественные свойства функции, такие, как точки разрыва, локальные экстремумы или нули функции. Такое *исследование функции* включает в себя приведенные ниже этапы, которые могут быть проведены на основе методов, описанных в 3.1.4.1, 3.1.5.4 и 3.1.5.5.

1. Определение нулей функции f (решение уравнения $f(x) = 0$), четности (нечетности) и периодичности.

2. Определение интервалов непрерывности и дифференцируемости.

3. Классификация точек разрыва функции f и исследование ее поведения «на бесконечности».

4. Определение локальных экстремумов и точек перегиба.

5. Определение интервалов монотонности и выпуклости.

6. Вычисление соответствующих значений функции.

7. Выполнение эскиза графика функции.

Пример. Будем исследовать график функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{3} & \text{при } x > 2, \\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1} & \text{при } x \leqslant 2. \end{cases}$$

1) Функция f не имеет нулей.

2) f непрерывна на $\mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$. Так как $f'_-(2) = -8/9$, $f'_+(2) = 0$, то f не дифференцируема в точке $x_1 = 2$. Следовательно, функция f дифференцируема на $\mathbf{R} \setminus \{2, 1, -1\}$ (см. 3.1.5.3).

3) При $x \leqslant 2$ $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} + 1$. Точки $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$ являются, таким образом, точками разрыва 2-го рода. Далее,

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5/3, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

4) Единственное решение уравнения $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0$ есть $x_0 = 0$. При $x < 2$ и $x \neq \pm 1$ получим, что $f''(x) = \dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$. Из того, что $f''(0) = -4 < 0$, следует, что f имеет в 0 локальный максимум. Функция f не достигает в области определения наибольшего и наименьшего значений. Так как у уравнения $f''(x) = 0$ нет действительных решений, то f не имеет точек перегиба.

5) При $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (-1, 0)$ $f'(x) > 0$. Следовательно, f строго возрастает в этих интервалах. При $x \in (0, 1)$ и $x \in (1, 2)$ $f'(x) < 0$, откуда следует, что f строго убывает в этих интервалах.

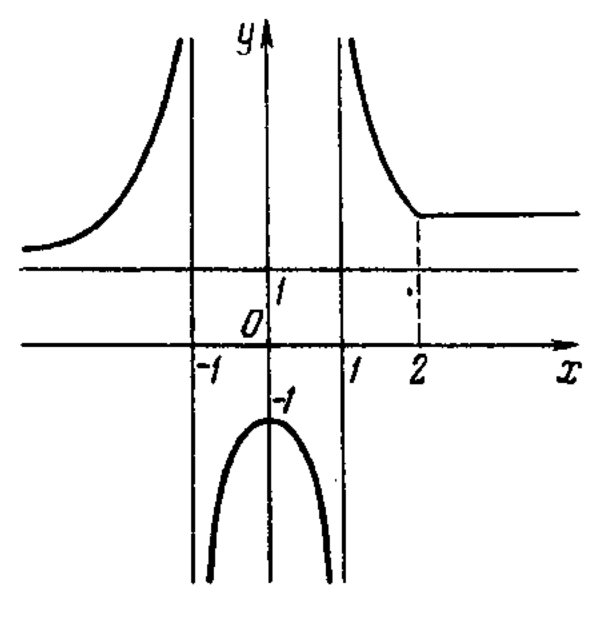


Рис. 3.8

При $x \in (-1, +1)$ $f''(x) < 0$ и, следовательно, f строго выпукла вверх в $(-1, +1)$. При $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (1, 2)$ $f''(x) > 0$. Следовательно, f строго выпукла вниз в этих интервалах (рис. 3.8).

3.1.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1.6.1. Частные производные, геометрическая интерпретация. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$. Функция f называется *дифференцируемой* по x_k, если существует предел разностного отношения

$$\lim_{x_k \to x_k^0} (f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - $$
$$ - f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0))/(x_k - x_k^0);$$

этот предел называется *частной производной функции* f (по x_k) в точке P_0 и обозначается $\dfrac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Частная производная функции f по x_k в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равна, таким образом, обыкновенной производной функции действительного переменного x_k, которая получается из f, если переменные x_i для $i \neq k$ положить равными x_i^0.

Функция f называется *дифференцируемой по каждому из переменных в* $E \subset D(f)$, если для f на E существуют частные производные по каждому из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой* в точке $P_0 \in D(f)$, если f дифференцируема по каждому из переменных в некоторой окрестности точки P_0 и все частные производные $\partial f/\partial x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ непрерывны в P_0.

Пример. Функция $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$ дифференцируема по каждому из переменных в $\mathbf{R}^2$, и

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \sin x_2^0, \quad f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \cos x_2^0;$$

более того, f является непрерывно дифференцируемой в $\mathbf{R}^2$.

При $n > 1$ из дифференцируемости f в точке P_0 по каждому из переменных не следует, вообще говоря, непрерывность f в точке P_0. Функция f из примера 2) в 3.1.4.2.2 разрывна в точке (0, 0), несмотря на то, что f дифференцируема в (0, 0) по x_1 и x_2: $f'_{x_1}(0, 0) = f'_{x_2}(0, 0) = 0$.

Геометрическая интерпретация частной производной. Пусть f — функция двух переменных, дифференцируемая по каждому из переменных в точке $P_0(x_0, y_0)$. Рассмотрим плоскость П, проходящую через точку $P_0(x_0, y_0)$ параллельно плоскости xOz, т. е. плоскость $y = y_0$. По определению $f'_x(x_0, y_0)$ есть число, равное $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол между касательной к кривой пересечения плоскости П и графика (см. 4.1.4.4) функции f и плоскостью xOy (рис. 3.9).

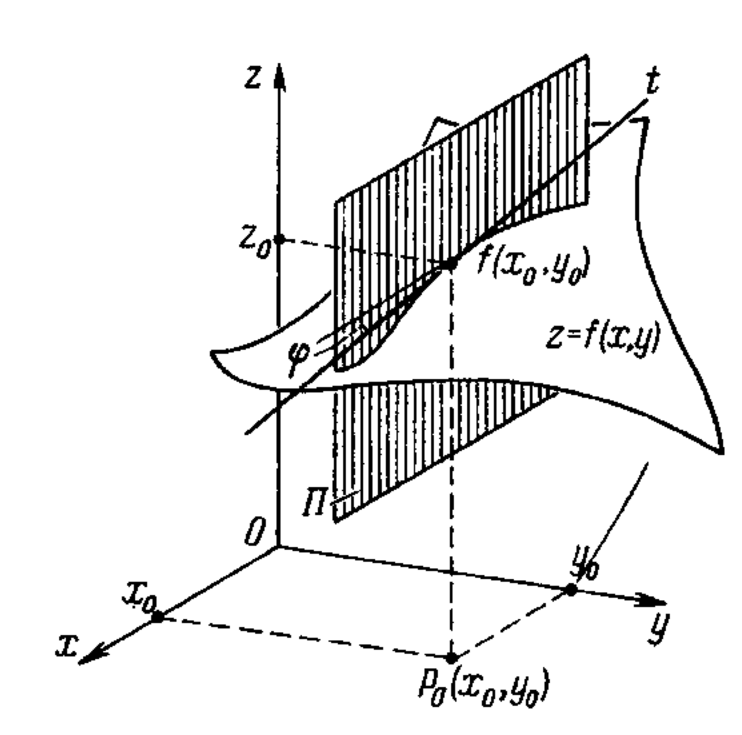


Рис. 3.9

Соответственно $f'_y(x_0, y_0)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой пересечения плоскости $x = x_0$ с графиком функции f и плоскость xOy.

Производные высших порядков. Пусть функция f на открытом множестве $E \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируема по x_k. Тогда f'_{x_k} является функцией с областью определения $D(f'_{x_k}) = E$. Функция f называется в точке $P_0 \in E$ *дважды дифференцируемой* (по x_k, x_l), если функция f'_{x_k} в точке P_0 дифференцируема по x_l. Для второй производной f по x_k и x_l используется обозначение $\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_l \partial x_k}$ или $f''_{x_k x_l}(P_0)$.

Посредством полной индукции определяют *частную производную r-го порядка*:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)\Bigg|_{P_0} = \frac{\partial^r f(P_0)}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}} = f^{(r)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_r}}(P_0).$$

Пример. Для функции $f = e^{x_1} \sin x_2$ имеем

$$f''_{x_1 x_1}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \sin x_1^0,$$

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0} \cos x_2^0,$$

$$f''_{x_2 x_2}(x_1^0, x_2^0) = -e^{x_1^0} \sin x_2^0.$$

При определенных предположениях можно менять порядок вычисления частных производных функции. Пусть f непрерывна в некоторой окрестности $U(P_0)$ точки $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Если существуют частные производные $f'_{x_k}, f'_{x_l}, f''_{x_k x_l}$ в $U(P_0)$ и они непрерывны в точке P_0, то существует частная производная $f''_{x_l x_k}$ в P_0 и $f''_{x_l x_k}(P_0) = f''_{x_k x_l}(P_0)$.

3.1.6.2. Полный дифференциал, производная по направлению, градиент. Пусть область определения $D(f)$ функции f содержит окрестность точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $n \geq 1$. Функция f называется *дифференцируемой* в точке P_0, если для любых $P(x_1, \ldots, x_n)$ из этой окрестности

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0) + \rho(P, P_0) R_1(P),$$

где $\rho(P, P_0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2}$ и $\lim\limits_{P \to P_0} R_1(P) = 0$.

Линейная часть

$$df(P) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0)$$

приращения $f(P) - f(P_0)$ называется *полным дифференциалом* функции f в точке P_0.

График функции $\tilde{f}$, определяемой равенством

$$\tilde{f}(P) = f(P_0) + \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)(x_k - x_k^0),$$

называется *касательной плоскостью* к графику функции f в точке P_0.

Если f дифференцируема в точке P_0, то f непрерывна в P_0 и дифференцируема по каждому из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Однако, если функция непрерывна и дифференцируема по каждому из переменных $x_1, \ldots, x_n$ в точке P_0, она не обязательно дифференцируема в этой точке. Если же f непрерывно дифференцируема в точке P_0, то f дифференцируема в точке P_0.

Пример. Функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

непрерывна в $\mathbb{R}^2$. При $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

а при $(x_1, x_2) = (0, 0)$ $f'_{x_1}(0, 0) = \lim\limits_{x_1 \to 0} \dfrac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} = 0$, $f'_{x_2}(0, 0) = 0$.

Следовательно, f дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ по x_1 и по x_2. Из того, что $\lim\limits_{n \to \infty} f'_{x_1}(1/n, 1/n) = 1/2 \neq f'_{x_1}(0, 0)$, следует, что f'_{x_1} не является непрерывной в (0; 0). Функция f не дифференцируема в $P_0(0, 0)$, так как в противном случае (если положить, в частности, что $x_1 = x_2 \to 0$) должно было бы иметь место разложение $f(x_1, x_2) - f(0, 0) = \frac{1}{2} x_1 = \sqrt{2}\, x_1 R_1(P)$, где $\lim\limits_{P \to P_0} R_1(P) = 0$, что невозможно, ибо $R_1(P) = \sqrt{2/4}$.

Геометрическая интерпретация полного дифференциала функции двух переменных. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ — точка из области определения функции $z = f(x, y)$. Если положить $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$, то в случае дифференцируемости функции f в P_0

получается формула разложения

$$f(P) - f(P_0) = df(P) + \rho(P, P_0) R_1(P),$$

где $\lim\limits_{P \to P_0} R_1(P) = 0.$

Если отложить вертикально из $P(x_0 + dx, y_0 + dy)$ (соответственно $P_0(x_0, y_0)$) значение функции $f(P)$ (соответственно $f(P_0)$), то получим соответствующие точки поверхности графика функции f. Если же в точке P взять приближенное значение $f(P_0) + df(P)$, то получим точку плоскости, касательной к графику функции в точке P_0, лежащую над точкой P. Полный дифференциал $df(P)$ является приращением значения функции, если поверхность графика f заменена касательной плоскостью к нему, проведенной в точке P_0 (рис. 3.10). Это приближение тем точнее, чем меньше $\rho(P_0, P)$.

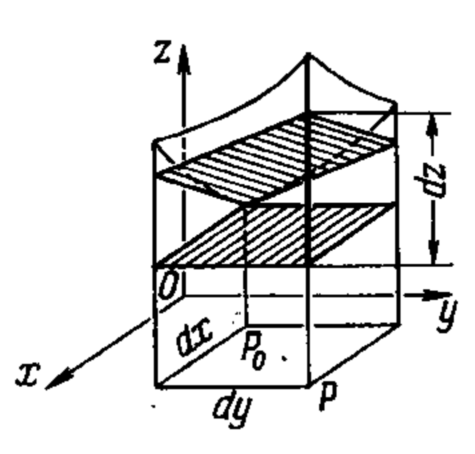


Рис. 3.10

Производная по направлению. Пусть f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$, и пусть $\mathbf{m}$ – единичный вектор в $\mathbf{R}^n$ ($|\mathbf{m}| = 1$) с координатами $m_i = \cos\alpha_i$ ($i = 1, \ldots, n$), где α_i – углы между вектором $\mathbf{m}$ и положительными направлениями осей координат. Предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(x_1^0 + tm_1, \ldots, x_n^0 + tm_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)]$$

(если он существует) называется *производной функции f в точке P_0 по направлению* $\mathbf{m}$ и обозначается $\partial f(P_0)/\partial\mathbf{m}$.

Производная функции f по направлению $\mathbf{m}$ равна, следовательно, обыкновенной производной такой функции одного переменного, которая получена из f путем сужения области ее определения до отрезка прямой, проходящего через точку P_0 в направлении вектора $\mathbf{m}$.

Пример. Пусть $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $P_0 = (0, 0)$, $\mathbf{m} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$. Тогда

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{m}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{k}\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0, 0)\right] = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

Если f дифференцируема в точке P_0, то существует производная по направлению функции f в P_0 относительно произвольного единичного вектора $\mathbf{m}$ и

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{m}} = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0) \cos\alpha_k.$$

Если f дифференцируема по каждой из координат в точке P_0, то вектор $\{f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0)\}$ называется *градиентом функции* f в точке P_0 и обозначается символом $\operatorname{grad} f(P_0)$.

Если f дифференцируема в точке P_0, то

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{m}} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{m},$$

где справа стоит скалярное произведение. Если $\mathbf{m}$ – вектор в касательной плоскости к поверхности уровня $f(x_1, \ldots, x_n) = \text{const}$, то

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{m}} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{m} = 0.$$

В общем случае

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{m}} = |\operatorname{grad} f(P_0)| \cos(\widehat{\operatorname{grad} f(P_0), \mathbf{m}}).$$

Свойства градиента.

1. Градиент функции f перпендикулярен поверхности уровня f.

2. Направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции f (т. е. направление наибольшей производной по направлению).

Примеры. 1) Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = 1/r$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $D(f) = \mathbf{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ (ньютонов потенциал центрально симметричного силового поля). Тогда $\operatorname{grad} f(P) = -\frac{1}{r^3}\{x_1, x_2, x_3\}$. Поверхностями уровня при этом являются сферы с центром в точке начала координат (0, 0, 0). Производная функции f в точке $P(x_1, x_2, x_3)$ по направлению $\mathbf{m}$ равна

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{m}} = -\frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^{3} x_i \cos\alpha_i.$$

2) Для функции f из примера 2) в 3.1.4.2.2 в точке $P_0(0, 0)$ существует производная по любому направлению, несмотря на то что f разрывна в точке P_0.

3.1.6.3. Теоремы о дифференцируемых функциях многих переменных.

Дифференцирование сложной функции. Пусть функция f дифференцируема в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – функции одного переменного, дифференцируемые в точке $t_0 \in (a, b)$ и такие, что $x_i^0 = \varphi_i(t_0)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда сложная функция, составленная из f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (см. 3.1.4.2.3), дифференцируема в точке t_0, и ее производная равна

$$\left.\frac{df[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]}{dt}\right|_{t = t_0} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \varphi'_i(t_0).$$

Пример. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}^2$. Далее, пусть $x_1 = \varphi_1(t) = r\cos t$, $x_2 = \varphi_2(t) = r\sin t$, где $r = \text{const}$. Сложная функция $F(t) = f(r\cos t, r\sin t)$ имеет производную

$$F'_t(t) = r[-f'_{x_1}(r\cos t, r\sin t)\sin t + f'_{x_2}(r\cos t, r\sin t)\cos t].$$

Дифференцирование неявных функций. Если функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области $E \subset R^2$ и существует функция $y = f(x)$, определенная в (a, b) и такая, что для всех $x \in (a, b)$ уравнение $F(x, f(x)) = 0$ выполняется, и если, кроме того, $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, то f дифференцируема в (a, b) и для каждого $x \in (a, b)$ справедливо равенство (ср. 3.1.6.4)

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) f'(x) = 0,$$

или

$$f'(x) = -\frac{F'_x[x, f(x)]}{F'_y[x, f(x)]}.$$

Примеры. 1) Уравнением

$$F(x, y) = x^3 + y^y = 0, \quad x < 0, \quad y \in \mathbf{R},$$

неявно определяется функция $y = f(x) = 3\ln(-x)$.

Для нахождения $f'(x)$ не обязательно разрешать уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y: достаточно продифферен-

цировать $F(x, f(x)) = 0$ относительно x и получить $3x^2 + e^y \cdot f'(x) = 0$, откуда $f'(x) = -3/x$.

2) Пусть $F(x, y) = x - \sin y$, $-1 < x < +1$, $y \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Решением уравнения $F(x, y) = 0$ относительно y является $y = f(x) = \arcsin x$. При помощи неявного дифференцирования получаем $1 - \cos y \cdot f'(x) = 0$; следовательно,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Формула Тейлора функции двух переменных. Пусть функция f на множестве

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta, \delta > 0\}$$

$r+1$ раз дифференцируема. Тогда для всех $(x, y) \in E$ справедлива формула

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\left\{(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^k f\right)\Bigg|_{(x_0, y_0)} + R_n(x, y).$$

При этом

$$\left\{(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (x - x_0)^i (y - y_0)^{k-i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}},$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k \partial y^0} = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^0 \partial y^k} = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial^0 f}{\partial x^0 \partial y^0} = f,$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\left\{(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{n+1} f\right)\Bigg|_{x_0 + \theta(x - x_0),\ y_0 + \theta(y - y_0)},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Величина $R_n(x, y)$ называется *остаточным членом (в форме Лагранжа) формулы Тейлора* для функции f.

Если при $(x, y) \in E$ имеет место равенство $\lim_{n \to \infty} R_n(x, y) = 0$, то можно использовать формулу Тейлора для того, чтобы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) приблизить функцию f многочленом n-й степени. Формула Тейлора легко может быть обобщена на функции более чем двух переменных.

Если f дифференцируема в области $E \subset \mathbf{R}^2$ и для всех $(x, y) \in E$ выполнены соотношения $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$, то f постоянна.

Пример. Если разложить функцию $f(x, y) = \sin x \sin y$ в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$ вплоть до остаточного члена $R_3(x, y)$, то получим

$$\sin x \sin y = xy + R_3(x, y),$$

$$R_3(x, y) = -\frac{1}{6}[(x^3 + 3xy^2)\cos\theta x \sin\theta y + (3x^2 y + y^3)\sin\theta x \cos\theta y],$$

где $0 < \theta < 1$. Из $|\cos\theta x| \leqslant 1$, $|\sin\theta x| \leqslant 1$ в силу неравенства треугольника следует, что

$$|R_3(x, y)| \leqslant \frac{1}{6}(|x| + |y|)^3.$$

Таким образом, при небольших значениях $|x| + |y|$ функция $f(x, y)$ близка к функции $f_1(x, y) = xy$, графиком которой является гиперболический параболоид.

3.1.6.4. Дифференцируемое отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$; функциональные определители; неявные функции; теоремы о существовании решения. Пусть в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$ определены функции $f_1, \ldots, f_m$. Если записать сокращенно:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

то отображением $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$ определяется функция $\mathbf{f}$ с областью определения $D(\mathbf{f}) = G$ и множеством значений $W(\mathbf{f}) \subset \mathbf{R}^m$. Функция $\mathbf{f}$ называется *непрерывной*, соответственно *дифференцируемой*, по каждой из координат в G, если все функции $f_i (i = 1, \ldots, n)$ непрерывны, соответственно дифференцируемы, по каждой из координат $x_1, \ldots, x_n$ в области G. Аналогично определяется *непрерывная дифференцируемость* отображения $\mathbf{f}$.

Пусть функция $\mathbf{f}$ определена в области $G \subset \mathbf{R}^n$ и дифференцируема в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$. по каждой из координат. Матрица размера $n \times m$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\Bigg|_{P_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{P_0}$$

называется *функциональной матрицей* функции $\mathbf{f}$ в точке P_0. В случае $m = n$ определитель этой матрицы

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$$

называется *функциональным определителем* или *якобианом* функции $\mathbf{f}$ в точке P_0.

Пример. Якобиан функции $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $f_2(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$ равен

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}\Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ x_2 = x_2^0}} = 4((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2).$$

Свойства дифференцируемых отображений.

1. Если область $G \subset \mathbf{R}^n$ посредством непрерывно дифференцируемой на G функции $\mathbf{f}$ отображается на множество $G' \subset \mathbf{R}^n$ и если для всех $P \in G$ якобиан $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ отличен от нуля, то G' также является областью.

2. Пусть $\mathbf{f}$ является на $G \subset \mathbf{R}^n$ непрерывно дифференцируемой функцией. Пусть также в точке $P_0 \in G$

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\Bigg|_{P_0} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $U(P_0)$ точки P_0, которая отображается функцией $\mathbf{f}$ на некоторую окрестность V точки $\mathbf{f}(P_0)$ взаимно однозначно. При этом в V существует непрерывно дифференцируемая обратная функция $\mathbf{g}$*).

Таким образом, система уравнений

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

*) В этой теореме утверждается только локальная обратимость. Функция $\mathbf{f}$ не обязательно взаимно однозначна на всей области G.

разрешима относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ в некоторой окрестности точки, в которой якобиан отличен от нуля, т. е. существуют непрерывно дифференцируемые функции $g_1,\ldots,g_n$ такие, что

$$x_i = g_i(y_1,\ldots,y_n) \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Пример. Системой уравнений

$$y_1 = f_1(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi, \quad y_2 = f_2(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi$$

определено отображение области $G = \{(\rho, \varphi) \mid \rho > 0, \ \varphi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbf{R}^2$ на $\mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Функции f_1, f_2 непрерывно дифференцируемы в G, и

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Поскольку $\rho > 0$, то указанная выше система уравнений разрешима в некоторой окрестности произвольной точки области G относительно ρ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Получаем

$$\rho = g_1(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

$$\varphi = g_2(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}(y_2/y_1) & \text{при } y_1 > 0, y_2 > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y_2/y_1) & \text{при } y_1 < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}(y_2/y_1) & \text{при } y_1 > 0, y_2 < 0, \\ \pi/2 & \text{при } y_1 = 0, y_2 > 0, \\ 3\pi/2 & \text{при } y_1 = 0, y_2 < 0. \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что эти формулы решения справедливы для всех точек из G. Заданное посредством формул $y_i = f_i(\rho, \varphi)(i = 1, 2)$ отображение G на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ взаимно однозначно.

Теорема об умножении якобианов. Пусть функции $f_1,\ldots,f_n$, заданные уравнениями $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i = 1,\ldots,n)$, и функции $g_1,\ldots,g_n$, заданные уравнениями $x_i = g_i(z_1,\ldots,z_n)$ $(i = 1,\ldots,n)$, дифференцируемы по каждой из координат. Тогда функции $F_1,\ldots,F_n$, определенные уравнениями

$$F_i(z_1,\ldots,z_n) = f_i[g_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,g_n(z_1,\ldots,z_n)],$$

где $i = 1,\ldots,n$, дифференцируемы по каждой из координат и соответствующий якобиан равен

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}.$$

Функции $f_1,\ldots,f_m$ называются *зависимыми* в $G \subset \mathbf{R}^n$, если в $D \subset \mathbf{R}^n$ существует функция, не равная тождественно нулю ни в одной подобласти области D и удовлетворяющая в каждой точке $(x_1,\ldots,x_n) \in G$ соотношению

$$F[f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)] = 0.$$

Следующая теорема дает критерий того, что данная система непрерывно дифференцируемых функций является зависимой.

Пусть функции $f_1,\ldots,f_m$ непрерывно дифференцируемы в ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^n$. Тогда:

1. При $m > n$ функции $f_1,\ldots,f_m$ всегда зависимы.

2. При $m = n$ функции $f_1,\ldots,f_n$ зависимы в G тогда и только тогда, когда якобиан $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ тождественно равен нулю в G.

3. При $m < n$ функции $f_1,\ldots,f_m$ зависимы в G, если ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|$ меньше m.

Примеры. 1) Функции $f_1(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$, $f_2(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}$ независимы в каждой ограниченной области в $\mathbf{R}^2$, поскольку $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = -2e^{2x_1} \neq 0$.

2) Функции $f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1 - x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2)$ являются зависимыми в $\mathbf{R}^2$, так как

$$\sin^2(x_1 - x_2) + \cos^2(x_1 - x_2) - 1 = 0.$$

Для всех $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ имеет место равенство $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0$.

Неявные функции. Пусть в некоторой области G плоскости xOy задана функция F, и пусть линия уровня функции F, определенная соотношением $F(x, y) = 0$, является графиком некоторой функции f, заданной уравнением $y = f(x)$. В этом случае для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$, и говорят, что функция f задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$ или что уравнение $F(x, y) = 0$ является однозначно *разрешимым относительно* y. Может оказаться, что уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо не в общем виде, т. е. не для всех $(x, y) \in M = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$, а лишь локально, т. е. в некоторой окрестности некоторой точки из M.

Пример. Линия уровня, заданная в плоскости xOy уравнением $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$, представляет собой окружность единичного радиуса, которая не может быть графиком функции $y = f(x)$. Уравнение $F(x, y) = 0$, вообще говоря, однозначно неразрешимо. Однако верхняя половина окружности есть график функции $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$ является однозначно разрешимым относительно y при $y \geqslant 0$. Точно так же уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y при $y < 0$. При этом неявно заданная таким образом функция есть $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Ее график — нижняя половина окружности.

Пусть функция F и ее частная производная F'_y непрерывны в области $G \subset \mathbf{R}^2$. Пусть также $F(x_0, y_0) = 0$, $(x_0, y_0) \in G$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует единственная непрерывная функция f, задаваемая уравнением $y = f(x)$, которая определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ в точке x_0, удовлетворяет соотношению $f(x_0) = y_0$, и в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) условия $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in V(x_0, y_0)$ и $y = f(x)$, $x \in U(x_0)$, равносильны. В частности, для каждого $x \in U(x_0)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Если функция F k раз непрерывно дифференцируема, то f также k раз непрерывно дифференцируема (см. 3.1.6.3). (Соответствующее утверждение верно, естественно, и для решения уравнения $F(x, y) = 0$ относительно x.)

Если $\operatorname{grad} F(P_0) \neq \mathbf{0}$, то через точку P_0 проходит только одна линия уровня функции F.

Пример. Уравнение $F(x, y) = xe^y - ye^x + x = 0$ однозначно разрешимо относительно y в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, так как F является непрерывно дифференцируемой в $\mathbf{R}^2$ и $F'_y(0, 0) = -1 \neq 0$. Однако (явное) решение $y = f(x)$ этого уравнения не определяется элементарной функцией. Тем не менее можно, согласно 3.1.6.3, вычислить производную f в точке $x_0 = 0$: $f'(0) = -\dfrac{F'_x(0, 0)}{F'_y(0, 0)} = 2$.

Обобщенная теорема о разрешимости неявных функций. Пусть в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ заданы m функций $F_1,\ldots,F_m$ от $n + m$ перемен-

ных $x_1,\dots,x_n$; $y_1,\dots,y_m$ посредством следующих уравнений:

$$z_i = F_i(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m) \qquad (i = 1,\dots,m).$$

Достаточные условия однозначной разрешимости системы уравнений $F_i(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m) = 0$ $(i = 1,\dots,m)$ относительно $y_1,\dots,y_m$ даются следующей теоремой.

Пусть функции F_i в некоторой окрестности U точки $P_0(x_1^0,\dots,x_n^0;\ y_1^0,\dots,y_m^0)\in G$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно $y_1,\dots,y_m$. Пусть, далее,

$$F_i(P_0) = 0 \ (i = 1,\dots,m), \qquad \left.\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right|_{P_0} \neq 0.$$

Тогда существует такая окрестность V точки $\tilde{P}_0 = \tilde{P}_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и, кроме того, существует такая (однозначно определенная окрестностью V) система определенных и непрерывных в V функций $f_1,\dots,f_m$, что

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \qquad (i = 1,\dots,m),$$
$$y_i^0 = f_i(x_1^0,\dots,x_n^0) \qquad (i = 1,\dots,m),$$

и для каждой точки $(x_1,\dots,x_n)\in V$ выполняется равенство

$$F_i[x_1,\ \dots,\ x_n;\ f_1(x_1,\ \dots,\ x_n),\ \dots,\ f_m(x_1,\ \dots,\ x_n)] = 0 \qquad (i = 1,\dots,m).$$

Если все функции F_i k раз непрерывно дифференцируемы, то все f_i также k раз непрерывно дифференцируемы.

Если уравнения $F_i(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m) = 0$ однозначно разрешимы относительно $y_1,\dots,y_m$, то говорят, что этой системой уравнений *неявно* определяется функция $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_m)$ с областью определения $D(\mathbf{f}) = V \subset \mathbf{R}^n$ и множеством значений $W(\mathbf{f}) \subset \mathbf{R}^m$.

Для вычислений производной $\partial f_k/\partial x_r$ $(k = 1,\dots,m;\ 1 \leqslant r \leqslant n)$ прибегают к обобщенному правилу дифференцирования сложных функций в окрестности точки P_0:

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_r} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_r} \quad (i = 1,\dots,m;\ 1 \leqslant r \leqslant n).$$

Определитель, образованный из коэффициентов этой системы линейных уравнений относительно m неизвестных $\partial f_k/\partial x_r$ $(k = 1,\dots,m)$, есть якобиан

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)},$$

который, согласно условию теоремы, не равен нулю в окрестности точки P_0. В этой окрестности система линейных уравнений однозначно разрешима относительно $\partial f_k/\partial x_r$ $(k = 1,\dots,m)$.

3.1.6.5. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

I. Если f есть функция одного переменного, заданная уравнением $y = f(x)$, то при замене переменного $x = \varphi(t)$ зачастую необходимо выразить производные $\frac{d^n f}{dx^n}$ $(n = 1, 2, 3,\dots)$ через производные функций $f\circ\varphi$ и φ от t. Для первых трех производных по правилу дифференцирования сложной функции получаются следующие формулы (f и $f\circ\varphi$ сокращенно обозначены через y)*):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left[\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\varphi''(t)\frac{d^2y}{dt^2} + [3(\varphi''(t))^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t)]\frac{dy}{dt}\right\}.$$

Если заменить зависимое переменное y на u посредством формулы $y = \varphi(u)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u)\frac{du}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u)\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u)\frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u)\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3.$$

При замене x и y на t и u посредством уравнений $x = \varphi(t,\ u)$, $y = \psi(t,\ u)$ справедливы формулы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right] = \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\frac{d}{dt}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right]$$

Пример. Декартовы координаты x, y связаны с полярными координатами ρ, φ посредством формул

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

В этом частном случае получают

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^3},$$

где $\rho' = d\rho/d\varphi$, $\rho'' = d^2\rho/d\varphi^2$.

II. Если функция f двух переменных задана уравнением $\omega = f(x,\ y)$, то при замене переменных

$$x = \varphi(u,\ v), \qquad y = \psi(u,\ v)$$

частные производные $\partial\omega/\partial x$, $\partial\omega/\partial y$ и частные производные $\partial\omega/\partial u$, $\partial\omega/\partial v$ связаны друг с другом соотношениями

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

*) В последующих формулах все функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

откуда следует, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=C\frac{\partial\omega}{\partial u}+D\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

где A, B, C и D суть функции от u и v. Вторые частные производные вычисляются по тем же формулам, но применяемым не к ω, а к частным производным $\partial\omega/\partial x$ и $\partial\omega/\partial y$, например:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=$$

$$=A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Точно так же вычисляются производные высших порядков.

Пример. Выразить оператор Лапласа

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

в полярных координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi,$$

откуда следует:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right).$$

Аналогично вычисляют $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ и получают

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

Для функций более чем двух переменных можно получить аналогичные формулы замены переменных.

3.1.6.6. Экстремумы функций многих переменных. Пусть функция f определена в некоторой области $G\subset\mathbf{R}^n$ и P_0 – точка в G. Значение функции в этой точке $f(P_0)$ называется (локальным) *минимумом*, соответственно (локальным) *максимумом* функции f в G, если существует окрестность $U(P_0)\subset G$ точки P_0 такая, что для всех точек $P\in U(P_0)\setminus\{P_0\}$ имеет место неравенство $f(P)>f(P_0)$, соответственно $f(P)<f(P_0)$. Максимум или минимум функции f называется также (локальным) *экстремумом* функции f в G.

Значение локального экстремума функции f в точке P_0 является наименьшим или наибольшим значением функции в некоторой окрестности точки P_0, однако оно не совпадает, вообще говоря, с наименьшим или наибольшим значением функции в области G.

Пример. Функция $f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ имеет минимум в точке $(0, 0)$, равный $f(0, 0)=0$, который совпадает с наименьшим значением f в $\mathbf{R}^2$.

Необходимое условие существования экстремума. Если $f(P_0)$ – экстремум функции f, дифференцируемой по каждой из координат в некоторой окрестности $U(P_0)$ точки P_0, то выполняются равенства $f'_{x_i}(P_0)=0$ $(i=1,\dots,n)$.

Примеры. 1) Для функции $f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ имеют место равенства $f'_{x_1}(0, 0)=f'_{x_2}(0, 0)=0$.

2) Функция $f(x_1, x_2)=x_1x_2$, $D(f)=\mathbf{R}^2$, не имеет в точке $(0, 0)$ экстремума, несмотря на то что равенства $f'_{x_1}(0, 0)=f'_{x_2}(0, 0)=0$ выполняются.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в $G\subset D(f)\subset\mathbf{R}^n$ и в точке $P_0\in G$ выполняются равенства $f'_{x_i}(P_0)=0$ $(i=1,\dots,n)$. Если, кроме того, положительно (отрицательно) определена квадратичная форма*)

$$Q(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(P_0)z_iz_j,$$

то функция f имеет минимум (максимум) в точке P_0, а если форма $Q(z_1, \dots, z_n)$ неопределенная, то функция f не имеет экстремума в точке P_0.

Если $Q(z_1,\dots,z_n)$ не является ни неопределенной, ни определенной, то требуется дополнительное исследование, чтобы решить, является ли $f(P_0)$ экстремумом.

Частный случай $n=2$. Квадратичная форма $Q(z_1, z_2)$ положительно или отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$D(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0)\\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0)\end{vmatrix}>0.$$

Форма $Q(z_1, z_2)$ положительно (отрицательно) определена, если, кроме того, выполнено неравенство $f''_{x_1x_1}(P_0)>0$ $(f''_{x_1x_1}(P_0)<0)$. При $D(P_0)<0$ квадратичная форма $Q(z_1, z_2)$ – неопределенная. В случае $D(P_0)=0$ необходимо дополнительное исследование.

Пример. Для вычисления значения экстремума функции

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{2}x_1^2-4x_1x_2+9x_2^2+3x_1-14x_2+\frac{1}{2}$$

прежде всего находятся решения системы

$$f'_{x_1}(x_1, x_2)=x_1-4x_2+3=0,$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2)=-4x_1+18x_2-14=0.$$

Единственное решение этой линейной системы уравнений есть $(x_1^0, x_2^0)=(1, 1)$. Из того, что $f''_{x_1x_1}(1, 1)=1$, $f''_{x_2x_2}(1, 1)=18$, $f''_{x_1x_2}(1, 1)=-4$, следует, что $D(1, 1)=2>0$; в точке $(1, 1)$ функция f имеет экстремум и поскольку $f''_{x_1x_1}(1, 1)=1>0$, это минимум: $f(1, 1)=-5$.

---

*) Квадратичная форма $Q(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_iz_j$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для всех $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbf{R}^n\setminus\{0,\dots,0\}$ имеет место неравенство $Q(z_1,\dots,z_n)>0$ $(Q(z_1,\dots,z_n)<0)$. Если $Q(z_1,\dots,z_n)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $Q(z_1,\dots,z_n)$ называется *неопределенной* (см. также 2.4.4.5.3.3). Форма $Q(z_1,\dots,z_n)$ является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы (a_{ij}) являются положительными (отрицательными) (см. 2.4.4.5), или (*критерий Сильвестра*) тогда и только тогда, когда все *главные миноры* $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{k}$ $(k=1,\dots,n)$ положительны (имеют знак $(-1)^k$).

Нахождение условных экстремумов. В многочисленных задачах на экстремальные значения (нахождение экстремума некоторой функции) из естественных наук, техники и экономики множество точек, на котором ищут экстремум, подчинено определенным *условиям*, которые зачастую заданы в форме дополнительных уравнений.

Пример. Необходимо определить значение экстремума функции $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ при дополнительном условии $x_1 x_2 = 4$.

Общая *задача на поиск условного экстремума* может быть сформулирована следующим образом: найти все экстремумы и наибольшее и наименьшее значения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенной в области $G \subset \mathbf{R}^n$, для точек $P(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих *дополнительным условиям*

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — действительные функции, определенные в G.

Необходимые условия существования условного экстремума. Пусть функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывно дифференцируемы в G и ранг функциональной матрицы $(\partial\varphi_i/\partial x_k)$ равен m. Положим

$$L = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$$

(функция L называется *функцией Лагранжа* с множителями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — произвольные действительные числа). Если f в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ при дополнительных условиях

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

имеет экстремум, то справедливы соотношения:

а) $$L'_{x_i}(P_0) = f'_{x_i}(P_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial\varphi_k(P_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

б) $$L'_{\lambda_k}(P_0) = \varphi_k(P_0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Таким образом, необходимыми условиями существования условного экстремума функции f в точке P при дополнительных условиях $\varphi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ являются следующие $n + m$ уравнений:

$$L'_{x_i}(P) = f'_{x_i}(P) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial\varphi_k(P)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$L'_{\lambda_k}(P) = \varphi_k(P) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Пример. Среди всех прямоугольников с постоянным периметром надо найти наибольший по площади. Пусть x, y — длины сторон прямоугольника, тогда $F(x, y) = xy$ — его площадь. Дополнительное условие: $\varphi(x, y) = x + y - u/2 = 0$.

Система

$$L'_x(x, y) = F'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = y + \lambda = 0,$$

$$L'_y(x, y) = F'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = x + \lambda = 0,$$

$$L'_\lambda(x, y) = \varphi(x, y) = x + y - u/2 = 0$$

имеет единственное решение $x_0 = y_0 = -\lambda_0 = u/4$. Легко заметить, что F в точке (x_0, y_0) имеет локальный максимум, который совпадает с наибольшим значением F при выполнении указанных выше условий.

Два примера задач на экстремумы.

1. *Метод наименьших квадратов.* Пусть в плоскости xOy заданы $N + 1$ точек (x_i, m_i) $(i = 0, 1, \ldots, N)$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Нужно найти функцию $y = f(x, a_0, \ldots, a_{n-1})$, зависящую от x и от n параметров $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ $(n < N)$, график

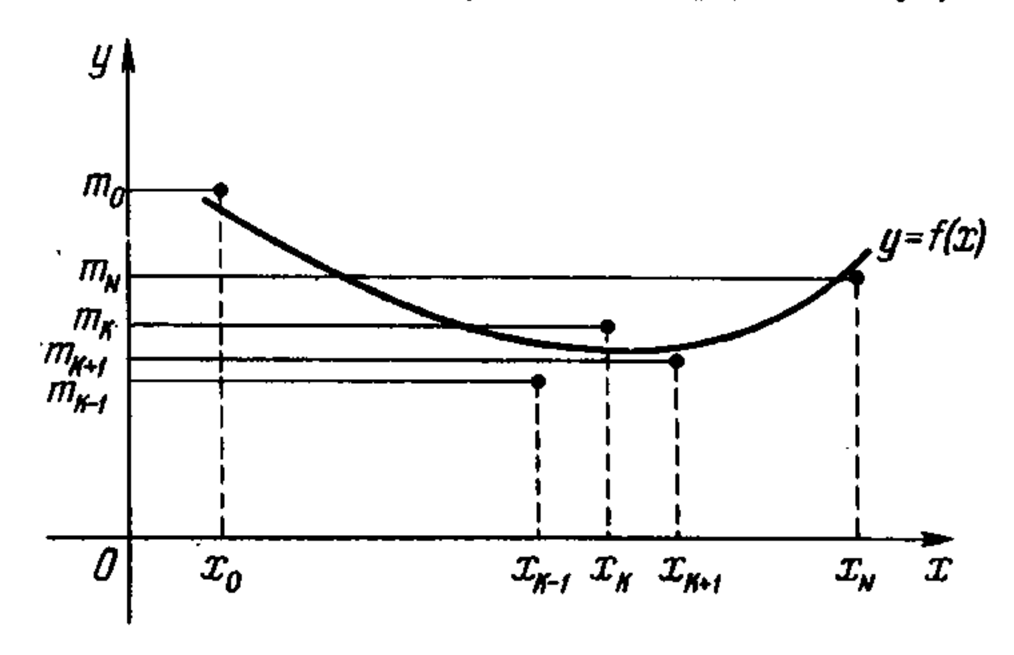


Рис. 3.11

которой как можно лучше приближается к указанным точкам (рис. 3.11). Согласно методу наименьших квадратов, эти параметры выбираются так, чтобы величина

$$Q(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{i=0}^{N} [f(x_i, a_0, \ldots, a_{n-1}) - m_i]^2$$

была наименьшей. Если для величины Q воспользоваться теорией экстремумов, то при соответствующих предположениях о дифференцируемости f получаются необходимые условия для определения параметров $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$: $\partial Q/\partial a_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Эти уравнения называются *нормальными уравнениями*.

Если, в частности, выбрать в качестве f многочлен относительно x: $f(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, то с учетом того, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k - m_i \right) x_i^j,$$

в качестве системы нормальных уравнений получим следующие n линейных уравнений (ср. 2.4.4.3):

$$[x^{n-1}]a_{n-1} + [x^{n-2}]a_{n-2} + \ldots + (N+1)a_0 = [m],$$

$$[x^n]a_{n-1} + [x^{n-1}]a_{n-2} + \ldots + [x]a_0 = [mx],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[x^{2n-2}]a_{n-1} + [x^{2n-3}]a_{n-2} + \ldots + [x^{n-1}]a_0 = [mx^{n-1}];$$

для краткости здесь использованы символы Гаусса

$$[x^k] = \sum_{i=0}^{N} x_i^k \qquad (k = 1, \ldots, 2n-2),$$

$$[mx^k] = \sum_{i=0}^{N} m_i x_i^k \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

2. *Определение оптимального местоположения.* Для N заданных местоположений, изображенных на рис. 3.12 точками $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$, необходимо определить такое местоположение (такую точку $P_0(x_0, y_0)$), сумма расстояний от которого до всех остальных наименьшая. Следовательно, для P_0 должен достигаться минимум функции

$$z(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{N} ((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)^{1/2}.$$

Необходимые условия даются системой двух нелинейных уравнений $z'_{x_0} = 0$ и $z'_{y_0} = 0$, где

$$z'_{x_0} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{x_0 - x_k}{((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)^{1/2}},$$

$$z'_{y_0} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{y_0 - y_k}{((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)^{1/2}}.$$

Решение этой нелинейной системы уравнений является, вообще говоря, сложной задачей.

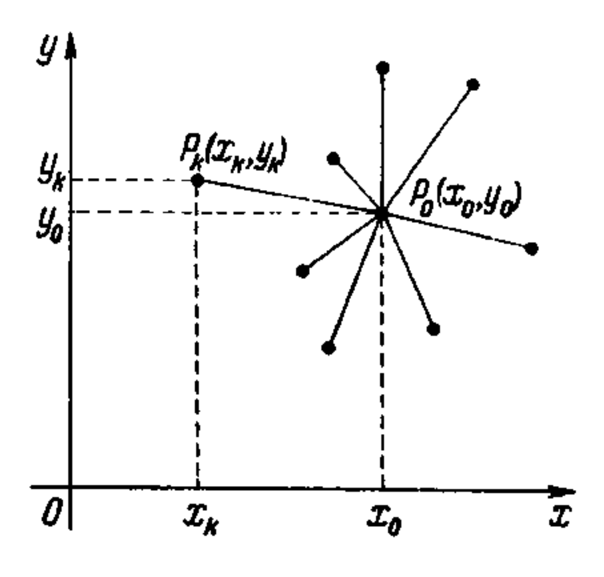


Рис. 3.12

Если выбрать в качестве нулевого приближения

$$x_0^{(0)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \quad y_0^{(0)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k,$$

то при помощи интерационных формул получим

$$x_0^{(k+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}},$$

$$y_0^{(k+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{((x_0^{(k)} - x_i)^2 + (y_0^{(k)} - y_i)^2)^{1/2}}} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

3.1.7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1.7.1. Определенные интегралы. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Произведем разбиение Z отрезка $[a, b]$ на «элементарные отрезки» введением точек x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим через $\Delta(Z)$ длину наибольшего элементарного отрезка разбиения Z, т. е. $\Delta(Z) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$. В каждом элементарном отрезке выберем произвольное число ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ (рис. 3.13). Число

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется *интегральной суммой* относительно разбиения Z.

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$ в смысле Римана, если существует

ξ_1 ξ_2 $\xi_3 \ldots \xi_{n-1}$ ξ_n x
$a = x_0$ x_1 x_2 $x_3 \ldots x_{n-1}$ $x_n = b$

Рис. 3.13

число I со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении Z, для которого $\Delta(Z) < \delta$, выполняется неравенство $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$ независимо от выбора ξ_i. Число I называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx;$$

x называется *переменным интегрирования*, a и b — соответственно *нижним* и *верхним пределами* интегрирования.

Этому определению равносильно следующее: $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, если для всякой последовательности Z_n разбиений, для которых $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta(Z_n) = 0$, последовательность $\sigma(Z_n)$ соответствующих интегральных сумм независимо от выбора внутренних точек ξ_k всегда сходится (она сходится в таком случае к одному и тому же предельному значению, которое и есть интеграл).

Если интегрируемость $f(x)$ уже известна, то достаточно найти предел последовательности $\sigma(Z_n)$ для какой-нибудь последовательности разбиений Z_n, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta(Z_n) = 0$.

Верхние и нижние суммы Дарбу. Пусть M_i и m_i — соответственно верхняя и нижняя грани $f(x)$ в элементарном интервале $[x_{i-1}, x_i]$ для разбиения Z отрезка $[a, b]$. Числа $S(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ и $s(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ называются соответственно *верхней* и *нижней суммами* разбиения Z.

Критерий интегрируемости Римана. Функция $f(x)$, определенная и ограниченная на $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения Z, где $\Delta(Z) < \delta$, выполняется неравенство $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$.

Классы функций, для которых интеграл Римана всегда существует:

а) функции, непрерывные на $[a, b]$;

б) функции, ограниченные на $[a, b]$ и имеющие конечное число разрывов;

в) ограниченные и монотонные на $[a, b]$ функции.

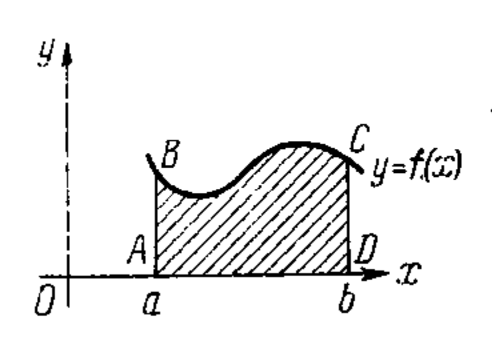


Рис. 3.14

Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой площадь области, ограниченной осью x, графиком $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 3.14).

Если $f(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$, то площадь соответствующей фигуры равна $-\int_a^b f(x)\,dx$.

3.1.7.2. Свойства определенных интегралов.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2. Перестановка пределов интегрирования: если существует $\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$, то существует

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$, то существует также $\int_a^b f(x)\,dx$ и для любого взаимного расположения точек a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Если существует $\int_a^b f(x)\,dx$, то для любой постоянной α

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

5. Если существуют интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$, то существует также

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$$

и

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

6. Если всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и существуют $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

7. Если существует $\int_a^b f(x)\,dx$, то существует также $\int_a^b |f(x)|\,dx$, и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8. *Первая теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то существует число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует число ξ, $a < \xi < b$, такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

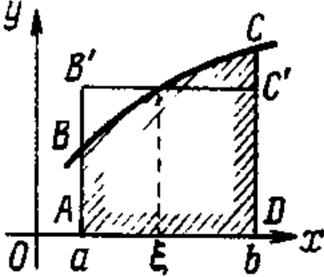


Рис. 3.15

Геометрическая интерпретация; между a и b существует такое ξ, что площадь фигуры $ABCD$ равна площади прямоугольника $AB'C'D$ (рис. 3.15).

9. *Обобщенная первая теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и либо всегда $g(x) \geqslant 0$, либо всегда $g(x) \leqslant 0$, то $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и существует число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна, то существует такое число ξ, $a < \xi < b$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

10. *Вторая теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ монотонна и ограничена, а $g(x)$ интегрируема, то на $[a, b]$ существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

11. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

на отрезке $[a, b]$ непрерывна, а если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то функция $F(x)$ имеет на $[a, b]$ производную, причем $F'(x) = f(x)$.

12. *Интегрирование посредством разложения в ряд.* Если функции $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) интегрируемы на $[a, b]$, а бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно (см. 3.1.14.4) на $[a, b]$, то сумма ряда $f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right).$$

О вычислении определенных интегралов и дальнейших свойствах см. 3.1.7.4 и 3.1.7.7.

3.1.7.3. Неопределенные интегралы. *Первообразная функция.* Функция $F(x)$, дифференцируемая

в некотором интервале (a, b), называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ в этом интервале, если для каждого $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Примеры. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$; $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$ $(x \neq 0)$.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции для $f(x)$ на одном и том же отрезке, то они различаются на аддитивную постоянную: $F_2(x) = F_1(x) + C$, т. е. графики всех первообразных функций образуются из одного из них сдвигом по оси y (рис. 3.16).

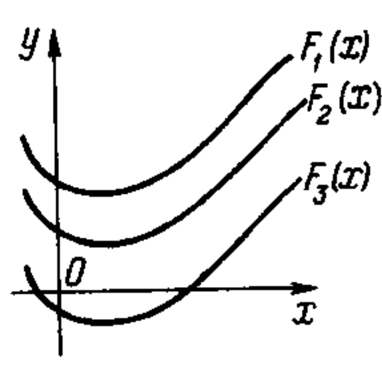


Рис. 3.16

Пример. Функции $F_1(x) = -\arccos x$ и $F_2(x) = \arcsin x$ имеют для $x \in (-1, 1)$ одинаковую производную $1/\sqrt{1-x^2}$ и, следовательно, являются первообразными функциями для $1/\sqrt{1-x^2}$, поэтому

$$\arcsin x = -\arccos x + C;$$

так как $\arcsin 0 = 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, то $C = \pi/2$ и, следовательно,

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором интервале называют множество всех первообразных функций функции $f(x)$ на этом интервале; обозначение:

$$\int f(x)\,dx.$$

Если $F(x)$ какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Поэтому примеры, приведенные в начале пункта, можно записать так:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (x \in (-1, 1));$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0).$$

Вычисление неопределенных интегралов при помощи соответствующих правил интегрирования стараются свести именно к *табличным* интегралам. Зачастую, однако, неопределенный интеграл от некоторой элементарной функции невозможно выразить через элементарные функции (представить в *замкнутой форме*). Это происходит уже при интегрировании таких простых функций, как

$$e^{-x^2},\ \sin x/x,\ \cos x/x,\ 1/\ln x.$$

Для того чтобы проинтегрировать подобную функцию, можно произвести разложение подынтегральной функции в ряд и использовать свойство 12 и 3.1.7.2.

Пример. $e^{-x^2} = 1 - x^2 + x^4/2! - x^6/3! + \dots$

Этот степенной ряд сходится равномерно на всяком ограниченном интервале, поэтому может быть почленно проинтегрирован:

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Тем самым находится представление интеграла в виде хорошо сходящегося степенного ряда.

Интеграл может быть приближенно вычислен разными способами (см. 7.1.2.7).

Не представимые в замкнутой форме (т. е. не являющиеся элементарными функциями), но важные для практики интегралы затабулированы, например:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}(x) \text{ (интегральный логарифм)},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$ (*эллиптический интеграл 1-го рода* (см. 1.1.2.4)).

Таблица основных интегралов. Постоянная интегрирования опущена; указания об интервале определения сделаны только тогда, когда речь идет не об интервале $(-\infty, \infty)$.

Степенные функции

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1;\ x \neq 0, \text{ если } n < 0)$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1 \text{ — действительное, } x > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0)$$

Показательные функции

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1)$$

Тригонометрические функции

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \ln|\sin x| \quad (x \neq k\pi)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x \quad (x \neq k\pi)$$

Гиперболические функции

$$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x$$

$$\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x$$

$$\int \mathrm{th}\,x\,dx = \ln \mathrm{ch}\,x$$

$$\int \mathrm{cth}\,x\,dx = \ln|\mathrm{sh}\,x| \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x \quad (x \neq 0)$$

Дробно-рациональные функции ($a \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} & (|x| < a), \\ \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} & (|x| > a). \\ \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

Иррациональные функции ($a \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (|x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arsh}(x/a), \\ \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arch}(x/a), \\ \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| & (|x| > a) \end{cases}$$

Выражение определенного интеграла через неопределенный *(основная теорема дифференциального и интегрального исчислений, теорема Ньютона — Лейбница).* Если для функции $f(x)$, интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, существует непрерывная функция $F(x)$ на $[a, b]$, являющаяся первообразной функцией для $f(x)$ на $[a, b]$ (в частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$), то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно вычислить по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

для записи правой части используются символы: $[F(x)]_a^b$ или $F(x)|_a^b$.

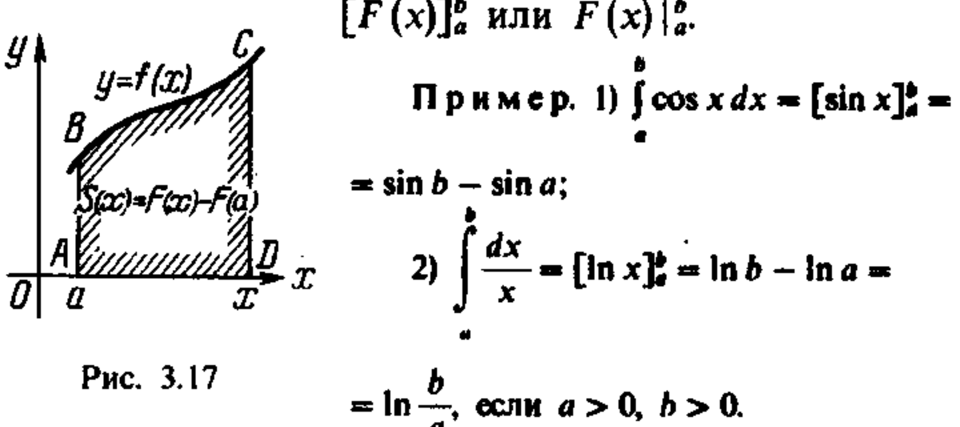


Рис. 3.17

Пример. 1) $\int\limits_a^b \cos x\,dx = [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a;$

2) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$, если $a > 0$, $b > 0$.

Геометрическая интерпретация первообразной функции. Если $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной неотрицательной функцией $f(x)$, прямыми, проходящими через $(a, 0)$ и $(x, 0)$ и параллельными оси y, и осью x (рис. 3.17), то

$$S(x) = F(x) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная функция для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3.1.7.4. Свойства неопределенных интегралов.

1. *Аддитивность* неопределенного интеграла:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

2. *Постоянный множитель* α можно выносить за знак интеграла:

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$$

3. Если $F(u)$ — первообразная функция для $f(u)$ в интервале I, то для произвольных постоянных a, b ($a \neq 0$)

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

причем x лежит в интервале, для которого $u = ax + b \in I$.

Пример. $\int \frac{dx}{2x + 3} = \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C$, $x \neq -\frac{3}{2}$.

4. Если $f(x)$ имеет в некотором интервале непрерывную производную и $f(x) \neq 0$, то $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

Пример. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x) + C$.

5. *Интегрирование по частям.* Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некотором интервале I непрерывные производные, то

$$\int u(x) v'(x)\,dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x)\,dx.$$

Примеры. 1) $\int x \sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx = -x \cos x + \sin x + C$.

2) $\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x \ln x - x + C$ (определено в любом интервале, где $x > 0$).

Интегрирование по частям определенных интегралов. Если функции u и v имеют на $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int\limits_a^b u(x) v'(x)\,dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x) v(x)\,dx.$$

6. *Интегрирование подстановкой (заменой переменного).* Если функция $f(z)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, функция $z = g(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и $\alpha \leqslant g(x) \leqslant \beta$, то

$$\int f(g(x)) g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz,$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку $z = g(x)$.

Пример. $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int z^3\,dz = \frac{1}{4} z^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$.

Зачастую этой формулой пользуются справа налево; для того чтобы определить $\int f(z)\,dz$, вводят функцию $z = g(x)$ и вычисляют $\int f(g(x)) g'(x)\,dx$; после этого при помощи обратной функции $x = h(z)$ нужно вернуться к исходному переменному x (обратная функция $x = h(z)$ существует, если $g'(x) \neq 0$ на $[a, b]$).

Примеры. 1) $\int \frac{dz}{(\sqrt{1 + z^2})^3}$; подстановка $z = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; значит, $z' = g'(x) = 1/\cos^2 z \neq 0$ и $x = \operatorname{arctg} z$. Тогда

$$\int \frac{dz}{(\sqrt{1 + z^2})^3} = \int \frac{1}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x})^3} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \cos x\,dx = \sin x + C = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} + C = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} + C.$$

2) $\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz$; делаем замену $z = a\cos x$, $x\in(0,\pi)$, так что $g'(x) = -a\sin x \neq 0$ и $x = \arccos(z/a)$; тогда

$$\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz = \int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 x}\,(-a\sin x)\,dx = -a^2\int\sin^2 x\,dx.$$

Далее, так как $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, то

$$\int\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C,$$

но $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-z^2}$, и после введения обратной функции получим, что

$$\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{z}{a} + \frac{z}{2}\sqrt{a^2-z^2} + C.$$

Правило подстановки (замена переменного) для определенных интегралов. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, а функция g строго монотонна, имеет на $[a, b]$ непрерывную производную и $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, то справедливы следующие равенства ($z = g(x)$; обратная функция $x = h(z)$):

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz,$$

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(g(x))g'(x)\,dx.$$

В отличие от правила подстановки для неопределенных интегралов, согласно которому необходимо вернуться к исходному переменному, здесь при подстановке нужно сразу изменить пределы интегрирования.

Пример. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz$; подстановка $z = a\cos x$ ($\pi \geqslant x \geqslant 0$ для $-a \leqslant z \leqslant a$) дает

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz = -a^2\int_\pi^0\sin^2 x\,dx = +\frac{1}{2}a^2\int_0^\pi(1-\cos 2x)\,dx =$$
$$= +\frac{1}{2}a^2\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}a^2\pi.$$

Можно прежде вычислить неопределенный интеграл (см. приведенный выше пример):

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz = \left[-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{z}{a} + \frac{z}{a}\sqrt{a^2-z^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2}a^2\pi.$$

3.1.7.5. Интегрирование рациональных функций. *Дробно-рациональная функция* $R(x)$ – отношение двух многочленов $Q(x)$ и $P(x)$, не имеющих общих множителей:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях. Их интегралы являются линейной комбинацией следующих функций: рациональных функций, логарифма линейных двучленов, логарифма квадратичных трехчленов, арктангенса линейных двучленов.

Если степень $Q(x)$ больше или равна степени $P(x)$, то прежде всего делением $Q(x)$ на $P(x)$ выделяют целую часть. Тогда получают сумму, состоящую из многочлена и правильной рациональной функции $R(x) = f(x) + \frac{Q_1(x)}{P(x)}$, причем степень $Q_1(x)$ меньше степени $P(x)$ и многочлены $Q_1(x)$ и $P(x)$ не имеют общих множителей.

Пример. $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$.

Многочлен $f(x)$ можно сразу же проинтегрировать: если

$$f(x) = c_0x^{m-n} + \ldots + c_{m-n},$$

то

$$\int f(x)\,dx = \frac{c_0}{m-n+1}x^{m-n+1} + \ldots + c_{m-n}x + C.$$

Если деление выполнено, то производится разложение дробно-рациональной функции $\frac{Q_1(x)}{P(x)}$ на простейшие дроби, т. е. $\frac{Q_1(x)}{P(x)}$ раскладывается на сумму дробей, которые затем легко проинтегрировать. Это разложение на простейшие дроби тесно связано с разложением знаменателя $P(x)$ на множители. Делением числителя $Q_1(x)$ и знаменателя $P(x)$ на a_0 можно всегда достичь того, чтобы коэффициент при старшем члене многочлена $P(x)$ был равен 1. По основной теореме алгебры (см. 2.5.1.1.2) имеем

$$P(x) = (x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

где a_ν ($\nu = 1,\ldots,r$) – действительные нули кратности k_ν многочлена $P(x)$, в то время как квадратные трехчлены не имеют действительных нулей, т. е. $p_\mu^2 - 4q_\mu < 0$, $\mu = 1,\ldots,s$. Получение такого представления в виде сомножителей и является, собственно, главной проблемой при интегрировании конкретной дробно-рациональной функции. Далее, каждому из сомножителей $P(x)$ соответствует некоторое число простейших дробей (2.5.1.2.5), а именно каждому сомножителю вида $(x-a)^k$ соответствует сумма простейших дробей

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

и каждому сомножителю вида $(x^2+px+q)^l$ соответствует сумма простейших дробей вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Постоянные A_j, B_j, C_j рассматриваются сначала как неизвестные.

Пример. $R(x) = \frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1}$.

Разложение знаменателя дает

$$P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)^2.$$

Таким образом,

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Для определения коэффициентов A, B, C, D, E, F левую и правую части умножаем на знаменатель $P(x)$ и отбрасываем его.

В вышеприведенном примере после умножения на знаменатель $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$ имеем

$$x + 2 = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 +$$
$$+ (Cx+D)(x-1)(x+1)(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)(x+1).$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x в многочленах, стоящих слева и справа (от x^5 до x^0),

дает систему уравнений

$$\begin{aligned}
x^5:&\quad 0 = A + B + C,\\
x^4:&\quad 0 = A - B + D,\\
x^3:&\quad 0 = 2A + 2B + E,\\
x^2:&\quad 0 = 2A - 2B + F,\\
x^1:&\quad 1 = A + B - C - E,\\
x^0:&\quad 2 = A - B - D - F,
\end{aligned}$$

откуда $A = \frac{3}{8}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{2}$, $E = -\frac{1}{2}$, $F = -1$.

Таким образом, имеет место разложение

$$\frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1} = \frac{1}{8}\left[\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x+4}{x^2+1} - \frac{4x+8}{(x^2+1)^2}\right].$$

Интегрирование простейших (элементарных) дробей. После того, как разложение на простейшие дроби осуществлено, достаточно проинтегрировать полученные дроби. Дроби, знаменатель которых имеет a своим действительным корнем, интегрируются по формулам

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^\nu} = -\frac{A}{\nu-1}\frac{1}{(x-a)^{\nu-1}} + C \quad (\nu \neq 1).$$

Интеграл от дроби $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\nu}$ при $p^2-4q < 0$, т. е. когда знаменатель имеет комплексно-сопряженные корни, преобразованием числителя при $\nu > 1$ приводится к виду

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\nu}dx = \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^\nu} + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu} =$$

$$= -\frac{B}{2(\nu-1)(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}.$$

При $\nu = 1$ после аналогичного преобразования получим

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Вычисление интегралов вида

$$I_\nu = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}$$

производится по *рекуррентной формуле*

$$I_\nu = \frac{1}{(\nu-1)(4q-p^2)}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \frac{2(2\nu-3)}{(\nu-1)(4q-p^2)}I_{\nu-1},$$

которая позволяет свести вычисление интеграла I_ν после $\nu - 1$ шагов к вычислению интеграла $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

Значение последнего интеграла равно

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Таким образом, интегрирование простейшей дроби $-\frac{x+2}{2(x^2+1)^2}$ дает

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

и по рекуррентной формуле

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1,$$

где $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

В итоге получаем

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x+2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = -\frac{2x-1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Дальнейшие примеры. 1. $\int \frac{x^4}{(x^2-1)^2}dx$; так как степень многочлена в числителе равна степени многочлена в знаменателе, то, прежде чем приступить к разложению на простейшие дроби, нужно произвести выделение целой части. Имеем

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-1}{(x^2-1)^2}.$$

Далее,

$$\frac{2x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$

Умножение на общий знаменатель дает

$$2x^2 - 1 = A(x+1)^2(x-1) + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2.$$

Значения некоторых коэффициентов (здесь B и D) часто можно получить быстрее, чем методом приравнивания коэффициентов,— *подстановкой нулей знаменателя.* Если подставить в уравнение $x = 1$, то получим, что $2 - 1 = 4B$, т. е. $B = 1/4$. Если подставить $x = -1$, то получается $2 - 1 = 4D$; следовательно, $D = 1/4$. Приравнивая коэффициенты при x^3 и x^0, получаем уравнения $0 = A + C$ и $-1 = -A + B + C + D$; следовательно, $A = 3/4$, $C = -3/4$.

Итак, получаем

$$\int \frac{x^4}{(x^2-1)^2}dx = x + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C = \frac{2x^3-3x}{2(x^2-1)} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x^4+1}$; у знаменателя нет вещественных нулей; разложение на квадратичные множители дает $x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}+1)$, а разложение на простейшие дроби —

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Приравниванием коэффициентов находим $B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C_2 = \frac{1}{2}$; следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx.$$

Применяя соответствующие формулы для интегрирования простейших дробей $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, получаем, что

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C_1=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+C_1,$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+C_2=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C_2;$$

следовательно, в итоге получаем

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C\qquad(C=C_1+C_2).$$

Таблицы интегралов рациональных функций см. в 1.1.3.3.

3.1.7.6. Интегрирование других классов функций. В дальнейшем $R(u, v, w,\ldots)$ означает рациональную функцию от аргументов $u, v, w,\ldots$

Приводимые ниже интегралы подходящей подстановкой могут быть сведены к интегралам от рациональных функций.

3.1.7.6.1. Интегрирование иррациональных функций.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$; в результате замены переменного $t=\sqrt[n]{ax+b}$, т. е. $x=\frac{1}{a}(t^n-b)$, $dx=\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt$, получаем

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt,$$

т. е. интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=2\int\frac{t+2}{t^3-1}dt$, где $t=\sqrt{x+1}$.

2. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $(ad-bc\neq 0)$; подстановка $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, т. е. $x=\frac{t^nd-b}{a-ct^n}$, $dx=n(ad-bc)\frac{t^{n-1}\,dt}{(a-ct^n)^2}$, приводит к интегралу от рациональной функции.

3. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots\right)dx$; подстановка $t=\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где r — наименьшее общее кратное чисел $n, m,\ldots$, дает в итоге интеграл от рациональной функции.

4. *Теорема Чебышева.* Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ (a, b — произвольные постоянные, m, n, p — рациональные числа) — интеграл от дифференциального бинома — может быть выражен в элементарных функциях только тогда, когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

а) p — целое; подстановка $t=\sqrt[r]{x}$, где r — наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n, приводит к интегралу от рациональной функции.

б) $\frac{m+1}{n}$ — целое; подстановкой $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$, где r — знаменатель дроби p, получаем интеграл от рациональной функции.

в) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое; при помощи подстановки $t=\sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где r — знаменатель дроби p, получаем интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx$; итак, $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$, $(m+1)/n=2$ — целое.

Подстановка $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt$, приводит к

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int(t^6-t^3)\,dt=$$

$$=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C=\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})(4\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

5. $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx$ $(a\neq 0)$.

Эти интегралы можно свести к интегралам от рациональных функций, от тригонометрических или гиперболических функций (они рассматриваются в 3.1.7.6.2). Преобразуем выражение

$$ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}(ax+b)^2+\frac{ac-b^2}{a}$$

и рассмотрим три возможных случая:

а) $ac-b^2>0$; тогда интересен лишь случай $a>0$, так как при $a<0$ всегда $ax^2+2bx+c<0$. Заменой переменного $t=\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$ получаем, что $ax^2+2bx+c=\frac{ac-b^2}{a}(t^2+1)$, откуда следует, что

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\times$$

$$\times\int R\left(\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}t-\frac{b}{a}, \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\sqrt{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\int R_1(t, \sqrt{t^2+1})\,dt.$$

Дальнейшая подстановка, а именно $t=\operatorname{sh}u$ (можно применять и подстановку $t=\operatorname{tg}u$), приводит к интегралу от рациональной функции от

функций $\operatorname{sh} u$ и $\operatorname{ch} u$:

$$\int R_1(t, \sqrt{t^2+1})\,dt = \int R_1(\operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u)\operatorname{ch} u\,du.$$

б) $ac - b^2 = 0$; тогда в подынтегральном выражении содержится полный квадрат, и, извлекая квадратный корень, получаем интеграл от рациональной функции.

в) $ac - b^2 < 0$; подстановкой $t = \dfrac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$ получаем, что $\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a}}\sqrt{t^2-1}$ при $a > 0$ и $\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{\dfrac{b^2-ac}{-a}}\sqrt{1-t^2}$ при $a < 0$.

В результате приходим к интегралу вида $\int R_1(t, \sqrt{t^2-1})\,dt$, если $a > 0$, и $\int R_1(t, \sqrt{1-t^2})\,dt$, если $a < 0$. В первом случае используют подстановку $t = \operatorname{ch} u$ (или $t = \sec u$), во втором случае $t = \cos u$ (или $t = \sin u$); получают соответственно

$$\int R_1(\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u)\operatorname{sh} u\,du, \quad \int R_1(\cos u, \sin u)\sin u\,du.$$

Пример. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$; $ac - b^2 = -1 < 0$ (случай в)). Делаем замену переменного $t = x - 1$; следовательно, $x = t + 1$, $dx = dt$. Тогда (при $t = \operatorname{ch} u$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} u}du = u + C = \operatorname{arch} t + C =$$
$$= \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + C = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2-2x}) + C.$$

Одной из трех *подстановок Эйлера* интегралы рассматриваемого вида можно также сразу свести к интегралам от рациональных функций:

а) если $a > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \begin{cases} t - \sqrt{a}\,x, \\ t + \sqrt{a}\,x; \end{cases}$$

б) если $c > 0$, то делают замену

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \begin{cases} xt + \sqrt{c}, \\ xt - \sqrt{c}; \end{cases}$$

в) если $ax^2 + 2bx + c$ имеет два разных действительных корня α и β, то делают замену $\sqrt{ax^2+2bx+c} = t(x-\alpha)$.

6. Интегралы специального вида $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, можно свести к более простому интегралу $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. Полагают

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}dx =$$
$$= P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+2bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}, \quad (*)$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, коэффициенты которого еще не определены. Для нахождения коэффициентов этого многочлена и числа A дифференцируют левую и правую части равенства (*), полученный результат умножают на $\sqrt{ax^2+2bx+c}$, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов слева и справа.

Пример. $I = \displaystyle\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{\sqrt{x^2-2x}}dx$.

Применяя описанный способ, получаем, что

$$I = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2-2x} + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Дифференцируя обе части, имеем

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{\sqrt{x^2-2x}} =$$
$$= (2ax+b)\sqrt{x^2-2x} + (ax^2+bx+c)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} + \frac{A}{\sqrt{x^2-2x}},$$

откуда после умножения на $\sqrt{x^2-2x}$ и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях x следует: $a = 1$, $b = -3/2$, $c = -1/2$, $A = -1/2$. Таким образом,

$$\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{\sqrt{x^2-2x}}dx =$$
$$= \left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2-2x}) + C$$

(см. предыдущий пример).

7. *Эллиптические интегралы.* Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + e})\,dx,$$
$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f})\,dx,$$

как правило, не выражаются через элементарные функции; тогда они называются *эллиптическими* интегралами. В результате ряда преобразований можно каждый такой интеграл свести к элементарным функциям и к *эллиптическим интегралам первого, второго* или *третьего рода:*

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \int \frac{(1-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$
$$\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0 < k < 1).$$

Если сделать подстановку $t = \sin\psi$ $(0 < \psi < \pi/2)$, то получим соответственно

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$
$$\int \frac{d\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода в лежандровой форме. Соответствующие определенные интегралы обозначаются по Лежандру $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $\Pi(h, k, \varphi)$:

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k, \varphi),$$
$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = E(k, \varphi),$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + h\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = \Pi(h, k, \varphi).$$

Эти функции, кроме переменного φ, содержат еще параметр k или параметры h и k; они затабулированы (см. 1.1.2.4).

3.1.7.6.2. Интегрирование трансцендентных функций.

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$. Делаем замену переменного, полагая $t = \operatorname{tg}(x/2)$ $(-\pi < x < \pi)$, а следовательно, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Тогда

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

откуда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

т. е. в итоге получаем интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx = \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt =$

$$= \int \frac{1+t^2+2t}{t^2(1+t^2)}dt = \int\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{t} - \ln(1+t^2) + C =$$

$$= \ln\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{t} + C = \ln\sin^2\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C.$$

В частных случаях можно применять и более простые подстановки: если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \cos x$ приводит к интегралу от рациональной функции; если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \sin x$ дает интеграл от рациональной функции; если, наконец, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановкой $t = \operatorname{tg} x$ получают интеграл от рациональной функции.

Примеры. 1) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$. При помощи подстановки $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ получают

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\int\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$. Здесь подстановка $t = \operatorname{tg} x$ $\left(\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\right)$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ дает

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{(1+t^2)}{(a^2+b^2t^2)}\frac{dt}{(1+t^2)} =$$

$$= \int\frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}t\right) + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

3) $\int \sin^n x\,dx$. Если $n = 2m+1$, то полагаем $t = \cos x$;

$$\int \sin^{2m+1} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^m \sin x\,dx = -\int (1-t^2)^m\,dt =$$

$$= -\cos x + C_m^1\frac{\cos^3 x}{3} - \ldots + (-1)^{m+1}C_m^m\frac{\cos^{2m+1}x}{2m+1} + C.$$

В частности,

$$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Если $n = 2m$, то по *формуле Муавра* получаем

$$\sin^{2m} x = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\Big[\cos 2mx - C_{2m}^1\cos 2(m-1)x + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\cos 2x + (-1)^m\frac{1}{2}C_{2m}^m\Big].$$

Следовательно,

$$\int \sin^{2m} x\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\Big[\frac{1}{m}\sin 2mx - \frac{1}{m-1}C_{2m}^1\sin 2(m-1)x + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\sin 2x + (-1)^m C_{2m}^m x\Big] + C.$$

4) $\int \cos^n x\,dx$. Если $n = 2m+1$, то полагаем $t = \sin x$;

$$\int \cos^{2m+1} x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^m\cos x\,dx = \int (1-t^2)^m dt =$$

$$= \sin x - C_m^1\frac{\sin^3 x}{3} + \ldots + (-1)^m C_m^m\frac{\sin^{2m+1}x}{2m+1} + C.$$

Если $n = 2m$, то по *формуле Муавра* получаем

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m-1}}\Big[\cos 2mx + C_{2m}^1\cos 2(m-1)x + \ldots$$

$$\ldots + C_{2m}^{m-1}\cos 2x + \frac{1}{2}C_{2m}^m\Big].$$

Следовательно,

$$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}}\Big[\frac{1}{m}\sin 2mx + \frac{1}{m-1}C_{2m}^1\sin 2(m-1)x + \ldots$$

$$\ldots + C_{2m}^{m-1}\sin 2x + C_{2m}^m x\Big] + C.$$

В частности,

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\sin 4x + 4\sin 2x + 6x\right) + C.$$

5) $\int \sin^n x\cos^m x\,dx$. Если n (или m) нечетно, то подстановка $t = \cos x$ (или $t = \sin x$) приводит к интегралу от рациональной функции. Например,

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int t^2(1-t^2)\,dt,$$

$$t = \sin x.$$

Если оба показателя степени четны (или нечетны), то подстановка $t = \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу от рациональной функции. Если, в частности, n и m положительные, то можно использовать преобразования

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2},\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Например,

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

6) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx.$$

7) $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx.$

2. $\int R(e^{mx}, e^{nx}, \ldots, e^{px})\,dx$ ($m, n, \ldots, p$ – рациональные числа). В результате подстановки $t = e^x$ получают интегралы вида $\int \frac{1}{t} R(t^m, t^n, \ldots, t^p)\,dt$. Если r – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m, n, \ldots, p$, то подстановкой $u = \sqrt[r]{t}$ получают интеграл от рациональной функции.

3. $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$. Эти интегралы можно вычислить, заменив гиперболические функции на показательные.

Случаи $\int \operatorname{sh}^n x\,dx$, $\int \operatorname{ch}^n x\,dx$, $\int \operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x\,dx$ рассматриваются аналогично соответствующим интегралам от тригонометрических функций.

Пример. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{1}{t}\frac{dt}{t + 1/t} =$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} e^x + C.$$

Интегралы вида

4. $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$, 5. $\int P(x)\sin(\alpha x + \beta)\,dx$,

6. $\int P(x)\cos(\alpha x + \beta)\,dx$,

7. $\int P(x)e^{\alpha x}\sin(\alpha x + \beta)\,dx$,

8. $\int P(x)e^{\alpha x}\cos(\alpha x + \beta)\,dx$,

где $P(x)$ – многочлен от x, можно вычислить, применив один или более раз формулу интегрирования по частям.

Примеры. 1) Посредством однократного интегрирования по частям

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{a}P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{\alpha x}\,dx$$

получают интеграл от функции с многочленом, степень которого на единицу ниже, так что в результате n интегрирований по частям можно вычислить исходный интеграл.

2) В случае интеграла $\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx$ однократное интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{-1}{\alpha}e^{ax}\cos(\alpha x + \beta) + \frac{a}{\alpha}\int e^{ax}\cos(\alpha x + \beta)\,dx;$$

интегрируя по частям второе слагаемое:

$$\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = -\frac{1}{\alpha}e^{ax}\cos(\alpha x + \beta) + \frac{a}{\alpha^2}e^{ax}\sin(\alpha x + \beta) - \frac{a^2}{\alpha^2}\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx,$$

и объединяя интегралы, появляющиеся справа и слева, получаем, что

$$\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{a\sin(\alpha x + \beta) - \alpha\cos(\alpha x + \beta)}{a^2 + \alpha^2}e^{ax} + C.$$

Интегралы вида

9. $\int \ln x\,R'(x)\,dx$, 10. $\int \operatorname{arctg} x\,R'(x)\,dx$,

11. $\int \arcsin x\,R'(x)\,dx$,

где $R'(x)$ – производная некоторой рациональной функции $R(x)$, можно интегрированием по частям свести к уже рассмотренным случаям:

$$\int \ln x\,R'(x)\,dx = \ln x\,R(x) - \int \frac{R(x)}{x}\,dx,$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,R'(x)\,dx = \operatorname{arctg} x\,R(x) - \int \frac{1}{1+x^2}R(x)\,dx,$$

$$\int \arcsin x\,R'(x)\,dx = \arcsin x\,R(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}R(x)\,dx.$$

Пример. $\int \ln x \frac{dx}{(2x+5)^3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+5)^2}\ln x +$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(2x+5)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+5)^2}\ln x +$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{25}\int\frac{dx}{x} - \frac{2}{25}\int\frac{dx}{2x+5} - \frac{2}{5}\int\frac{dx}{(2x+5)^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+5)^2}\ln x + \frac{1}{100}\ln|x| - \frac{1}{100}\ln|2x+5| + \frac{1}{20}\frac{1}{2x+5} + C.$$

Таблица интегралов трансцендентных функций находится в 1.1.3.3.

3.1.7.7. Несобственные интегралы. При введении определенного интеграла предполагалось, что функция $f(x)$ ограничена, а интервал интегрирования конечен. *Несобственные интегралы* являются обобщением определенных интегралов на случай неограниченных функций и *бесконечных* пределов интегрирования.

Интегралы с неограниченными подынтегральными функциями. Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом отрезке $a \leqslant x \leqslant b - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < b - a$, но $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$.

Если существует предел

$$I = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad (*)$$

то он называется *сходящимся несобственным интегралом* от $f(x)$ на $[a, b]$ и его, как и ранее, обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если же предел (*) не существует, то $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *расходящимся несобственным интегралом.*

Если же $f(x)$ ограничена и интегрируема при $a \leqslant x \leqslant b$, то несобственный интеграл сходится и совпадает с определенным интегралом в прежнем смысле.

Примеры. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, ограничена и непрерывна; следовательно, интегрируема. Предельное значение

$$I = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \pi/2$$

существует; таким образом, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

2) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ при $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$, ограничена и непрерывна, но

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to+0}[-\ln(1-x)]_0^{1-\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon)=+\infty;$$

следовательно, $\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл для функций, которые на каждом отрезке $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b$, где $0<\varepsilon<b-a$, ограничены и интегрируемы, но $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Пример. $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$; пусть сначала $0<\alpha<1$:

$$\int_0^1 dx/x^\alpha=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})=\frac{1}{1-\alpha};$$

таким образом, интеграл сходится.

При $\alpha\geqslant 1$ $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ расходится, так как при $\alpha>1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)=+\infty$$

и при $\alpha=1$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{1}{\varepsilon}=+\infty.$$

Пусть $f(x)$ не ограничена в окрестности обоих концов отрезка $[a, b]$. И пусть c – любая внутренняя точка отрезка $[a, b]$: $a<c<b$.

Если каждый из интегралов $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$ сходится, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Пример. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a=-1$, $b=1$:

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Если, наконец, $f(x)$ не ограничена в окрестности некоторой внутренней точки c отрезка $[a, b]$ и каждый из интегралов $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ сходится, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

или, подробнее,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

Оба предела нужно вычислять по отдельности.

Если в этом смысле несобственный интеграл расходится, но существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right],$$

то его называют *главным значением несобственного интеграла в смысле Коши*. Он обозначается тем же символом $\int_a^b f(x)\,dx$, что и сам интеграл, либо v. p. $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример. Главное значение интеграла $\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ равно

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\left(\frac{b-c}{c-a}\right);$$

тогда как несобственный интеграл $\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ $(a<c<b)$ не существует.

Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена при $x\geqslant a$ и интегрируема на каждом отрезке $a\leqslant x\leqslant b$. Если существует предел

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

то он называется *сходящимся несобственным интегралом* от $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначается через $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$; таким образом,

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если же предел I не существует, то интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ называется *расходящимся несобственным интегралом*.

Примеры. 1) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\alpha x}\,dx=$ $=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{b\to+\infty}(1-e^{-\alpha b})=\frac{1}{\alpha}$, если $\alpha>0$, и интеграл сходится; если же $\alpha\leqslant 0$, то интеграл расходится.

$$2)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{-1+\alpha}}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{\alpha-1},$$

если $\alpha > 1$; если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то несобственный интеграл расходится как при $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty,$$

так и при $0 < \alpha < 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) = +\infty.$$

Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx.$

Если оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся, то определению полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b \to -\infty} (-\operatorname{arctg} b) + \lim_{c \to +\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Главное значение. Если несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходятся, а предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx$ существует, то он называется *главным значением несобственного интеграла.* Его обозначают v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример. Так как функция $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ нечетна, то $\int\limits_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$; отсюда получаем

$$\int_{-b}^{b} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-b}^{b} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Таким образом, главное значение несобственного интеграла равно

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Сам же несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ расходится.

Пусть функция $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ обладает конечным числом точек, в окрестности которых она не ограничена. Тогда интервал $[a, +\infty)$ разбивают на соответствующие частичные интервалы и на каждом из этих частичных интервалов вычисляют несобственные интегралы. Если они сходятся, то интеграл на $[a, +\infty)$ определяется как сумма интегралов на этих частичных интервалах.

Критерии сходимости. Они формулируются для интегралов вида $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$; для других типов справедливы аналогичные утверждения*).

1. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и для $x \geqslant x_0 \geqslant a$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то из сходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_{a}^{+} f(x)\,dx$ – расходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ $(0 \leqslant K \leqslant +\infty)$, то для $K < +\infty$ из сходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, а при $K > 0$ из расходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, т. е. при $0 < K < \infty$ оба интеграла или одновременно сходятся, или одновременно расходятся.

В случае интеграла $\int\limits_{a}^{b}$, $a < b$, от неограниченной в окрестности $x = b$ функции нужно рассмотреть предел $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

В качестве *функций сравнения* в случае $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ особенно удобно использовать функции $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, а в случае интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ от неограниченной в окрестности точки $x = b$ функции – $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$.

Примеры. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Подынтегральная функция в окрестности точки $x = 0$ не ограничена. По определению

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx;$$

первое слагаемое – сходящийся интеграл, так как при $0 < \alpha < 1$ имеем $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$; второе слагаемое

*) Во многих случаях бывает достаточно уметь ответить на вопрос, сходится ли данный несобственный интеграл или расходится.

сходится, так как при $1 < \alpha < 2$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} = 0.$$

2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Используя $g(x) = \frac{1}{x^2}$, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{1+x^2}} = 1$; таким образом, данный интеграл сходится, так как сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

3) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$. Рассмотрим функцию сравнения $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Тогда $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$. Так как интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и данный интеграл.

Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ (аналогичные определения имеют место для других видов несобственных интегралов). Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ — абсолютно сходящийся интеграл, так как, положив $g(x) = 1/x^{3/2}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} = 0.$$

Связь между несобственными интегралами и бесконечными рядами. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тогда и только тогда является сходящимся, когда для каждой числовой последовательности $\{x_n\}$ $(x_0 = a,\ x_n \geqslant a)$ такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$ сходится и имеет всегда одну и ту же сумму. Эта сумма и является значением несобственного интеграла.

Многочисленные критерии сходимости для бесконечных рядов могут, таким образом, использоваться для исследования сходимости несобственных интегралов, и, наоборот, *интегральный критерий* (см. 3.1 14.2) сводит исследование сходимости рядов к определению сходимости несобственных интегралов.

Геометрический смысл несобственных интегралов. Если функция $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывна, $f(x) \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то он равен площади заштрихованной на рис. 3.18 неограниченной области.

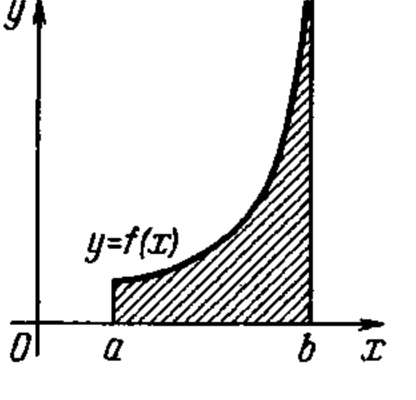


Рис. 3.18

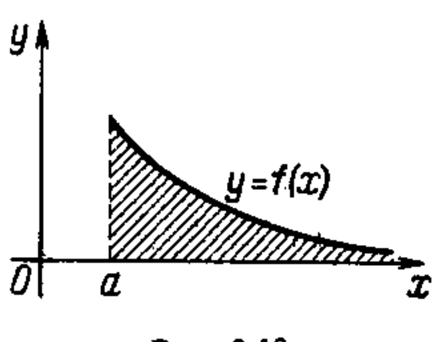


Рис. 3.19

Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он равен площади заштрихованной на рис. 3.19 неограниченной области.

Действия с несобственными интегралами. Свойства определенных интегралов для несобственных интегралов переносятся на интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и другие несобственные интегралы следующим образом:

1. Если сходятся $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то сходятся также $\int\limits_a^{+\infty} Af(x)\,dx$ для любой постоянной A и $\int\limits_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} Af(x)\,dx = A\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ в интервале $[a, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_a^{+\infty},$$

где $[F(x)]_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$. В случае несобственного интеграла от неограниченной функции $f(x)$ справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b,$$

если первообразная функция $F(x)$ непрерывна (точнее, допускает доопределение по непрерывности) в точках, в окрестности которых функция $f(x)$ не ограничена.

Примеры. 1) Первообразная функция для $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ есть

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$$

(см. 3.1.7.5), и $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $F(0)=0$.

Таким образом, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2) Первообразная для $f(x)=x^{-1/3}$ есть $F(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}$; она непрерывна при $x=0$; следовательно, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$.

3) Первообразной для $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ является $F(x)=\ln|x^2-1|$; она имеет разрывы при $x=\pm 1$. Применение формулы к интегралу $\int_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2-1}$ привело бы к неправильному результату 0, тогда как этот интеграл – расходящийся.

3. *Интегрирование по частям.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на интервале $[a, +\infty)$ непрерывные производные, существует $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ и $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx$ также сходится и справедлива формула

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx.$$

Примеры. 1) $u(x)=x^n$, $v(x)=e^{-x}$; $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}=0$, $\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$ сходится; отсюда следует, что

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

В результате повторных интегрирований по частям находим

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!.$$

2) $u(x)=1/x$, $v(x)=-\cos x$; тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \qquad (a>0),$$

так как оба слагаемых в правой части имеют смысл. В частности, отсюда следует существование $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ (так как подынтегральное выражение при $x=0$ остается ограниченным).

4. *Правило подстановки.* Если функция $f(z)$ при $z\geqslant\alpha$ непрерывна, функция $z=g(x)$ на $[a, b)$ имеет непрерывную производную $g'(x)\neq 0$ и $g(a)=\alpha$, $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$, то

$$\int_\alpha^{+\infty} f(z)\,dz = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx;$$

при этом интеграл, стоящий справа, может быть как собственным, так и несобственным, и из сходимости одного из интегралов следует сходимость другого.

Примеры. 1) Выше было доказано, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln z}{1+z^2}dz$ сходится; разложим его на два слагаемых:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln z\,dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{\ln z}{1+z^2}dz + \int_1^{+\infty} \frac{\ln z}{1+z^2}dz.$$

Подставим $z=1/x$ во второе слагаемое разложения; тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln z}{1+z^2}dz = \int_1^0 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx;$$

отсюда следует, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln z}{1+z^2}dz = \int_0^1 \frac{\ln z}{1+z^2}dz - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0.$$

2) $I=\int_0^{\pi/2} \ln\sin z\,dz$ сходится, так как $\lim_{x\to+0} \frac{\ln\sin x}{1/x^\alpha} = 0$ при $0<\alpha<1$. Если подставить $z=2x$, то получим

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln(2\sin x\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin x\,dx + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx.$$

В результате подстановки $x=\pi/2-u$ получаем

$$2\int_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du,$$

так что

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin x\,dx + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I;$$

таким образом,

$$I = -(\pi/2)\ln 2.$$

3.1.7.8. Геометрические и физические приложения определенных интегралов.

Длина кривой. Если *плоская кривая* L задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$, причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то она имеет *длину* l, вычисляемую по следующей формуле:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Если кривая L – график непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$, то длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если кривая L задана в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$ $(\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1)$, то ее длина может быть вычислена по формуле

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

Для *кривой в пространстве*, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, длина вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt.$$

Площадь. Если $f(x)$ является неотрицательной непрерывной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функцией, то площадь F криволинейной трапеции $ABCD$ (см. рис. 3.14) вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Площадь S сектора OAB, ограниченного кривой AB, заданной в полярных координатах: $\rho = g(\varphi)$ $(\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$, и радиусами OA и OB (рис. 3.20), определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [g(\varphi)]^2\, d\varphi.$$

О вычислении площадей см. также 3.1.8.6 или 3.1.10.4.

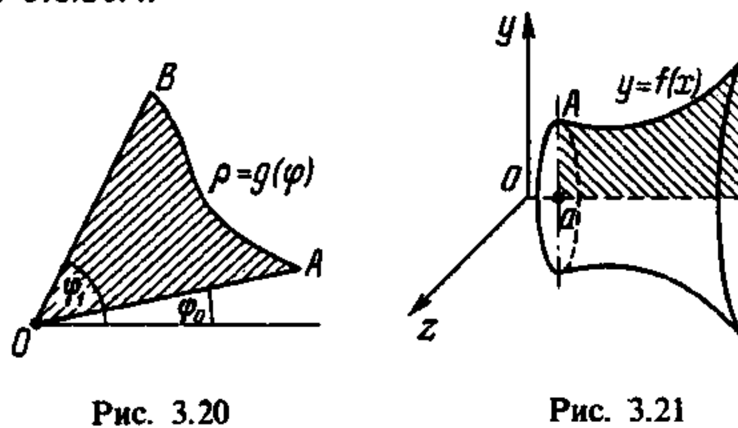


Рис. 3.20 Рис. 3.21

Объем тела вращения. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$; объем V тела, получающегося в результате вращения криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3.21) вокруг оси x, определяется формулой

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Объем V тела, заключенного между двумя плоскостями $x = a$ и $x = b$, в случае, если площадь сечения, проведенного перпендикулярно оси

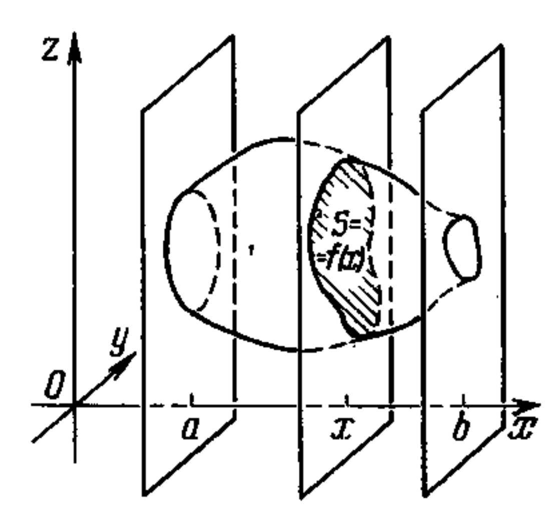


Рис. 3.22

x, есть известная функция x: $S = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ (рис. 3.22), вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b f(x)\, dx.$$

О вычислении объемов см. также 3.1.10.4 и 3.1.11.4.

Площадь поверхности тела вращения. Площадь S поверхности тела вращения, возникающего в результате вращения вокруг оси x, кривой, заданной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ неотрицательной непрерывно дифференцируемой функцией $f(x)$, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Если вращающаяся кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, $\psi(t) \geqslant 0$, то

$$S = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Центр тяжести. Координаты (ξ, η) центра тяжести материальной кривой с линейной плотностью $\delta(x)$, заданной в явном виде: $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, выражаются следующим образом:

$$\xi = \frac{1}{M} \int_a^b \delta(x)\, x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

$$\eta = \frac{1}{M} \int_a^b \delta(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

где M — полная масса: $M = \int_a^b \delta(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$

При постоянной плотности $\delta(x)$ второе равенство может быть приведено к виду

$$2\pi l \eta = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

(l — длина кривой). Это — *первая теорема Гульдена*: площадь S поверхности тела вращения, образующегося в результате вращения некоторой плоской кривой вокруг оси, не пересекающей этой кривой, равна произведению длины кривой на длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести кривой: $S = 2\pi\eta l$.

Пример. При вращении окружности радиуса r вокруг не пересекающей ее оси образуется *тор* (рис. 3.23). Если масса распределена по окружности равномерно, то центр тяжести лежит в центре окружности. Пусть d — расстояние

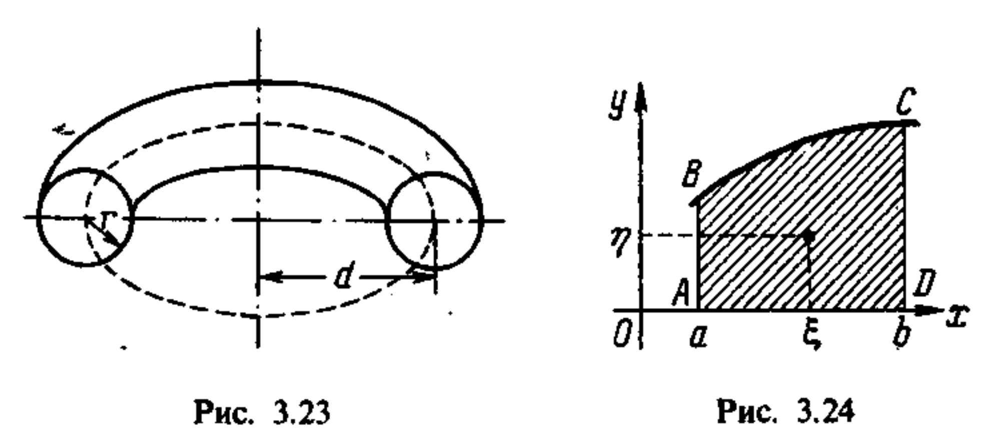


Рис. 3.23 Рис. 3.24

от центра до оси $(d > r)$; тогда центр тяжести описывает окружность длиной $2\pi d$; отсюда по первой теореме Гульдена получается площадь поверхности тора:

$$S = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rd.$$

Координаты (ξ, η) центра тяжести криволинейной трапеции (рис. 3.24) с равномерно распределенной массой (поверхностная плотность $\delta = 1$) и

площадью S вычисляются следующим образом:

$$\xi = \frac{1}{S}\int_a^b x f(x)\,dx, \quad \eta = \frac{1}{2S}\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Из второго равенства следует *вторая теорема Гульдена*: объем V тела, описываемого плоской фигурой при вращении ее вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади S этой фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести этой фигуры: $V = S \cdot 2\pi\eta$.

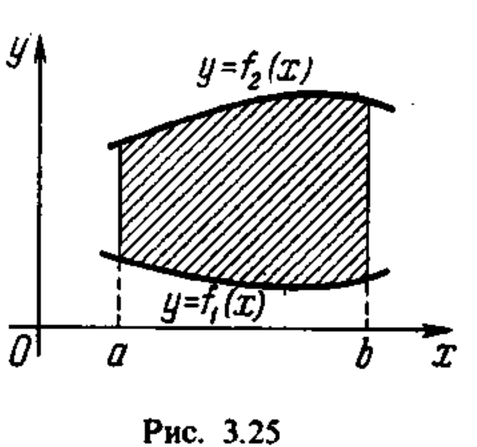


Рис. 3.25

Пример. Объем тора (см. рис. 3.23). Площадь вращающегося круга равна πr^2; таким образом, объем тора равен $V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$.

О вычислении центров тяжести плоских фигур и тел см. также 3.1.10.4 и 3.1.11.4.

Момент инерции. Момент инерции I_y относительно оси y кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ с линейной плотностью $\delta(x)$ вычисляется по формуле

$$I_y = \int_a^b \delta(x)\,x^2\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Момент инерции I_y относительно оси y криволинейной трапеции (рис. 3.25) с постоянной поверхностной плотностью δ равен

$$I_y = \delta\int_a^b x^2(f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

О вычислении моментов инерции см. также 3.1.10.4 и 3.1.11.4.

3.1.8. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл является обобщением введенного в 3.1.7.1 определенного интеграла, при котором функция интегрировалась вдоль отрезка $[a, b]$ действительной оси; в случае криволинейного интеграла функция интегрируется вдоль кривой.

Отрезок плоской кривой, заданной параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

называется *гладким*, если производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и всегда $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Точка со значением параметра t_1 называется *начальной точкой*, а точка со значением параметра t_2 — *конечной точкой* отрезка кривой. Кривая называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких отрезков кривой.

Аналогичное определение имеет место для пространственных кривых, заданных параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$.

3.1.8.1. Криволинейные интегралы 1-го рода (интегралы по длине кривой). Пусть L — отрезок кусочно гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B и $u = f(x, y)$ — ограниченная функция, заданная в некоторой области, содержащей кривую L. На L выбираются произвольные точки $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$; тем самым криволинейный отрезок AB разбивается на элементарные отрезки (разбиение Z) (рис. 3.26).

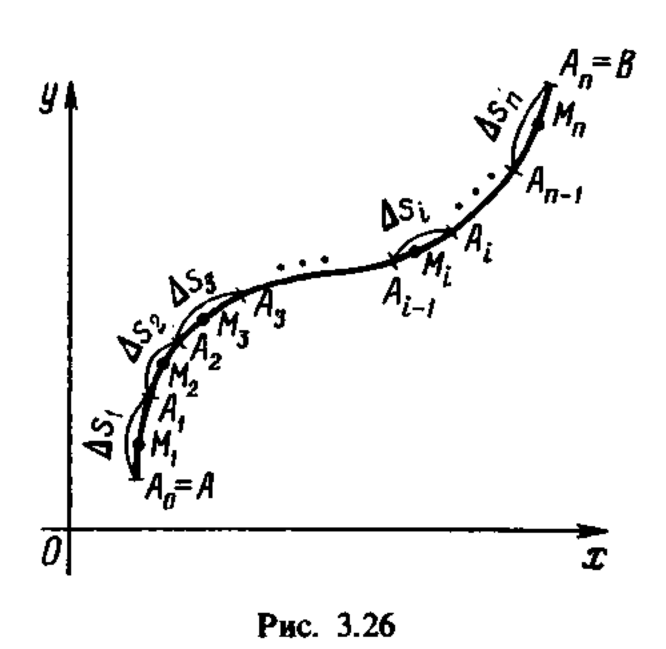


Рис. 3.26

Пусть длина отрезка кривой между A_{i-1} и A_i $(i = 1, \ldots, n)$ равна Δs_i. Пусть, далее, $M_i(\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка на элементарном отрезке A_{i-1}, A_i. Сумма

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i$$

называется *интегральной суммой* относительно разбиения Z. Обозначим через $\Delta(Z)$ максимальное из чисел Δs_i:

$$\Delta(Z) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta s_i.$$

Как и при определении обычного определенного интеграла, число I называется *криволинейным интегралом 1-го рода*, если оно обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, и независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|S(Z) - I| < \varepsilon$.

Обозначения:

$$I = \int_{(L)} f(x, y)\,ds, \quad I = \int_{(AB)} f(x, y)\,ds.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл $\int_{(L)} f(x, y, z)\,ds$ 1-го рода от функции $u = f(x, y, z)$ трех переменных по отрезку L пространственной кривой.

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления движения по кривой L, т. е. если L проходится в противоположном направлении, так что B — начало, а A — конец, то

$$\int_{(BA)} f(x, y)\,ds = \int_{(AB)} f(x, y)\,ds.$$

3.1.8.2. Существование и вычисление криволинейных интегралов 1-го рода. Если отрезок кривой L представлен параметрически: $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, причем l обозначает длину дуги участка кривой L от начальной точки до точки, отвечающей значению параметра s, то криволинейный

интеграл сводится к *определенному интегралу:*

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,ds = \int\limits_0^l f(x(s), y(s))\,ds,$$

и, таким образом, из существования одного интеграла следует существование другого; из этой формулы введением новых переменных интегрирования можно получить и другие представления:

а) Если L – отрезок кусочно-гладкой кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (*)$$

Формально при вычислении криволинейного интеграла нужно, таким образом, представить функцию параметрически и по правилу подстановки для определенных интегралов заменить переменное s на t. Тогда в силу формулы $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ непосредственно получаем формулу (*).

Аналогично для кривой в пространстве имеем

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt.$$

б) Если плоская кривая задана в явном виде: $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Пример. Пусть L – полуокружность радиуса r, описанная вокруг начала координат, параметрическое представление которой: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Тогда $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = r$ и

$$\int\limits_{(L)} y\,ds = \int\limits_0^\pi r\sin t\, r\,dt = 2r^2.$$

3.1.8.3. Криволинейные интегралы 2-го рода (интегралы по проекции и интегралы общего вида). Пусть L – отрезок гладкой кривой с началом в точке A и концом в точке B, $u = f(x, y)$ – функция, заданная в области, содержащей L,

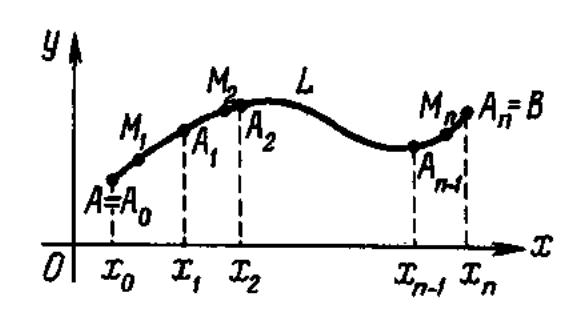


Рис. 3.27

и ограниченная на L. Выберем на L произвольные точки $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$. При этом получается разбиение Z кривой L на элементарные отрезки (рис. 3.27).

Пусть M_i – произвольная точка, лежащая на L между A_{i-1} и A_i $(i = 1, \ldots, n)$, и пусть $A_i = (x_i, y_i)$, $M_i = (\xi_i, \eta_i)$. Тогда сумма

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей *разбиению* Z. (В отличие от интегральной суммы при криволинейном интеграле 1-го рода здесь $f(\xi_i, \eta_i)$ умножается не на длину Δs_i элементарного отрезка, а на величину Δx_i его проекции на ось x.) Обозначим через $\Delta(Z)$ наибольшее из расстояний от A_{i-1} до A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Число I называется *криволинейным интегралом 2-го рода*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство $|S(Z) - I| < \varepsilon$.

Обозначения:

$$I = \int\limits_{(L)} f(x, y)\,dx, \quad I = \int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx.$$

Криволинейный интеграл по кусочно гладкой кривой определяется как сумма интегралов по гладким отрезкам кривой, из которых составляется данная кривая. Если начальная и конечная точки совпадают, то получается криволинейный интеграл по *замкнутой кривой*, который обозначается следующим образом:

$$\oint f(x, y)\,dx.$$

Аналогично можно определить для *плоской кривой* число

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\,dy,$$

а для *пространственной кривой* – числа

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dx, \quad \int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dy, \quad \int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dz.$$

Если на одной плоской кривой определены две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то под

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

понимают сумму обоих интегралов $\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx$ и $\int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy$, т. е.

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + \int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy.$$

Аналогичным образом для пространственной кривой понимается интеграл

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

от трех функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ трех переменных.

3.1.8.4. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 2-го рода. Обычный определенный интеграл есть частный случай криволинейного интеграла, когда в качестве кривой L выбирают

отрезок оси x. Оба интеграла имеют аналогичные свойства:

$$\int_{(L)} af(x, y)\,dx = a\int_{(L)} f(x, y)\,dx \qquad (a = \text{const}),$$

$$\int_{(L)} (f(x, y) + g(x, y))\,dx = \int_{(L)} f(x, y)\,dx + \int_{(L)} g(x, y)\,dx.$$

Если кривая L состоит из двух кривых L_1 и L_2, то

$$\int_{(L)} f(x, y)\,dx = \int_{(L_1)} f(x, y)\,dx + \int_{(L_2)} f(x, y)\,dx.$$

Если направление интегрирования по L меняют, принимая B за начальную точку, а A – за конечную, то

$$\int_{(BA)} f(x, y)\,dx = -\int_{(AB)} f(x, y)\,dx.$$

Аналогичные формулы верны для криволинейного интеграла по пространственной кривой.

Криволинейный интеграл зависит от начальной и конечной точек и в общем случае также от пути L, соединяющего обе точки. Он не зависит от пути тогда и только тогда, когда обращается в нуль на каждой замкнутой кривой (см. также 3.1.8.5).

Вычисление. Если L – гладкий отрезок кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, и функция $f(x, y)$ непрерывна на L, то существуют криволинейные интегралы $\int_{(L)} f(x, y)\,dx$ и $\int_{(L)} f(x, y)\,dy$ и справедлив следующий переход к определенным интегралам:

$$\int_{(L)} f(x, y)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{(L)} f(x, y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt.$$

Аналогично для кривой в пространстве, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, получаем, что

$$\int_{(L)} f(x, y, z)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{(L)} f(x, y, z)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

$$\int_{(L)} f(x, y, z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t)\,dt.$$

Формально нужно, таким образом, как и при замене переменного в определенных интегралах, заменить переменные интегрирования x, y и z на переменное t, используя параметрическое представление L. Это непосредственно приводит к указанным формулам для вычисления криволинейных интегралов.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и наряду с непрерывностью $f(x, y)$ непрерывна и $y(x)$, то

$$\int_{(L)} f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y(x))\,dx.$$

Примеры. 1) $I = \int_{(L)} xy\,dx + (y - x)\,dy$, где L – отрезок параболы $y = x^2$ с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке $(1, 1)$. Параметрическое задание кривой L: $x = t$, $y = t^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Следовательно,

$$I = \int_0^1 [t^3 + (t^2 - t)2t]\,dt = \int_0^1 (3t^3 - 2t^2)\,dt = \frac{1}{12}.$$

2) $I = \int_{(L)} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, где L – один виток *винтовой линии* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$:

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^3\sin^2 t\cos t + a^2bt\sin t\cos t + ab^2t\cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}a^2b.$$

Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода. Если L – гладкая кривая на плоскости или гладкая кривая в пространстве, касательная к которой имеет с координатными осями углы α, β или α, β, γ, то

$$\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{(L)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds$$

или

$$\int_{(L)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_{(L)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Если в случае плоской кривой ввести угол $(x,\widehat{}\,\mathbf{n})$ между положительным направлением нормали (получаемым из направления касательной поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки) и осью x, то, учитывая, что $(x,\widehat{}\,\mathbf{n}) = \alpha + \pi/2$, получим

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(L)} [P\sin(x,\widehat{}\,\mathbf{n}) - Q\cos(x,\widehat{}\,\mathbf{n})]\,ds.$$

Пример. Пусть L – кривая, не проходящая через начало координат, и $P = y/r^2$, $Q = -x/r^2$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$. Тогда

$$\int_{(L)} \frac{y}{r^2}dx - \frac{x}{r^2}dy = \int_{(L)} \left[\frac{y}{r^2}\sin(x,\widehat{}\,\mathbf{n}) + \frac{x}{r^2}\cos(x,\widehat{}\,\mathbf{n})\right]ds.$$

Преобразуем этот криволинейный интеграл 1-го рода. Обозначим через $(x,\widehat{}\,\mathbf{r})$ угол, который составляет радиус-вектор $\mathbf{r}$ с осью x (рис. 3.28); тогда

$$x/r = \cos(x,\widehat{}\,\mathbf{r}), \quad y/r = \sin(x,\widehat{}\,\mathbf{r}).$$

Обозначим через $(r,\widehat{}\,\mathbf{n})$ угол между радиусом-вектором и

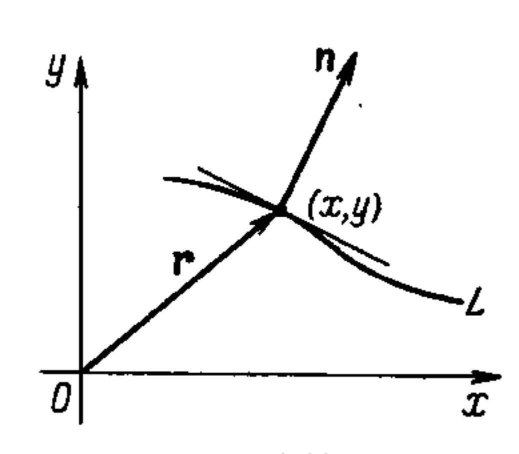


Рис. 3.28

нормалью к L; тогда $(r,\hat{\ }n) = (x,\hat{\ }n) - (x,\hat{\ }r)$. Таким образом,

$$\int\limits_{(L)}\left[\frac{y}{r^2}\sin(x,\hat{\ }n) + \frac{x}{r^2}\cos(x,\hat{\ }n)\right]ds = \int\limits_{(L)}\frac{\cos(r,\hat{\ }n)}{r}ds.$$

Этот так называемый *интеграл Гаусса* геометрически представляет угол, под которым кривая L видна из начала координат. Если кусочно гладкая кривая L является простой замкнутой кривой (т. е. образом окружности при непрерывном взаимно однозначном отображении), то значение интеграла Гаусса равно 2π, если L окружает начало координат и пробегается против часовой стрелки, и равно 0, если начало координат лежит вне L.

3.1.8.5. Независимость криволинейных интегралов от пути интегрирования. Значение криволинейного интеграла, взятого вдоль пути L, соединяющего данную начальную точку A с конечной точкой B, вообще говоря, зависит от пути L.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Двумерный случай. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$ непрерывны в области G, то криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от выбора кривой L, целиком лежащей в G и соединяющей A и B, если в G существует однозначная функция $U(x, y)$, производные которой удовлетворяют условию

$$\partial U/\partial x = P, \qquad \partial U/\partial y = Q,$$

т. е. если $P\,dx + Q\,dy$ является *полным дифференциалом* функции U. Криволинейный интеграл может быть тогда вычислен по следующей формуле:

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A).$$

Если область G односвязна, то необходимым и достаточным признаком существования функции $U(x, y)$ является выполнение *условия интегрируемости*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

для всех точек области G.

Вычисление функции $U(x, y)$. Если (x_0, y_0) – фиксированная точка, а (x, y) – переменная точка односвязной области G и если выполнено условие интегрируемости, то криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy$, взятый по произвольной кривой L, соединяющей эти точки и лежащей в области G, является искомой функцией $U(x, y)$. В случае, когда кривая, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y) в G, состоит из двух отрезков, параллельных координатным осям (рис. 3.29), имеем

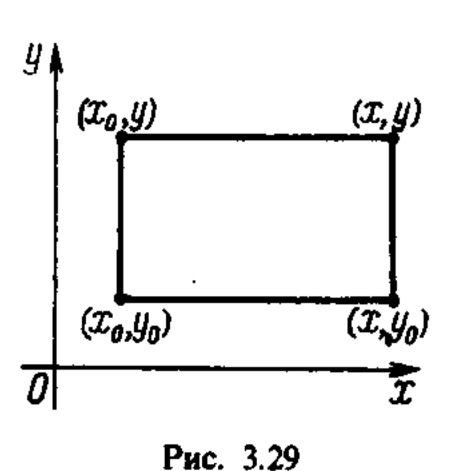


Рис. 3.29

$$U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,d\eta + C,$$

или

$$U(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta + \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y)\,d\xi + C.$$

Примеры. 1) $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Пусть G является односвязной областью, не содержащей начало координат. Тогда в G функции P, Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ непрерывны и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy$, следовательно, не зависит от выбора пути в G, и при $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $y > 0$ получаем, что

$$U(x, y) = \int\limits_{1}^{y}\frac{0\,d\eta}{0^2+\eta^2} + \int\limits_{0}^{x}\frac{-y\,d\xi}{\xi^2+y^2} + C = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C.$$

В области, содержащей начало координат, криволинейный интеграл не зависящим от пути не является. В противном случае он должен был бы обращаться в нуль при интегрировании по окружности радиуса r с центром в начале координат; однако в этом случае

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0.$$

2) Функцию $U(x, y)$ можно найти также следующим образом: пусть $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = x - y$; тогда равенство $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ всегда выполнено. Искомая функция $U(x, y)$ должна удовлетворять условию $\partial U/\partial x = P = x + y$. Интегрированием по x получаем $U = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)$ с постоянной интегрирования $\varphi(y)$, зависящей от y.

Из условия $\partial U/\partial y = Q$ следует теперь, что $x + \varphi'(y) = x - y$, откуда $\varphi'(y) = -y$; следовательно, $\varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$. Таким образом,

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + C.$$

Трехмерный случай. Пусть G – некоторая односвязная пространственная область, т. е. область, которая наряду с каждой замкнутой кривой содержит также некоторую поверхность, границей которой является эта кривая (в этом смысле область между двумя концентрическими сферами является односвязной поверхностью, а тор (см. рис. 3.23) – нет). Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial P}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ непрерывны в G. Если A и B – две точки в G, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависит от выбора кривой L, соединяющей эти точки, тогда и только тогда, когда существует функция $U(x, y, z)$, для которой

$$P = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial U}{\partial y},\quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. когда подынтегральное выражение криволинейного интеграла является *полным дифференциалом* некоторой функции $U(x, y, z)$.

Необходимым и достаточным условием существования функции $U(x, y, z)$ является выполнение *условий интегрируемости*

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

в предположении, что функции P, Q, R вместе с частными производными непрерывны в G.

Функция $U(x, y, z)$ может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла, взятого по любой кривой L, соединяющей точку (x_0, y_0, z_0) с точкой (x, y, z) и лежащей в G. Если отрезки, параллельные координатным осям (рис. 3.30), лежат в G, то получим формулу

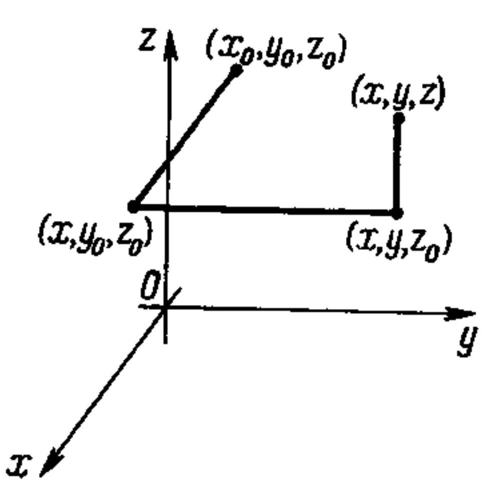


Рис. 3.30

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)\,d\zeta + C$$

или пять других формул, аналогичных этой, которые получатся, если выбрать другие пять путей интегрирования, частичные отрезки которых параллельны координатным осям.

Пример. $P = x^2 - yz$, $Q = y^2 - xz$, $R = z^2 - xy$. Условия интегрируемости выполнены во всем пространстве; для $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ получаем

$$U(x, y, z) = \int_0^x \xi^2\,d\xi + \int_0^y \eta^2\,d\eta + \int_0^z (\zeta^2 - xy)\,d\zeta + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz + C.$$

3.1.8.6. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов.

1. Ориентированная *площадь* S области, ограниченной плоской замкнутой кривой L:

$$S = \frac{1}{2}\oint_{(L)} x\,dy - y\,dx.$$

При этом S получается положительной или отрицательной в зависимости от того, где находится область G при обходе по границе L – слева или справа.

Пример. Площадь области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; параметрическое задание эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = ab\pi.$$

2. *Масса и центр тяжести* кривой L. Если масса гладкой кривой L распределена с линейной плотностью $\delta(x, y, z)$, то полная масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{(L)} \delta(x, y, z)\,ds,$$

а координаты центра тяжести равны

$$\xi = \frac{1}{M}\int_{(L)} x\delta\,ds,\quad \eta = \frac{1}{M}\int_{(L)} y\delta\,ds,\quad \zeta = \frac{1}{M}\int_{(L)} z\delta\,ds.$$

Пример. Вычислим массу и координаты центра тяжести *циклоиды* $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ с равномерно распределенной массой ($\delta = 1$):

$$M = \int_{(L)} 1\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt = 8r,$$

$$\xi = \frac{1}{8r}\int_{(L)} x\,ds = \frac{1}{8r}r^2\int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt = \pi r,$$

$$\eta = \frac{1}{8r}\int_{(L)} y\,ds = \frac{1}{8r}r^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt = \frac{4}{3}r.$$

3. *Работа силы* вдоль кривой L. Если $Pe_1 + Qe_2 + Re_3$ – сила, которая вдоль кривой L меняется по величине и направлению ($\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормированный базис), то при движении материальной точки единичной массы под влиянием этой силы совершается работа

$$A = \int_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Работа тогда и только тогда не зависит от пути L, соединяющего две точки, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$ (так называемого *потенциала силового поля*). В этом случае работа вычисляется как разность потенциалов в данных точках.

Пример. Если компоненты силы равны $P = x/r^3$, $Q = y/r^3$, $R = z/r^3$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то существует потенциал, а именно $U(x, y, z) = -1/r$, и сила совершает вдоль некоторой кривой L, соединяющей точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) и не проходящей через $(0, 0, 0)$, работу

$$A = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$$

3.1.9. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

3.1.9.1. Определение интеграла, зависящего от параметра. Если функция $f(x, y)$ определена при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ и при каждом фиксированном y интегрируема по x, то равенство

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

определяет на отрезке $[c, d]$ некоторую функцию F переменного y, называемого в этом случае *параметром*.

Пример. $\arcsin y = \int_0^1 \frac{y\,dx}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$, что легко проверить подстановкой $z = xy$.

3.1.9.2. Свойства интегралов, зависящих от параметра. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то функция $F(y)$ также непрерывна при $c \leqslant y \leqslant d$. В частности, $F(y)$ можно

интегрировать. При этом

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy$$

(повторный интеграл); *порядок интегрирования* может быть изменен:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Скобки могут быть опущены, если договориться, что внешнему знаку интеграла ставится в соответствие внешний дифференциал. Если частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывна, то функцию $F(y)$ можно *дифференцировать* по y и

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру интегралов, зависящих от параметра, часто используют для вычисления определенных интегралов.

Примеры. 1) Функция $f(x, y) = x^y$ и производная $\partial f/\partial y = x^y \ln x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y > 0$ непрерывны. Из того, что

$$F(y) = \int_0^1 x^y\,dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1},$$

следует равенство

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_0^1 x^y\,dx = \int_0^1 x^y \ln x\,dx = -\frac{1}{(y+1)^2}.$$

Дифференцируя равенство $\int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}$ последовательно n раз, получим

$$\int_0^1 x^y (\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(1+y)^{n+1}}.$$

2) Функция $f(x, y) = x^y$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$ $(a > 0)$ непрерывна; поэтому порядок интегрирования может быть изменен:

$$\int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx.$$

Из того, что

$$\int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}, \qquad \int_a^b x^y\,dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

следует формула

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Переменные пределы интегрирования. Если $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны и дифференцируемы при $c \leqslant y \leqslant d$ и если $f(x, y)$ имеет непрерывную частную производную по y в области, содержащей точки (x, y) с $\varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 3.31), то зависящий от параметра интеграл

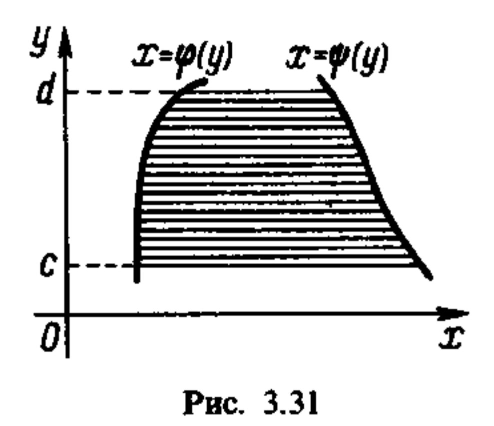


Рис. 3.31

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$$

при $c \leqslant y \leqslant d$ можно *дифференцировать*, и его производная имеет вид

$$F'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy + f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y).$$

Пример. $F(y) = \int_\sigma^y \frac{(y-x)^n}{n!} f(x)\,dx$; $f(x)$ непрерывна; $\sigma = \text{const}$; тогда

$$F'(y) = \int_\sigma^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)\,dx.$$

Посредством последующих дифференцирований найдем

$$F^{(n+1)}(y) = f(y).$$

3.1.9.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Часто рассматриваются несобственные интегралы, зависящие от параметра, например

$$F(y) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2(1-y^2x^2)}} \qquad (|y| < 1),$$

$$F(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x}\,dx \qquad (y > 0).$$

При этом первый интеграл берется от функции, неограниченной при $x = \pm 1$, а второй – на бесконечном интервале. Оба типа интегралов имеют сходные свойства, поэтому ограничимся рассмотрением только одного из них.

Равномерная сходимость. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится при каждом y из некоторого интервала I. Этот интеграл называется равномерно сходящимся на I, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $x(\varepsilon)$, не зависящая от $y \in I$ и такая, что для любого $b > x(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Пример. Интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-yx}\,dx$ при $y \geqslant 0$ сходится и представляет, таким образом, некоторую функцию $F(y)$,

причем $F(0)=0$; при $y>0$ имеет место сходимость, так как

$$\int_0^b ye^{-xy}\,dx=\int_0^{by} e^{-z}\,dz=1-e^{-by}.$$

На каждом отрезке $0<c\leqslant y\leqslant d$ интеграл равномерно сходится, так как при $b>x(\varepsilon)=\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{c}$ имеем

$$\int_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx=\int_{by}^{+\infty} e^{-z}\,dz=e^{-by}\leqslant e^{-bc}<\varepsilon.$$

Достаточные признаки равномерной сходимости.

1. Если существует функция $\varphi(x)$ такая, что при $x\geqslant x_0>a$ и при всех $y\in I$

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x),$$

и если интеграл $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на I.

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$; при $x\geqslant 0$, $y\geqslant y_0>0$ имеем $|e^{-xy}\sin x|\leqslant e^{-xy_0}=\varphi(x)$ и $\int_0^{+\infty} e^{-xy_0}dx$ сходится; следовательно, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$ равномерно сходится при $y\geqslant y_0>0$.

2. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x,y)\,dx$ равномерно сходится на I, если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а функция $g(x,y)$ на I равномерно ограничена и монотонна по x.

Пример. Интеграл $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx$ равномерно сходится, так как несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ является сходящимся (см. 3.1.7.7), а функция $g(x,y)=e^{-xy}$ при $y\geqslant 0$ равномерно ограничена ($e^{-xy}\leqslant 1$) и монотонна по x.

Если функция $f(x,y)$ при $x\geqslant a$, $y\in I$ непрерывна и $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится, то функция $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ непрерывна на I, т. е. для любого $y_0\in I$

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx.$$

При этих условиях $F(y)$ можно *интегрировать*, и при $c,\,d\in I$ имеем

$$\int_c^d\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^{+\infty}\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов, зависящих от параметра, часто используются при вычислении несобственных интегралов.

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx$ при $y\geqslant c>0$ равномерно сходится, и $F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx=\dfrac{1}{y}$, откуда следует, что

$$\int_c^d\int_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx\,dy=\int_c^d\frac{1}{y}\,dy=\ln\frac{d}{c}.$$

С другой стороны, после изменения порядка интегрирования имеем

$$\int_0^{+\infty}\int_c^d e^{-yx}\,dy\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-cx}-e^{-dx}}{x}\,dx;$$

следовательно,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-cx}-e^{-dx}}{x}\,dx=\ln\frac{d}{c}.$$

В случае неравномерной сходимости изменение порядка интегрирования, как показывает следующий пример, может оказаться невозможным: пусть $a>0$, $b>0$ и

$$F(y)=\int_1^{+\infty}(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dx=\frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y};$$

отсюда

$$\int_0^1 F(y)\,dy=\int_0^1\frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy;$$

так как, с другой стороны, $\int_0^1(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dy=-\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$, то при $a\neq b$

$$\int_0^1\int_1^{+\infty}(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dx\,dy-\int_1^{+\infty}\int_0^1(ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy+\int_1^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}\neq 0.$$

Если, кроме того, при $y\in I$ существует и непрерывна функция $f'_y(x,y)$ при $x\geqslant a$ и интеграл $\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходится на I, то функция $F(y)$ *дифференцируема* на I и имеет производную

$$F'(y)=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Пример. $F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\dfrac{\sin x}{x}\,dx$, $y\geqslant 0$.

Интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\dfrac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$ равномерно сходятся при $y\geqslant y_0>0$. Отсюда вытекает, что для любого $y>0$ выполняется равенство

$$F'(y)=-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Интеграл можно вычислить:

$$-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = \left[\frac{\cos x + y\sin x}{1+y^2}e^{-xy}\right]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{1+y^2},$$

так что $F'(y) = -1/(1+y^2)$. Отсюда $F(y) = C - \operatorname{arctg} y$. Так как $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0$, то $C = \pi/2$ и

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y;$$

в частности, при $y = 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

3.1.9.4. Примеры интегралов, зависящих от параметра.

1. *Бета-функция* (*эйлеров интеграл* 1-*го рода*):

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Этот интеграл есть функция от параметров x и y; он сходится при $x > 0$, $y > 0$ и расходится, если либо $x \leqslant 0$, либо $y \leqslant 0$.

Свойства бета-функции.

1) $B(x, y) = B(y, x)$.

2) $B(x, y) = \dfrac{y-1}{x+y-1}B(x, y-1)$.

3) $B(x, n) = \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}$ при $n = 1, 2, \dots$

4) $B(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$.

5) $B(x, 1-x) = \dfrac{\pi}{\sin x\pi}$ $(0 < x < 1)$.

2. *Гамма-функция* (*эйлеров интеграл* 2-*го рода*):

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Этот несобственный, зависящий от параметра x интеграл сходится при $x > 0$, а при $x \leqslant 0$ расходится. Подстановками $u = e^{-t}$ и $u = \ln t$ получаем соответственно

$$\Gamma(x) = \int_0^1\left[\ln\frac{1}{u}\right]^{x-1}du,\qquad \Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu}e^{-e^u}\,du.$$

Свойства гамма-функции.

1) При $x > 0$ гамма-функция непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\,dt.$$

2) Представление Гаусса (в виде произведения):

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x\frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}\qquad (x > 0).$$

3) Функциональное равенство: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4) $\Gamma(n+1) = n!$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

5) Связь с бета-функцией:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

6) Закон дополнения:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}\qquad (0 < x < 1).$$

7) Закон удвоения Лежандра:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

Теорема умножения:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{(2nx-1)/2}}\Gamma(nx).$$

8) Формула Раабе: $\displaystyle\int_x^{x+1}\ln\Gamma(u)\,du = x(\ln x - 1) + \ln\sqrt{2\pi}$.

9) Формула Гаусса:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + C = \int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt$$

(C — постоянная Эйлера, $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$, $C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\dots$).

10) Формула Коши:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{\infty}\left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right]\frac{dt}{t}.$$

Некоторые интегралы, связанные с гамма-функцией, содержатся в 1.1.3.4.

3.1.10. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1.10.1. Определение двойного интеграла и элементарные свойства. Пусть S — ограниченная область *) плоскости x, y с кусочно гладкой границей, и пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на S. Посредством сетки кусочно гладких кривых (рис. 3.32) область S разбивают на конечное число элементарных областей S_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ с площадями ΔS_i (*разбиение* Z); пусть $\Delta(Z)$ — наибольший из диаметров элементарных областей S, получающихся при разбиении Z. В каждой из элементарных областей выбирается произвольная точка $M_i = (x_i, y_i)$. Число $\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ ставится в соответствие каждому

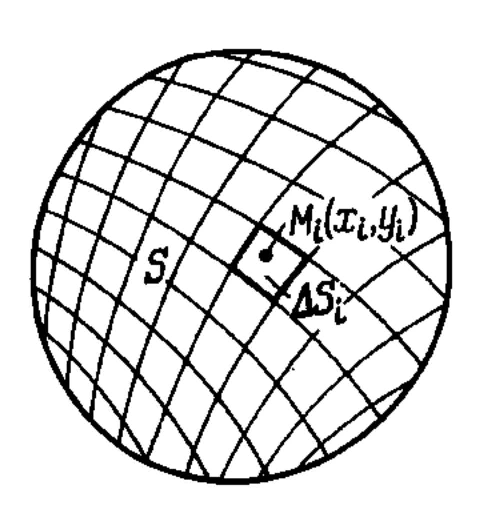


Рис. 3.32

*) В 3.1.10–3.1.13 термин «область» всегда означает «замкнутая область».

разбиению Z и выбору точек $M_i \in S_i$ и называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $M_i \in S_i$.

Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* по области S (*в смысле Римана*), если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого разбиения Z области S, для которого $\Delta(Z) < \varepsilon$, и независимо от того, какие точки M_i выбираются в элементарных областях, выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$. Число I называется *двойным интегралом* (*Римана*) от $f(x, y)$ по области S и обозначается следующим образом:

$$I = \iint_{(S)} f(x, y)\, dS,$$

$$I = \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Эквивалентным этому определению является следующее: $f(x, y)$ интегрируема по S, если для каждой последовательности Z_n разбиений с $\lim_{n\to\infty} \Delta(Z_n) = 0$ последовательность соответствующих интегральных сумм $\sigma(Z_n, \{M_i^{(n)}\})$ всегда сходится независимо от выбора промежуточных точек $\{M_i^{(n)}\}$ (в этом случае все последовательности интегральных сумм сходятся к одному и тому же значению, которое и есть двойной интеграл).

Интегрируемые функции.

а) Каждая непрерывная на S функция является интегрируемой по S.

б) Каждая ограниченная на S функция, которая непрерывна на S, за исключением точек, лежащих на конечном числе гладких кривых, интегрируема по S; значения функции на таких кривых можно произвольно изменять (если только измененная функция остается ограниченной), не меняя значения интеграла.

Свойства двойных интегралов. Если функции интегрируемы по области, то имеют место следующие свойства.

1) *Аддитивность относительно подынтегральных выражений:*

$$\iint_{(S)} [f(x, y) + g(x, y)]\, dx\, dy = \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{(S)} g(x, y)\, dx\, dy.$$

2) *Аддитивность относительно областей*: если S_1, S_2 – две области без общих внутренних точек, то

$$\iint_{(S_1 \cup S_2)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(S_1)} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{(S_2)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

3) *Постоянный множитель* можно выносить за знак интеграла:

$$\iint_{(S)} Af(x, y)\, dx\, dy = A \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

4) Если для каждой точки $(x, y) \in S$ выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \int_{(S)} g(x, y)\, dx\, dy.$$

5) Если $f(x, y)$ интегрируема по S, то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема по S и

$$\left|\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy\right| \leqslant \iint_{(S)} |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

6) Если m является нижней, а M – верхней границей для $f(x, y)$ на S, и если ΔS – площадь области S, то

$$m\, \Delta S \leqslant \iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant M\, \Delta S.$$

7) *Теорема о среднем значении.* Если $f(x, y)$ непрерывна в (связной) области S, то существует по меньшей мере одна точка $(\xi, \eta) \in S$ такая, что

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta)\, \Delta S.$$

8) Если $\{S_n\}$ – последовательность областей с площадями ΔS_n и диаметрами ρ_n и если каждая область содержит точку M и $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$ (в этом случае говорят, что последовательность S_n стягивается в точку M), то для непрерывной функции $f(x, y)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta S_n} \iint_{(S_n)} f(x, y)\, dx\, dy = f(M)$$

(*дифференцирование по области*).

3.1.10.2. Вычисление двойных интегралов.

а) Если

$$S = \{(x;\ y)\,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\},$$

где y_1, y_2 – непрерывные функции на $[a, b]$ (рис. 3.33), то

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx,$$

т. е. двойной интеграл может быть вычислен в результате двух последовательно проведенных простых интегрирований. Скобки можно опустить,

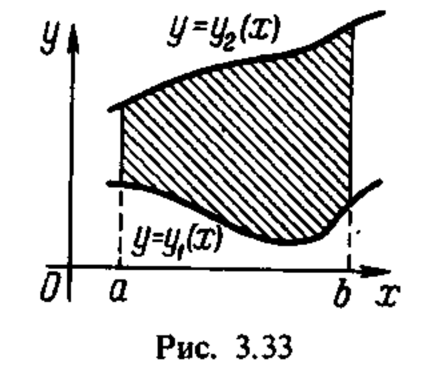


Рис. 3.33

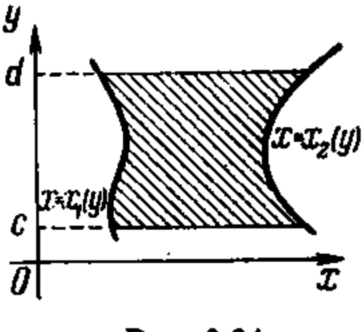


Рис. 3.34

если условиться, что второму знаку интеграла соответствует первое переменное интегрирования.

б) Аналогичная формула имеет место для

$$S = \{(x, y)\,|\, x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

(рис. 3.34):

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\right) dy.$$

Пример. Пусть S – область, заключенная между кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ (рис. 3.35); тогда $a=0$, $b=1$, $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=\sqrt{x}$; отсюда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx;$$

если, в частности, $f(x, y)=xy$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{2}x(x-x^4)\,dx=\frac{1}{12}.$$

Область S может быть описана также в форме б), где $c=0$, $d=1$, $x_1(y)=y^2$, $x_2(y)=\sqrt{y}$. Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

в) Если область S можно разбить на конечное число областей, заданных, как в случаях а) или б)

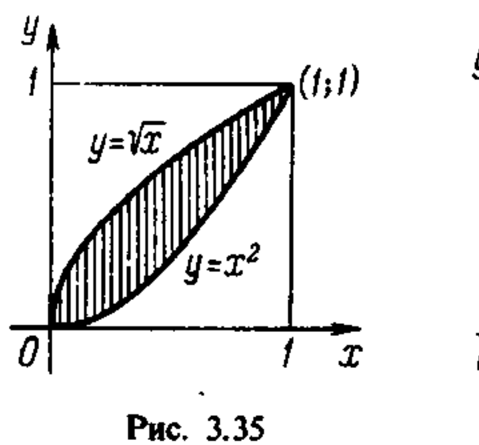


Рис. 3.35

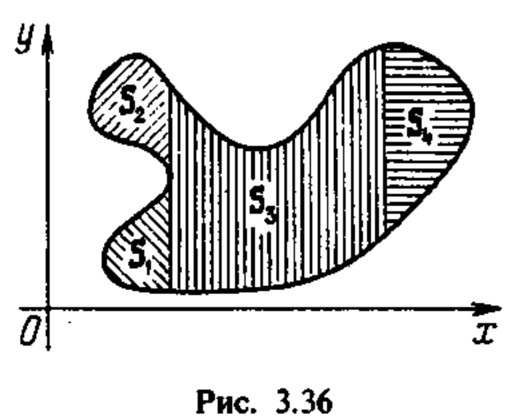


Рис. 3.36

(рис. 3.36), то для вычисления интеграла по S используется свойство 2) из 3.1.10.1.

3.1.10.3. Замена переменных в двойных интегралах. Пусть функции $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ взаимно однозначно отображают открытую область G, содержащую область G плоскости u, v с кусочно гладкой границей, на открытую область P, содержащую область S плоскости xy, и пусть S – образ G, причем в O функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и их первые частные производные непрерывны, а якобиан отличен от нуля:

$$J=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на S, то справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)} f(x(u, v),\ y(u, v))\,|J|\,du\,dv.$$

Выражение $|J|\,du\,dv$ называется *элементом площади в криволинейных координатах* u, v. Формула преобразования остается верной и тогда, когда сделанные предположения нарушены вдоль конечного числа кусочно гладких кривых, при условии, что функция $f(x, y)$ и якобиан остаются там ограниченными.

Специальные криволинейные координаты.

1. *Полярные координаты.* Пусть S – область, полученная взаимно однозначным отображением области G плоскости ρ, φ, определяемым функциями $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $|J|=\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)}\right|=\rho$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Пример. $f(x, y)=xy$, и область S – четверть круга: $x^2+y^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; функции $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ также задают область S, являющуюся взаимно однозначным (за исключением отрезка $\rho=0$) образом области

$$G=\{(\rho;\ \varphi)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy=\iint\limits_{(G)}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^R\int\limits_0^{\pi/2}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho=\int\limits_0^R\rho^3\left[-\frac{\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2}d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^R\rho^3\,d\rho=\frac{1}{8}R^4.$$

2. *Обобщенные полярные координаты.* В случае, когда область интегрирования S ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, удобны обобщенные полярные координаты $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$; тогда имеем

$$J=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)}\right|=ab\rho,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dS=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} f(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)\,ab\rho\,d\varphi\,d\rho.$$

3. Если область S ограничена *астроидой* с параметрическим представлением $x=a\cos^3 t$,

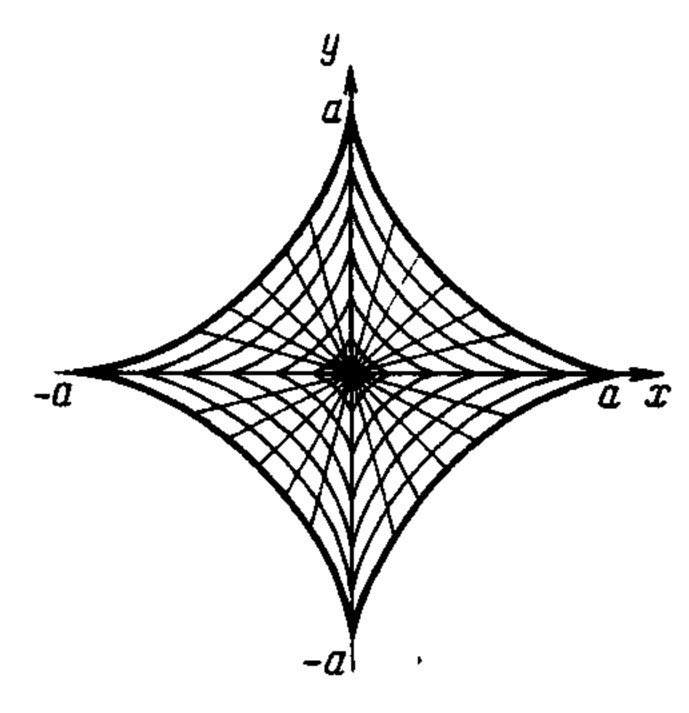


Рис. 3.37

$y=a\sin^3 t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ (рис. 3.37), то вводят криволинейные координаты $x=u\cos^3 v$, $y=u\sin^3 v$. Для фиксированного v получаются прямые, проходящие через начало координат; $u=\text{const}$ дает семейство астроид, $J=3u\sin^2 v\cos^2 v$.

3.1.10.4. Геометрические и физические приложения двойных интегралов.

Истолкование двойного интеграла как объема. Если $f(x, y) \geqslant 0$ на S, то двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

интерпретируется как объем цилиндрического тела, основанием которого служит область S плоскости x, y и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$ (рис. 3.38). Если, в частности, $f(x, y) = 1$, то получают объем цилиндра с плоскостью

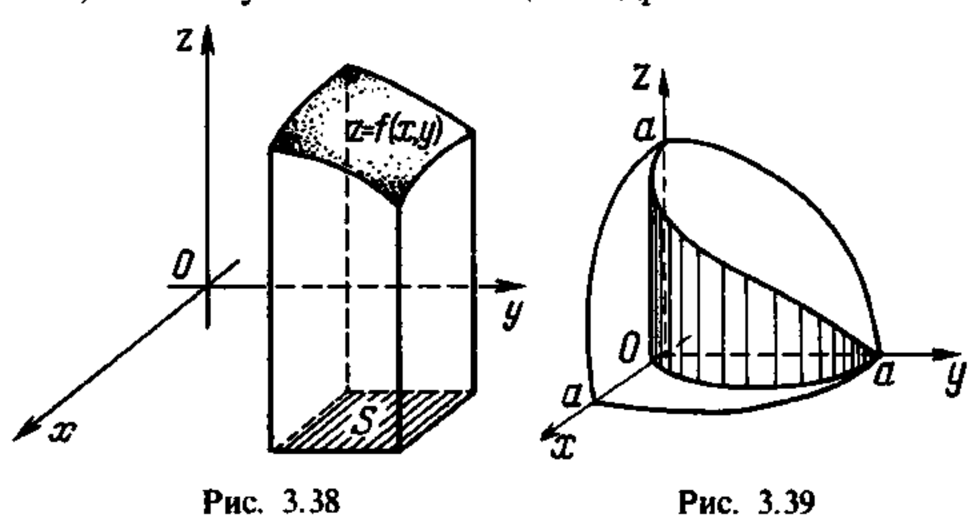


Рис. 3.38 Рис. 3.39

$z = 1$ в качестве верхнего основания. Объем этого цилиндра численно равен площади ΔS области S:

$$\Delta S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy.$$

Примеры. 1) Найти объем цилиндрического тела, в основании которого находится круг $x^2 + y^2 \leqslant ay$, $z = 0$ и которое сверху ограничено частью поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (рис. 3.39). На основании симметрии можно записать, что

$$V = 2 \iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

где S – полукруг $x^2 + y^2 \leqslant ay$, $x \geqslant 0$. В полярных координатах $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ область S описывается неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant a \sin \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, поэтому

$$V = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{a \sin \varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Подставим во внутренний интеграл $t = \sqrt{a^2 - \rho^2}$; имеем

$$V = -2 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_a^{a \cos \varphi} t^2\, dt\, d\varphi = -\frac{2}{3} a^3 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^3 \varphi - 1)\, d\varphi.$$

Используя преобразование $\cos^3 \varphi = \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi$, получаем окончательно

$$V = \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

2) Найти площадь области, ограниченной *астроидой* $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (см. рис. 3.37). В результате введения криволинейных координат $x = u \cos^3 v$, $y = u \sin^3 v$ (см. 3.1.10.3) получаем

$$\Delta S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} 3u \sin^2 v \cos^2 v\, dv\, du = 3 \int\limits_0^a u\, du \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2v\, dv =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4v)\, dv = \frac{3\pi}{8} a^2.$$

Центр тяжести и масса. Координаты ξ и η центра тяжести области S с массой, распределенной с плотностью $\delta(x, y)$, определяются по формулам

$$\xi = \frac{1}{M} \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, x\, dS, \qquad \eta = \frac{1}{M} \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, y\, dS,$$

где M – масса области S: $M = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, dS$.

Момент инерции. Момент инерции I_x плоской области S с массой, распределенной с плотностью $\delta(x, y)$, относительно оси x есть

$$I_x = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, y^2\, dS;$$

момент инерции I_y относительно оси y:

$$I_y = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)\, x^2\, dS;$$

полярный момент инерции относительно начала координат:

$$I_O = \iint\limits_{(S)} \delta(x, y)(x^2 + y^2)\, dS.$$

3.1.11. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1.11.1. Определение тройного интеграла и простейшие свойства. Пусть задана ограниченная пространственная область *) V, граница которой является кусочно гладкой поверхностью (см. 3.1.12). Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена в области V. Посредством выбора сети кусочно гладких поверхностей строится некоторое разбиение Z области V на конечное число элементарных областей V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с объемами ΔV_i.

Пусть $\Delta(Z)$ – наибольший диаметр элементарных областей V_i, и пусть $M_i(x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка в каждой элементарной области V_i. Число $\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$ называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $M_i \in V_i$.

Функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* по области V, если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$. Число I называется *тройным интегралом* функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается следующим образом:

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV, \qquad I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Этому определению интегрируемости эквивалентно следующее: функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V, если для каждой последовательности Z_n разбиений области V, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta(Z_n) = 0$, последовательность $\sigma(Z_n, \{M_i^{(n)}\})$ интегральных сумм всегда сходится независимо от выбора точек M_i (в этом случае все последовательности

---

*) См. сноску к 3.1.10.

интегральных сумм сходятся к одному и тому же значению, которое и есть значение интеграла).

Интегрируемые функции.

а) Каждая непрерывная на V функция является интегрируемой по V.

б) Каждая ограниченная на V функция, которая непрерывна на V, за исключением точек, лежащих на конечном числе гладких поверхностей, является интегрируемой по V. Если функция в точках таких поверхностей произвольно изменяется (однако так, что измененная функция остается ограниченной), то значение интеграла не изменится.

Свойства тройных интегралов. Тройные интегралы имеют свойства, соответствующие рассмотренным в 3.1.10.1 для двойных интегралов.

3.1.11.2. Вычисление тройных интегралов.

1. Пусть V является *цилиндрическим* телом, проекция которого на плоскость x, y есть область S и которое ограничено снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$,

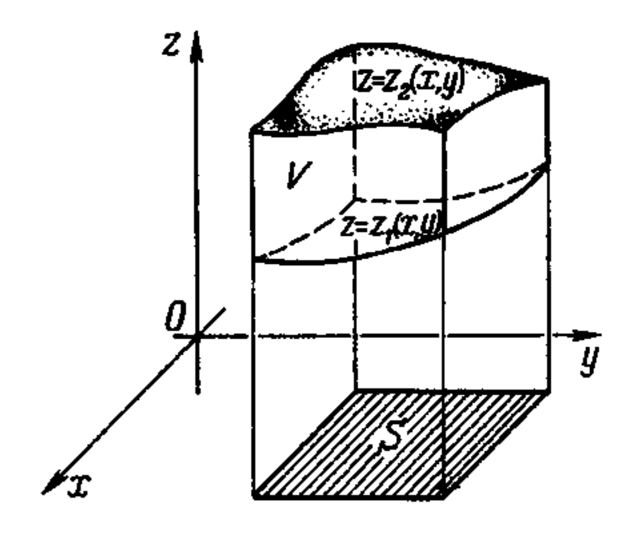


Рис. 3.40

где z_1, z_2 – непрерывные функции в S (рис. 3.40); тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} \left(\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Интегрированием по z тройной интеграл сводится к двойному интегралу по области S.

Если область S плоскости x, y определена при этом неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где y_1, y_2 – непрерывные функции на $[a, b]$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

Пример. Пусть V – тело, ограниченное эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; тогда S состоит из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$; таким образом, имеем

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy,$$

а так как S полностью описывается неравенствами

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx.$$

2. Пусть V лежит между плоскостями $x = a$ и $x = b$, а каждая плоскость $x = \text{const}$, где $a \leqslant$

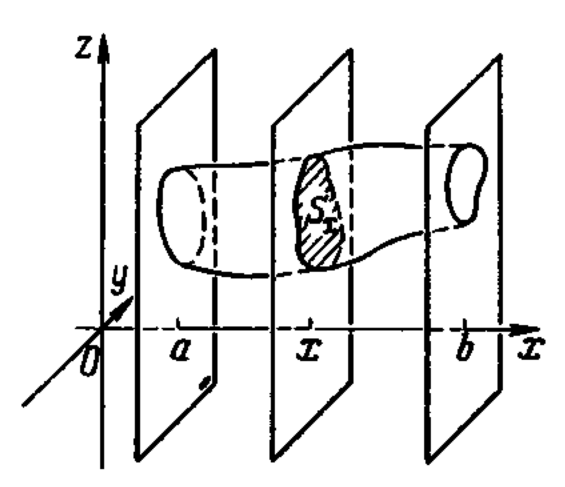


Рис. 3.41

$\leqslant x \leqslant b$, пересекает область V по плоской области S_x (рис. 3.41); тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \Big(\iint\limits_{(S_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz \Big)\,dx.$$

Пример. Пусть V – тело, ограниченное конической поверхностью $R^2x^2 = h^2(y^2 + z^2)$ (рис. 3.42); этот конус лежит

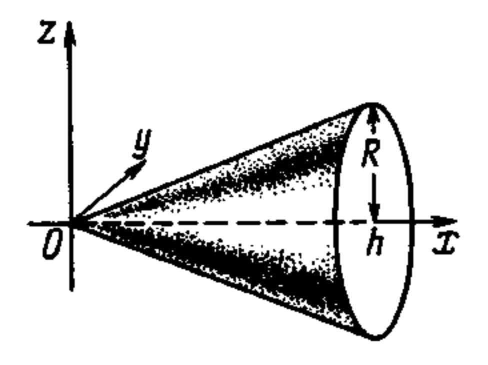


Рис. 3.42

между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, и S_x – круг $y^2 + z^2 \leqslant (Rx/h)^2$. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^h \left(\iint\limits_{(S_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz \right) dx.$$

Если, например,

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

то интеграл по плоской области S_x можно вычислить введением полярных координат $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$:

$$I(x) = \iint\limits_{(S_x)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{Rx/h} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Делаем подстановку $u = \sqrt{\rho^2 + x^2}$:

$$I(x) = 2\pi x \int\limits_x^{x\sqrt{1 + (R/h)^2}} du = \frac{2\pi x^2}{h}(l - h), \quad l = \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Поэтому значение искомого тройного интеграла равно

$$\int\limits_0^h I(x)\,dx = \frac{2\pi}{3} h^2 (l - h).$$

3.1.11.3. Замена переменных в тройных интегралах. Пусть посредством функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ производится взаимно однозначное отображение открытого множества, содержащего область G пространства u, v, w, ограниченную кусочно гладкими поверхностями, на открытое множество, содержащее область V пространства x, y, z, и V есть образ G при этом отображении. Если эти три функции x, y, z вместе со своими первыми частными производными непрерывны в G и

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то для каждой непрерывной функции $f(x, y, z)$ справедлива формула

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{(G)} f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))\, |J|\, du\, dv\, dw.$$

Выражение $|J|\, du\, dv\, dw$ называется *элементом объема в криволинейных координатах* u, v, w.

Эта формула преобразования остается верной также и тогда, когда на конечном числе кусочно гладких поверхностей указанные условия нарушены (если, однако, функция $f(x, y, z)$ и якобиан остаются ограниченными).

Специальные криволинейные координаты.

1. *Сферические координаты.* Пусть область V получена из области G взаимно однозначным отображением $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$; при этом $J = \rho^2 \sin\theta$. Тогда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(G)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Элемент объема в сферических координатах есть, таким образом, $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

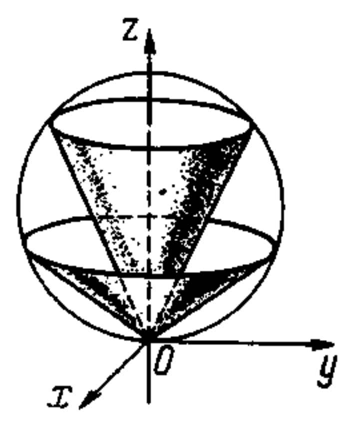


Рис. 3.43

Пример. Пусть V – область в пространстве, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ и двумя коническими поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\alpha$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\beta$ $\left(x < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 3.43). В сферических координатах ρ, φ, θ область V определяется неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\theta$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. Отсюда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_\alpha^\beta \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{2\pi} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\, \rho^2\sin\theta\, d\varphi\, d\rho\, d\theta.$$

2. *Обобщенные сферические координаты:* $x = a\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\theta$. Тогда $J = abc\rho^2\sin\theta$.

3. *Цилиндрические координаты:* $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тогда $J = \rho$.

3.1.11.4. Геометрические и физические приложения тройных интегралов.

1. *Объем* пространственной области: в случае частного вида подынтегральной функции $f(x, y, z) = 1$ тройной интеграл по V представляет собой объем ΔV области V:

$$\iiint_{(V)} 1 \cdot dx\, dy\, dz = \Delta V.$$

Пример. Если V – тело, описанное в примере в 3.1.11.3, то его объем равен

$$\iiint_{(V)} 1 \cdot dx\,dy\,dz = \int_\alpha^\beta \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_0^{2a\cos\theta} 2\pi\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta 8a^3\cos^3\theta\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{16\pi}{3}a^3\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_\alpha^\beta = \frac{4\pi}{3}a^3(\cos^4\alpha - \cos^4\beta).$$

2. *Масса* тела V. Если пространственная область V заполнена массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, то полная масса V равна

$$M = \iiint_{(V)} \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

3. *Центр тяжести.* Если ξ, η, ζ являются координатами центра тяжести пространственной области, заполненной массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, то

$$\xi = \frac{1}{M}\iiint_{(V)} x\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\eta = \frac{1}{M}\iiint_{(V)} y\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\zeta = \frac{1}{M}\iiint_{(V)} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

4. *Момент инерции.* Моменты инерции пространственной области V, заполненной массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, относительно осей x, y и z равны соответственно

$$I_x = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2)\,\delta\, dV,$$

$$I_y = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2)\,\delta\, dV,$$

$$I_z = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2)\,\delta\, dV.$$

Пример. Найти момент инерции относительно оси z тела V, ограниченного круговым цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, которое равномерно заполнено массой с плотностью $\delta = 1$. Введем цилиндрические координаты;

тогда

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, dV = \int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^a \rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz =$$

$$= \int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^h \frac{2\pi}{4} a^4 \, dz = \frac{a^4 h\pi}{2} = \frac{a^2}{2} \Delta V,$$

где $\Delta V = \pi a^2 h$ – объем тела V.

5. *Гравитационное притяжение.* Сила гравитационного притяжения **F**, с которой пространственный объем V, заполненный массой с плотностью $\delta(x, y, z)$, по закону Ньютона действует на материальную точку $P = (\xi, \eta, \zeta)$ с массой 1, имеет компоненты

$$F_x = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{x - \xi}{r^3} \delta \, dx \, dy \, dz,$$

$$F_y = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{y - \eta}{r^3} \delta \, dx \, dy \, dz,$$

$$F_z = \gamma \iiint\limits_{(V)} \frac{z - \zeta}{r^3} \delta \, dx \, dy \, dz,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, γ – гравитационная постоянная.

3.1.12. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кусок поверхности S, заданный в параметрической форме: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где точка (u, v) пробегает некоторую область *) G плоскости u, v, называется *гладким*, если различные пары значений (u, v) дают разные точки S, частные производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны и

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2.$$

Если поверхность S состоит из конечного числа гладких кусков поверхности, то S называется *кусочно гладкой*.

Гладкая поверхность S называется *двусторонней*, если в каждой точке поверхности можно выбрать нормаль так, что при обходе каждой замкнутой кривой, лежащей на S, мы, непрерывно изменяя нормаль при движении по кривой, возвращаемся в исходную точку кривой с тем же направлением нормали. *Стороны* двусторонней поверхности могут быть, таким образом, охарактеризованы направлением соответствующих нормалей. Не двусторонней, т. е. *односторонней поверхностью*, является, например, *лист Мёбиуса* (рис. 3.44).

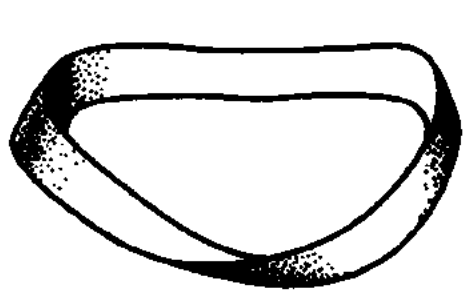


Рис. 3.44

*) См. сноску к п. 3.1.10.

Всюду в дальнейшем под *поверхностью* понимается двусторонняя поверхность.

3.1.12.1. Площадь гладкой поверхности. Пусть поверхность S задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где точка (u, v) пробегает некоторую область Γ плоскости u, v. Тогда площадь ΔS поверхности определяется поверхностным интегралом

$$\Delta S = \iint\limits_{(\Gamma)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

где $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$; подынтегральное выражение $dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ называется *элементом поверхности*.

Если S задана явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, причем (x, y) пробегает область S' (проекцию области S на плоскость xOy), то

$$\Delta S = \iint\limits_{(S')} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

где $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$.

Примеры. 1) Найти площадь поверхности части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, высекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = ay$ (см. рис. 3.39).

Параметрическое представление сферической поверхности:

$$x = a \sin\theta \cos\varphi, \quad y = a \sin\theta \sin\varphi, \quad z = a\cos\theta;$$

таким образом, $u = \theta$, $v = \varphi$; находим $E = a^2$, $F = 0$, $G = a^2 \sin^2\theta$; следовательно, $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin\theta$.

Уравнение границы области интегрирования получается подстановкой параметрического представления в уравнение окружности: $\sin\theta = \sin\varphi$. Отсюда получим, что четверть искомой поверхности, лежащая в первом октанте, характеризуется следующими значениями параметров: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $\theta \leqslant \varphi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Следовательно,

$$\Delta S = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\varphi} a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = 4a^2(\pi/2 - 1).$$

2) Кусок поверхности $z = xy$, лежащий над кругом $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, имеет площадь

$$\Delta S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Преобразуя этот интеграл при помощи полярных координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим

$$\Delta S = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \rho \sqrt{1 + \rho^2} \, d\rho \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left((1 + R^2)^{3/2} - 1\right).$$

3.1.12.2. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.

Определение поверхностного интеграла 1-го рода. Пусть некоторая функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена на гладкой поверхности S. Пусть Z обозначает некоторое разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с площа-

дями ΔS_i, $\Delta(Z)$ – наибольший из диаметров элементарных поверхностей S_i и $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка на соответствующей элементарной поверхности ρ_i (рис. 3.45). Число

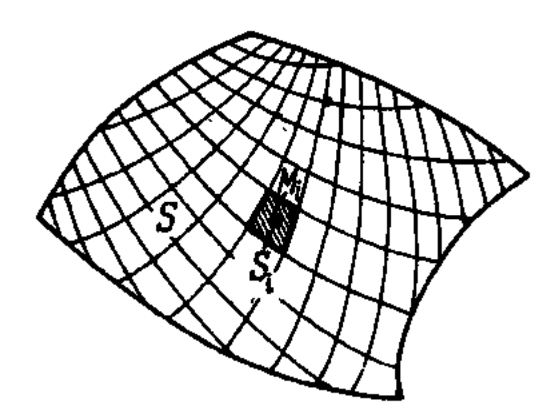


Рис. 3.45

$$\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $\{M_i\}$.

Если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, и независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$, то I называется *поверхностным интегралом 1-го рода* от $f(x, y, z)$ по поверхности S. Обозначение: $I = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS$.

Для случая $f(x, y, z) \equiv 1$ число I равно площади ΔS поверхности S.

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода (сведение к двойному интегралу). Если поверхность задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, причем u и v пробегают область Γ плоскости u, v, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Если поверхность задана явно уравнением $z = \varphi(x, y)$, причем (x, y) пробегает область S', то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(S')} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Для случая, если S представлена уравнениями вида $x = \psi(y, z)$ или $y = \chi(x, z)$, верны аналогичные формулы.

Примеры. 1) Пусть поверхность S является сферой радиуса r с параметрическим представлением $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; тогда Γ есть прямоугольник $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

2) Пусть S – цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$; ее параметрическое представление: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = z$; тогда $\sqrt{EG - F^2} = a$, Γ является прямоугольником $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(\Gamma)} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)\, a\, d\varphi\, dz = a \int_0^{h}\int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)\, d\varphi\, dz.$$

Определение поверхностного интеграла 2-го рода. Ориентация двусторонней незамкнутой поверхности: выбирается определенная сторона поверхности S; обход замкнутой кривой на S считается согласованным с выбранной стороной, если образуется *правый винт*, т. е. из конца вектора нормали обход кажется происходящим против часовой стрелки.

Пусть в точках поверхности S, однозначно проектирующейся на плоскость x, y и заданной явно гладким уравнением $z = \varphi(x, y)$, определена ограниченная функция $f(x, y, z)$. Пусть Z – разбиение поверхности S на конечное число элементарных поверхностей S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), $\Delta(Z)$ – наибольший диаметр элементарных поверхностей, $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ – произвольная точка, выбранная на элементарной поверхности S_i. Пусть выбрана определенная сторона поверхности, т. е. поверхность S ориентирована. Тогда установленное направление обхода границы каждой элементарной поверхности S_i определяет направление обхода в плоскости x, y границы проекции S_i'. Площадь $\Delta S_i'$ этой проекции берется со знаком плюс, если граница проекции S_i' проходится в положительном направлении; в противном случае – со знаком минус (рис. 3.46). Число

$$\sigma(Z, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i'$$

называется *интегральной суммой*, соответствующей разбиению Z и выбору точек $\{M_i\}$. В противоположность образованию интегральных сумм

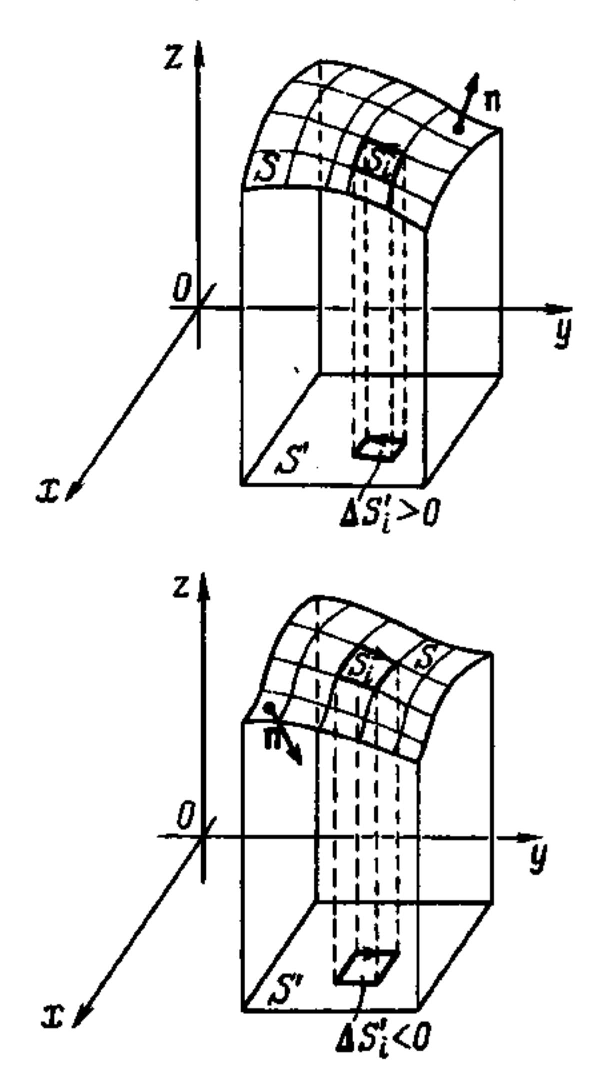


Рис. 3.46

поверхностных интегралов 1-го рода, здесь $f(M_i)$ умножается не на площадь ΔS_i элементарной поверхности S_i, а на ориентированную площадь $\Delta S_i'$ *проекции* S_i' поверхности S_i на плоскость x, y.

Если существует число I со следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого разбиения Z, удовлетворяющего условию $\Delta(Z) < \delta$, независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma(Z, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$, то

I называют *поверхностным интегралом 2-го рода* от $f(x, y, z)\,dx\,dy$ по ориентированной поверхности S. Обозначение:

$$I = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Если S проектируется на плоскость x, y неоднозначно, но ее можно разбить на конечное число поверхностей, для каждой из которых такая однозначная проекция существует, то поверхностный интеграл по S определяется как сумма интегралов по отдельным поверхностям.

Если S имеет однозначную проекцию на плоскость y, z или x, z, то аналогично можно определить два других поверхностных интеграла 2-го рода:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx,$$

где в соответствующих интегральных суммах стоят площади проекций S_i на плоскости y, z и x, z.

Наконец, для трех функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, определенных на S, эти интегралы можно сложить и определить более общий *поверхностный интеграл 2-го рода:*

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + \iint\limits_{(S)} Q\,dz\,dx + \iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy.$$

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода (сведение к двойному интегралу).

1. Пусть поверхность S имеет явное представление: $z = \varphi(x, y)$, причем (x, y) изменяются в области S', а φ непрерывна в S'. Тогда поверхностный интеграл по той стороне S, для которой угол между нормалью и осью z является *острым*, вычисляется по следующей формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S')} f(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy.$$

Если выбрана другая сторона поверхности, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{(S')} f(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy.$$

Аналогично получаем, что

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_{(S')} f(\psi(y, z), y, z)\,dy\,dz,$$

где поверхность S задана уравнением $x = \psi(y, z)$, S' – проекция S на плоскость y, z, а поверхностный интеграл берется по той стороне, нормаль к которой образует с осью x *острый угол.* Точно так же

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx = \iint\limits_{(S')} f(x, \chi(z, x), z)\,dz\,dx,$$

где поверхность S задана уравнением $y = \chi(z, x)$, S' – проекция S на плоскость x, z, а поверхностный интеграл берется по той стороне, нормаль к которой составляет с осью y *острый угол.*

2. Если поверхность S задана в параметрической форме: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \pm \iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,C\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz = \pm \iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,A\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx = \pm \iint\limits_{(\Gamma)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,B\,du\,dv,$$

где

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)};$$

положительный знак перед интегралом справа выбирается тогда, когда ориентация области Γ плоскости u, v соответствует ориентации поверхности (т. е. обход контура на Γ и его образа на поверхности одновременно согласованы с верхней стороной Γ и выбранной стороной поверхности).

Для суммы трех интегралов получаем

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \pm \iint\limits_{(\Gamma)} (PA + QB + RC)\,du\,dv.$$

Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода. Если α, β, γ – углы нормали к выбранной стороне поверхности с осями x, y и z, то

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

т. е. стоящий слева поверхностный интеграл 2-го рода преобразуется в стоящий справа поверхностный интеграл 1-го рода.

Для *двух различных незамкнутых* поверхностей S_1 и S_2 с одной и той же границей C (стороны которых согласованы с заданным обходом контура C) поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

имеет в общем случае разные значения (рис. 3.47), т. е. в общем случае он не обращается в нуль на замкнутой поверхности (аналогично зависимости от пути криволинейного интеграла). Если функции P, Q, R, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ непрерывны в «пространственно односвязной» области V (т. е. в области, которая наряду с каждой замкнутой поверхностью содержит также и область, ограниченную этой поверхностью), то поверхностный интеграл по

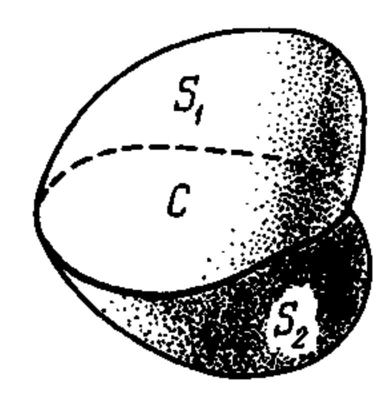


Рис. 3.47

всякой замкнутой поверхности S и V обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

Пример. Пусть (x, y, z) – некоторая точка поверхности S, а (ξ, η, ζ) – точка вне S, и

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Функции $P=\frac{x-\xi}{r^3}$, $Q=\frac{y-\eta}{r^3}$, $R=\frac{z-\zeta}{r^3}$ и их производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны при $(x, y, z)\neq(\xi, \eta, \zeta)$, и имеет место равенство $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$; таким образом, для этих функций интеграл $\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$ равен нулю по каждой замкнутой поверхности, ограничивающей тело, не содержащее точки (ξ, η, ζ).

Переход к поверхностному интегралу 1-го рода:

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{x-\xi}{r^3}dy\,dz+\frac{y-\eta}{r^3}dz\,dx+\frac{z-\zeta}{r^3}dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha+\frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta+\frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma\right)dS.$$

Если $(\mathbf{r}\hat{,}\mathbf{n})$ – угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки (x, y, z) поверхности и нормалью к S в точке (x, y, z), то

$$\frac{x-\xi}{r}\cos\alpha+\frac{y-\eta}{r}\cos\beta+\frac{z-\zeta}{r}\cos\gamma=$$

$$=\cos(x\hat{,}\mathbf{r})\cos\alpha+\cos(y\hat{,}\mathbf{r})\cos\beta+\cos(z\hat{,}\mathbf{r})\cos\gamma=\cos(\mathbf{r}\hat{,}\mathbf{n}),$$

так что для поверхностного интеграла получаем, что

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{\cos(\mathbf{r}\hat{,}\mathbf{n})}{r^2}\,dS.$$

Геометрически этот интеграл представляет собой телесный угол, под которым из точки (ξ, η, ζ) видна поверхность S. Если поверхность S замкнута, то его значение равно 4π, если точка (ξ, η, ζ) лежит внутри области, ограниченной S, и 0, если (ξ, η, ζ) лежит снаружи.

3.1.12.3. Геометрические и физические приложения поверхностного интеграла.

Объем тела. Объем ΔV тела V, ограниченного кусочно гладкой поверхностью S, можно различными способами вычислить как поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\Delta V=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy,\ \text{или}\ \Delta V=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz,$$

или

$$\Delta V=\iint\limits_{(S)} y\,dz\,dx,$$

или

$$\Delta V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy,$$

причем интегралы следует брать по внешней стороне поверхности S.

Пример. Пусть пространственная область V ограничена эллипсоидом $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$. Параметрическое представление этой поверхности есть

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cos\theta,$$

где $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ (область Γ плоскости φ, θ). Отсюда, так как

$$C=\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)}=ab\sin\theta\cos\theta,$$

следует, что

$$\Delta V=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy=\iint\limits_{(\Gamma)}\chi(\theta, \varphi)\,C\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}c\cos\theta\,ab\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=abc\cdot 2\pi\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=2abc\pi\int\limits_{-1}^{1}u^2\,du=\frac{4\pi}{3}abc.$$

Центр тяжести и сила притяжения. Если поверхность S покрыта массой с поверхностной плотностью $\delta(x, y, z)$, то полная масса поверхности S равна

$$M=\iint\limits_{(S)}\delta(x, y, z)\,dS;$$

координаты (ξ, η, ζ) центра тяжести равны

$$\xi=\frac{1}{M}\iint\limits_{(S)}x\,\delta(x, y, z)\,dS,\quad \eta=\frac{1}{M}\iint\limits_{(S)}y\delta(x, y, z)\,dS,$$

$$\zeta=\frac{1}{M}\iint\limits_{(S)}z\delta(x, y, z)\,dS;$$

компоненты силы притяжения $\mathbf{F}$ этого распределения массы, действующей на материальную точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ единичной массы, равны

$$F_x=\gamma\iint\limits_{(S)}\frac{x-x_0}{r^3}\,\delta\,dS,\quad F_y=\gamma\iint\limits_{(S)}\frac{y-y_0}{r^3}\,\delta\,dS,$$

$$F_z=\gamma\iint\limits_{(S)}\frac{z-z_0}{r^3}\,\delta\,dS,$$

где γ – гравитационная постоянная.

Пример. Пусть поверхность конуса (см. рис. 3.42) $R^2x^2=h^2(y^2+z^2)$ покрыта массой с плотностью $\delta=1$. Из условия симметрии $\eta=\zeta=0$; так как поверхность S задана уравнением

$$x=\psi(y, z)=\frac{h}{R}\sqrt{y^2+z^2},$$

причем y и z пробегают внутренность круга $y^2+z^2=R^2$, получаем

$$I=\iint\limits_{(S)}x\,dS=\iint\limits_{(y^2+z^2\leqslant R^2)}x\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{h}{R}\iint\limits_{(y^2+z^2\leqslant R^2)}\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\,dy\,dz.$$

После введения в плоскости y, z полярных координат $y=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$ получаем, что

$$I=\frac{h}{R}\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\rho^2d\rho\,d\varphi=\frac{2\pi}{3}hR\sqrt{h^2+R^2},$$

а так как $M=\pi R\sqrt{h^2+R^2}$, то $\xi=\frac{2}{3}h$.

3.1.13. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

3.1.13.1. Формула Остроградского – Гаусса. Формула Грина. Пусть пространственная область*) V ограничена кусочно гладкой поверхностью S и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – функции, непрерывные в открытом множестве, содержащем $V \bigcup S$, вместе с производными $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$; тогда справедлива следующая формула (*формула Остроградского – Гаусса*):

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dy\,dx,$$

причем поверхностный интеграл 2-го рода, стоящий справа, следует брать по *внешней стороне* поверхности S, ограничивающей область V.

Формула Грина для плоской области:

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy.$$

Эта формула преобразует двойной интеграл по области S в криволинейный интеграл по границе L области S, причем криволинейный интеграл берется по контуру L, пробегаемому в положительном направлении (рис. 3.48). Эта формула справедлива, если контур L является кусочно гладким, а функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ непрерывны в открытом множестве, содержащем $S \bigcup L$.

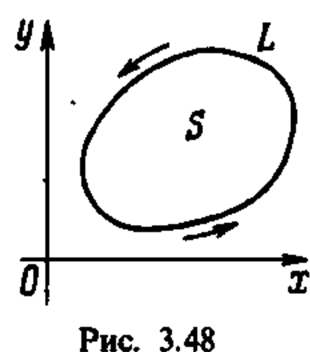


Рис. 3.48

Пример. По формуле Остроградского – Гаусса для $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$ получаем, что

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = 3 \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dV.$$

Если, в частности, S является сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то тройной интеграл после введения сферических координат равен

$$3 \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \rho^2 \sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,d\rho = \frac{12\pi}{5} R^5.$$

3.1.13.2. Формулы Грина. Пусть в открытом множестве G, содержащем пространственную область V, ограниченную кусочно гладкой поверхностью S, заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, непрерывные в области G вместе со своими вторыми частными производными. Тогда справедлива *первая формула Грина* (или подготовительная):

$$\iiint\limits_{(V)} P\,\Delta Q\,dV = \iint\limits_{(S)} P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} dS - \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial Q}{\partial z} \right) dV,$$

где $\Delta Q = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial z^2}$, а через $\partial P/\partial \mathbf{n}$ и $\partial Q/\partial \mathbf{n}$ обозначены производные функций P и Q соответственно в направлении *внешней нормали* к S.

При тех же предположениях справедлива *вторая формула Грина*:

$$\iiint\limits_{(V)} (P\,\Delta Q - Q\,\Delta P)\,dV = \iint\limits_{(S)} \left(P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} - Q \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Для случая плоской области эти формулы имеют вид

$$\iint\limits_{(S)} P\,\Delta Q\,dS = \int\limits_{(L)} P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} ds - \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} (P\,\Delta Q - Q\,\Delta P)\,dS = \int\limits_{(L)} \left(P \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} - Q \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right) ds,$$

где S – область плоскости x, y; L – ее граница, обходимая в положительном направлении (см. рис. 3.48); $\dfrac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}}$ – производные в направлении *внешней нормали* к кривой L; $\Delta P = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$.

3.1.13.3. Формула Стокса. Пусть система координат является правой, пусть кусочно гладкая двусторонняя незамкнутая поверхность S, ограниченная кусочно гладким контуром L, расположена внутри пространственной области V, и пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вместе со своими первыми частными производными непрерывны в V. Тогда справедлива следующая формула (*формула Стокса*):

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx = \int\limits_{(L)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

причем путь интегрирования L проходится так, чтобы направление обхода вместе с нормалью к выбранной стороне поверхности S образовывало правый винт (рис. 3.49).

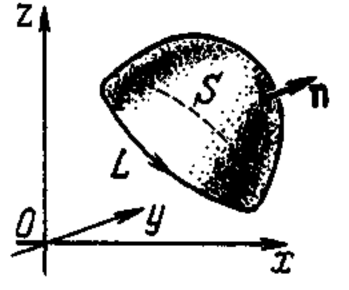


Рис. 3.49

3.1.13.4. Несобственные криволинейные, двойные, поверхностные и тройные интегралы. В случае многомерных интегралов несобственные интегралы можно определить так же, как в одномерном случае. Эти определения аналогичны для криволинейных, двойных, поверхностных и тройных интегралов, и поэтому достаточно их привести, например, для двойных интегралов.

Двойные интегралы от неограниченных функций. Пусть функция $f(x, y)$ не ограничена в окрестности некоторой точки M_0 ограниченной области S и интегрируема по всякой

*) См. сноску к 3.1.10.

области $S\setminus U(M_0)$, где $U(M_0)$ – произвольная окрестность точки M_0. Тогда, если для любой последовательности окрестностей U_n точки M_0, диаметры которых стремятся к 0, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S\setminus U_n)} f(x, y)\,dx\,dy = I,$$

где $S\setminus U_n$ обозначает область, полученную исключением точек окрестности U_n из S, то I называется *сходящимся несобственным двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по S; обозначение:

$$I = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Если предел существует не для всякой последовательности U_n, то интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$ называется *расходящимся*.

Если в S всегда $f(x, y)\geqslant 0$, то при выборе окрестностей U_n можно ограничиться кругами. Данное определение можно распространить на тот случай, когда $f(x, y)$ не ограничена в окрестностях большего числа точек или в окрестностях гладких кривых.

Пример. Пусть S – круг $x^2+y^2\leqslant 1$ и $f(x, y) = (x^2+y^2)^{-\alpha/2}$; если $\alpha>0$, то $f(x, y)$ не ограничена в окрестности начала координат. Так как $f(x, y)\geqslant 0$, то можно ограничиться кругами. Пусть U_n – круги с радиусами ρ_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 0$. Если в области $S\setminus U_n$ введены полярные координаты, то

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S\setminus U_n)}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\rho_n}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\rho\,d\varphi\,d\rho}{\rho^\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi\frac{1}{2-\alpha}\left[\rho^{2-\alpha}\right]_{\rho_n}^{1} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\quad\text{при } 0<\alpha<2,$$

в то же время при $\alpha\geqslant 2$ предел не существует; следовательно, при $0<\alpha<2$ несобственный интеграл сходится и

$$\iint\limits_{(S)}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\quad\text{при } 0<\alpha<2;$$

при $\alpha\geqslant 2$ несобственный интеграл расходится.

Аналогично доказывается, что несобственный тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ по шару V с центром в начале координат сходится, если $0<\alpha<3$, и расходится, если $\alpha\geqslant 3$.

Признак сходимости. Если f, g – неотрицательные функции в области S, интегрируемые в дополнениях окрестностей точки M_0, и если в некоторой окрестности точки M_0 функция $f(x, y)/g(x, y)$ остается ограниченной и интеграл $\iint\limits_{(S)} g(x, y)\,dx\,dy$ является сходящимся, то $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$ также сходится.

В качестве *функции сравнения* можно использовать функцию

$$g(x, y) = ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{-\alpha/2},$$

где $M_0 = (x_0, y_0)$.

Пример. Область S есть круг $x^2+y^2\leqslant 1$, функция $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ в окрестности точки $M_0 = (0, 0)$ не ограничена, однако

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

Таким образом, функция $f(x, y)/g(x, y)$, где $g(x) = (x^2+y^2)^{-1/2}$, остается ограниченной; отсюда следует сходимость интеграла

$$\iint\limits_{(S)}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Двойные интегралы по бесконечной области. Пусть S – неограниченная область, имеющая границей кусочно гладкую кривую, а $f(x, y)$ – некоторая заданная в S функция, которая интегрируема по каждой конечной подобласти области S. Если для любой последовательности S_n ограниченных подобластей таких, что каждая ограниченная подобласть области S содержится во всех S_n при $n>n_0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S_n)} f(x, y)\,dx\,dy = I,$$

то этот предел I называют *сходящимся несобственным двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по S; обозначение:

$$I = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Если предел существует не для всякой последовательности S_n, то интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$ называется *расходящимся*.

Если $f(x, y)\geqslant 0$ всюду в неограниченной области S, то члены последовательности S_n можно выбрать следующим образом: $S_n = S\cap K_n$, где K_n – круги с центром в начале координат, радиусы которых ρ_n удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = \infty$.

Примеры. 1) Пусть S является областью $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, и пусть $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Так как $f(x, y)\geqslant 0$ в S, то в качестве S_n можно взять последовательность четвертей кругов с радиусами ρ_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = \infty$. Тогда после перехода к полярным координатам имеем

$$\iint\limits_{(S_n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\rho_n}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho\,d\varphi\,d\rho = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-\rho_n^2}),$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S_n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-\rho_n^2}) = \frac{\pi}{4},$$

и, следовательно,

$$I = \iint\limits_{(S)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

2) Пусть S – первый квадрант, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$. Если S_n – последовательность четвертей кругов с радиусами ρ_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = \infty$, то

$$\iint\limits_{(S_n)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\rho_n}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(\rho^2)\rho\,d\varphi\,d\rho = \frac{\pi}{4}(1-\cos(\rho_n^2));$$

так как у полученной числовой последовательности предела не существует, то несобственный интеграл $\iint\limits_{(S)} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ является расходящимся.

Наконец, можно определить несобственный двойной интеграл для случая, когда и область интегрирования, и функция $f(x, y)$ (в окрестности некоторых точек) не ограничены.

Замена переменных в несобственных интегралах. Формулы преобразования для двойных интегралов (см. 3.1.10.3) и тройных интегралов (см. 3.1.11.3) остаются в силе (в аналогичных предположениях) также для несобственных интегралов, если хотя бы один из двух интегралов в этих формулах сходится.

Пример. В интеграле

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}},$$

где область S ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, подынтегральная функция в окрестности эллипса не ограничена. Введением обобщенных полярных координат $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$ интеграл преобразуется к следующему виду:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\frac{ab\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho\,d\varphi=ab\int\limits_0^{2\pi}\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1 d\varphi=2\pi ab;$$

следовательно,

$$\iint\limits_{(S)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}=2\pi ab.$$

3.1.13.5. Многомерные интегралы, зависящие от параметра. Пусть S – ограниченная область плоскости x, y; I – интервал ξ-оси, а функция $f(x, y, \xi)$ для каждого $\xi\in I$ интегрируема на S. Тогда для $\xi\in I$ двойной интеграл определяет функцию

$$F(\xi)=\iint\limits_{(S)} f(x, y, \xi)\,dx\,dy.$$

Интеграл, зависящий от параметра ξ, имеет следующие свойства:

1) если функция $f(x, y, \xi)$ *непрерывна*, то функция $F(\xi)$ также непрерывна на I;

2) если, кроме того, $f(x, y, \xi)$ обладает непрерывной частной производной по ξ, то $F(\xi)$ *дифференцируема* на I и

$$F'(\xi)=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f(x, y, \xi)}{\partial\xi}\,dx\,dy.$$

Аналогичные свойства имеют криволинейные, поверхностные и тройные интегралы, зависящие от параметра.

Пример.

$$F(\xi, \eta, \zeta)=\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(x, y, z)}{r}\,dV,$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Пусть функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна в V. Если точка (ξ, η, ζ) не лежит в V, то функция $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r}=\frac{x-\xi}{r^3}$ непрерывна в V; следовательно, $F(\xi, \eta, \zeta)$ дифференцируема по ξ и имеет производную

$$\frac{\partial F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi}=\iiint\limits_{(V)}\rho(x, y, z)\frac{x-\xi}{r^3}\,dV.$$

Так как подынтегральное выражение также обладает непрерывной частной производной, то под знаком интеграла можно продифференцировать еще раз; получим

$$\frac{\partial^2 F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial\xi^2}=\iiint\limits_{(V)}\rho(x, y, z)\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right]dV.$$

Аналогично вычисляются частные производные по η и ζ. Сложением получаем, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}=0.$$

Для несобственных криволинейных, двойных, поверхностных и тройных интегралов, зависящих от параметров, как и в одномерном случае (см. 3.1.9.3), непрерывность подынтегрального выражения уже не является достаточным условием для того, чтобы обеспечить непрерывность интеграла по параметру; дополнительно необходима равномерная сходимость этих интегралов.

Равномерная сходимость несобственного двойного интеграла. Пусть $P=(x, y)$ и $M=(\xi, \eta)$ – точки ограниченной области S, а $f(P, M)$ – некоторая заданная в S функция, которая в окрестности $P=M$ не ограничена. Интеграл

$$\iint\limits_{(S)} f(P, M)\,dS_P=\iint\limits_{(S)} f(x, y, \xi, \eta)\,dx\,dy$$

является несобственным интегралом, зависящим от параметров. Он называется *равномерно сходящимся* в точке $M_0\in S$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для *всех* точек M, удаленных от M_0 на расстояние, не превышающее δ, и для *всех* окрестностей U точки M_0, диаметры которых не превышают δ, выполняется неравенство

$$\left|\iint\limits_{(U)} f(P, M)\,dS_P\right|<\varepsilon.$$

Если интеграл $\iint\limits_{(S)} f(P, M)\,dS_P$ сходится равномерно в точке M_0, то функция

$$F(M)=\iint\limits_{(S)} f(P, M)\,dS_P$$

непрерывна в точке M_0.

Пример. Пусть V – некоторая ограниченная область в пространстве x, y, z; $\rho(x, y, z)$ – ограниченная на V функция: $|\rho(x, y, z)|\leqslant C=\text{const}$. Если $P=(x, y, z)$ и $M=(\xi, \eta, \zeta)$ – точки из V, то

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(P)}{r_{MP}}dV_P,\ \text{где}\ r_{MP}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

есть несобственный тройной интеграл, зависящий от точки M. Покажем, что он сходится в каждой точке $M_0\in V$ равномерно, так что функция

$$F(M)=\iiint\limits_{(V)}\frac{\rho(P)}{r_{MP}}dV_P$$

непрерывна в V. Для произвольной окрестности U точки M_0 и шара V_δ радиуса δ с центром в M_0, содержащего U (рис. 3.50), вследствие ограниченности $\rho(x, y, z)$ имеем

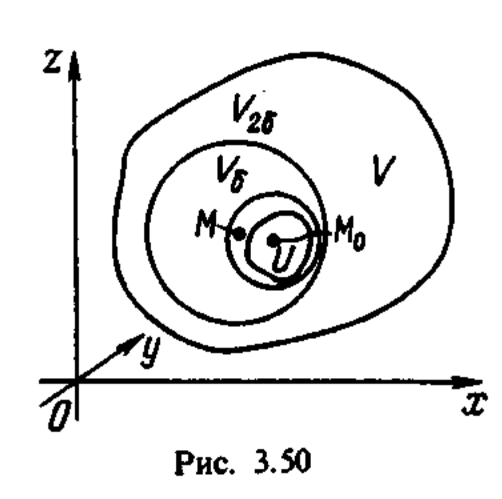


Рис. 3.50

$$\left|\iiint\limits_{(U)} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dV_P\right| \leqslant C \iiint\limits_{(V_\delta)} \frac{dV_P}{r_{MP}}.$$

Если теперь $M \in V_\delta$, то шар $V_{2\delta}$ с центром в M и радиусом 2δ содержит шар V_δ с центром в M_0. Тогда

$$\iiint\limits_{(V_\delta)} \frac{dV_P}{r_{MP}} \leqslant \iiint\limits_{(V_{2\delta})} \frac{dV_P}{r_{MP}}.$$

После введения сферических координат с полюсом в точке M получим

$$\iiint\limits_{(V_{2\delta})} \frac{dV_P}{r_{MP}} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\delta} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho} d\rho\, d\theta\, d\varphi = 8\pi\delta^2.$$

Таким образом,

$$\left|\iiint\limits_{(V)} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dV_P\right| \leqslant 8\pi\delta^2 C < \varepsilon$$

для всех $M \in V_\delta$, где $\delta < \delta(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{8\pi C}}$, и любой окрестности U точки M_0, диаметр которой меньше $\delta(\varepsilon)$. Это доказывает равномерную сходимость рассматриваемого интеграла.

3.1.14. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

3.1.14.1. Основные понятия. Если $\{a_n\}$ – числовая последовательноть, то последовательность $\{S_n\}$:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

называют последовательностью *частичных сумм* (бесконечного) *ряда*, который обозначают

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

a_n называют *общим членом* ряда.

Если последовательность частичных сумм имеет (конечный) предел S, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{3.1}$$

сходится и имеет сумму S, и пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если последовательность частичных сумм не имеет (конечного) предела, то бесконечный ряд (3.1) называется *расходящимся*. Тем самым сходимость ряда сводится к сходимости последовательности его частичных сумм.

Примеры. 1) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$ (*бесконечная геометрическая прогрессия*) сходится при $|q| < 1$, и

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Чтобы это показать, рассматривают последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^k = a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ и вычисляют предел последовательности S_n:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 \ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $S_n = n$ неограниченно возрастает.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ является расходящимся, так как последовательность частичных сумм S_n принимает значения 0 и -1 для четных и нечетных n соответственно.

Критерий Коши. Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для всех $n \geqslant N$ и любого натурального k выполняется неравенство

$$\left|\sum_{s=n+1}^{n+k} a_s\right| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу получается *необходимый признак сходимости* ряда: последовательность членов сходящегося ряда должна стремиться к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Это условие не является достаточным, как показывает пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$: имеем

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

однако ряд расходится (частичные суммы

$$S_n = \sum_{s=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \sum_{s=1}^{n} (\ln(1+s) - \ln s) = \ln(1+n)$$

неограниченно возрастают).

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2+2n+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+1} = 1 \neq 0.$$

Если отбросить первые n членов ряда, то получится ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{s=n+1}^{\infty} a_s,$$

который называется n-м *остатком* ряда и обозначается через R_n.

Основные свойства сходящихся рядов.

1) Отбрасывание или изменение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость (или расходимость) ряда.

2) Если все члены сходящегося ряда умножить на множитель c, то его сходимость не нарушится (сумма ряда умножится на c).

3) Два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ с суммами S и S' можно почленно складывать или вычитать. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm a'_n)$ сходится и имеет сумму $S \pm S'$.

4) Если ряд сходится, то его члены можно группировать в порядке их следования. Полученный ряд сходится, и его сумма равна сумме исходного ряда.

3.1.14.2. Признаки сходимости или расходимости рядов с неотрицательными членами.

I. Ряд с *неотрицательными членами* сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм ограничена сверху.

Примеры. 1) *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим подпоследовательность $t_n = S_{2^n}$ последовательности частичных сумм и вычислим

$t_n - t_{n-1} = S_{2^n} - S_{2^{n-1}} =$

$$= \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Так как $t_n = t_1 + \sum_{s=2}^{n} (t_s - t_{s-1}) > t_1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+2}{2}$, то последовательность t_n и S_n не ограничены.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha \leqslant 1$ расходится, а при $\alpha > 1$ сходится.

Утверждение для $\alpha < 1$ следует из примера 1) ($\alpha = 1$) и признака сравнения рядов с положительными членами.

II. Признак сравнения рядов с положительными членами. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если существует натуральное число N такое, что неравенство $a_n \leqslant b_n$ выполнено для всех $n \geqslant N$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Примеры. 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \frac{d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \ldots + d_0}{c_r n^r + c_{r-1} n^{r-1} + \ldots + c_0}, \quad c_r \neq 0,\ d_k \neq 0,$$

при $r > k+1$ сходится, а при $r \leqslant k+1$ расходится. Например, для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{3/2}+4}{n^3+1}$$

неравенство

$$\frac{2n^{3/2}+4}{n^3+1} = \frac{n^{3/2}(2+4n^{-3/2})}{n^3(1+n^{-3})} \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$$

справедливо для всех n, удовлетворяющих условию $4n^{-3/2} \leqslant 1$; следовательно, для $n \geqslant N = [\sqrt[3]{16}]$ *). Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то сходится также данный ряд. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{3/2}+4}{n^{5/2}+1}$ расходится, так как $\frac{2n^{3/2}+4}{n^{5/2}+1} \geqslant \frac{1}{n}$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ при $p > 0$ расходится, так как неравенство $\frac{1}{(\ln n)^p} \geqslant \frac{1}{n}$ справедливо для достаточно больших n.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ сходится, так как $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{2}{n^2}$ при $n \geqslant N = 2$.

III. Признак Даламбера. (А) Если существует натуральное число N такое, что для последовательности чисел $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, построенной из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$ (q — фиксированное число, не зависящее от n), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если для всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

(Б) Если последовательность $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, построенная из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, имеет некоторый предел p, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то при $p < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $p > 1$ расходится (если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится) (*предельный признак Даламбера*).

*) Квадратные скобки обозначают *целую часть* числа, заключенного в них, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее данного, т. е. $[n + x] = n$ при $0 \leqslant x < 1$. В частности, $[\sqrt[3]{16}] = 2$.

При $p = 1$ предельный признак Даламбера не дает ответа на вопрос, сходится данный ряд или расходится. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, и ряд расходится, а, с другой стороны, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ также имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, но этот ряд сходится.

Замечание. Если $a_n > 0$ и $a_{n+1}/a_n = 1 + \lambda/n + \alpha_n$, где ряд $\sum |\alpha_n|$ сходится, то при $\lambda < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится, а при $\lambda \geqslant 1$ – расходится. В частности, если

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k + c_1 n^{k-1} + \ldots + c_k}{n^k + d_1 n^{k-1} + \ldots + d_k}$$

(k – натуральное число), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $d_1 - c_1 > 1$. Напротив при $d_1 - c_1 \leqslant 1$ ряд расходится (*признак Гаусса*).

Примеры. 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ – сходящийся, так как

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

2) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n (x > 0)$ имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n x}{(n+1)^n} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(1+1/n)^n} = \frac{x}{e}.$$

При $x < e$ ряд сходится, а при $x > e$ расходится; при $x = e$ предельный признак Даламбера (Б) не дает ответа. Однако из (А) видно, что отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+1/n)^n}$ $(x = e)$ всегда больше 1, так как $(1 + 1/n) < e$; таким образом, при $x = e$ ряд расходится.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходящийся, так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$ и $d_1 - c_1 = 1$. Напротив, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)} \cdot \frac{1}{n}$ сходится, так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + n/2}{n^2 + 2n + 1} \text{ и } d_1 - c_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1.$$

IV. Признак Коши. (А) Если существует натуральное число N такое, что для числовой последовательности $\{\sqrt[n]{a_n}\}$, построенной из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ (q – фиксированное число, не зависящее от n), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если для бесконечного множества чисел $n \geqslant N$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

(Б) Пусть $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = p$, где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с неотрицательными членами. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$; ряд расходится и при $p = \infty$.

При $p = 1$ предельный признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости. Для обоих рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ имеем $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, но первый из них сходится, а второй расходится.

Примеры. 1) Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ сходится, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ сходится при всех $x \geqslant 0$, так как $\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{n}$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$ сходится для всех x, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x < 1/e$, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = ex < 1$ (см. 3.1.3.1); для всех $x > 1/e$ ряд расходится.

V. Интегральный признак (Коши, Маклорен). Пусть данный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, причем $f(n)$ есть значение в точке $x = n$ некоторой функции $f(x)$, определенной при $x \geqslant n_0$. Если $f(x)$ монотонно убывает и в области определения справедливо неравенство $f(x) \geqslant 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ (см. 3.1.7.7).

Примеры. 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, так как функция $f(x) = 1/x$ при $x \geqslant 1$ положительна и монотонно убывает и, кроме того, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{D\to\infty} \int_1^D \frac{dx}{x} = \lim_{D\to\infty} \ln(D) = \infty$.

2) Ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$ сходится, так как функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln(\ln x))^{1+\sigma}}$ при $x \geqslant 3$ положительна, монотонно убывает и, кроме того,

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{D\to\infty}\left(-\frac{1}{\sigma(\ln(\ln D))^{\sigma}} + \frac{1}{\sigma(\ln(\ln 3))^{\sigma}}\right) = \frac{1}{\sigma(\ln(\ln 3))^{\sigma}},$$

т. е. несобственный интеграл сходится.

3.1.14.3. Ряды с произвольными членами. Абсолютная сходимость. Ряд называется *знакочередующимся*, если его члены являются (поочередно) положительными и отрицательными. Такой ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1}c_n + \ldots, \quad (3.2)$$

где $c_n > 0$ для любого n (если первый член ряда отрицателен, то исследуют $-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$).

Признак Лейбница. Если для членов ряда (3.2)

$$c_n \geqslant c_{n+1} \quad (n = k,\ k+1, \ldots) \text{ и } \lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

то ряд сходится.

Остаток у знакочередующихся рядов можно легко оценить. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ сходится и имеет сумму S, то остаток $R_n = S - \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}c_s$ имеет знак $(-1)^n$ и $|R_n| \leqslant c_{n+1}$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится, так как $c_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = c_{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Сумма этого ряда равна $\ln 2$ (см. 3.1.14.5). Имеем $\left|\ln 2 - \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}(1/s)\right| \leqslant 1/(n+1)$.

Другие признаки сходимости.

Признак Абеля. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а последовательность $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонна и ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ограничены, $|S_n| < M$, а последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

Примеры. 1) Если числа $a_n > 0$ образуют сходящуюся к нулю монотонную последовательность, а $b_n = (-1)^{n-1}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится. Таким образом, признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

2) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ сходятся для всех $x \neq 2m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю. Из равенства

$$\sum_{s=1}^{n}e^{isx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

при помощи формулы Эйлера получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

и оба исходных ряда при $x \neq 2m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ сходятся по признаку Дирихле.

Абсолютная и условная сходимость. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ из абсолютных величин членов исходного ряда сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не абсолютно, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то он сходится в обычном смысле, т. е. из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Таким образом, для того чтобы исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, прежде всего строят ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ и исследуют его при помощи признаков, описанных в 3.1.14.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то сходится также и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (но если ряд абсолютно расходится, то о его сходимости ничего сказать нельзя).

Примеры. 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится условно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ не является сходящимся.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\beta)}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится абсолютно, так как члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\beta)}{n^{\alpha}}\right|$ удовлетворяют неравенству

$\left|\frac{\sin(n\beta)}{n^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\beta)}{n^{\alpha}}$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и любом действительном β.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

I. В абсолютно сходящемся ряде последовательность членов может быть изменена любым образом, при этом характер сходимости ряда и величина его суммы не изменятся. Сходящиеся ряды, суммы которых не зависят от последовательности членов, называют иногда *безусловно сходящимися.*

Если ряд сходится условно, а σ — любое заданное число, то члены ряда можно так переупорядочить, что преобразованный ряд будет сходиться и число σ будет его суммой (*теорема Римана*).

II. Под *произведением* двух бесконечных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ понимают ряд, образованный из всевозможных произведений $a_n b_k$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$. Эти произведения $a_n b_k$ можно упорядочить, вообще говоря, многими способами и получить тем самым различные ряды. Следующая теорема дает условие того, чтобы все эти ряды сходились и имели одну и ту же сумму.

Теорема Коши. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно и имеют суммы A и B соответственно, то все их произведения также сходятся абсолютно и имеют сумму $A \cdot B$. В этом случае справедлива формула

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n} a_m b_{n-m+1}\right)$$

(*формула умножения Коши*).

Формула умножения Коши имеет место и тогда, когда один из двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, а другой ряд просто сходится. Ряд-произведение в этом случае просто сходится, но, быть может, не абсолютно.

Пример. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *) сходится абсолютно для всех x $\left(\text{см. признак Коши для ряда } \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right|\right)$. При помощи формулы умножения Коши вычисляется произведение

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^{n-m}}{(n-m)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

*) По определению $0! = 1$.

Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ равна e^x (см. 3.1.14.6, пример 2)); полученный результат можно записать следующим образом: $e^x e^y = e^{x+y}$ (*теорема сложения для показательных функций*).

3.1.14.4. Функциональные последовательности. Функциональные ряды. Отображение множества натуральных чисел N во множество действительных функций одного переменного x, определенных на промежутке I, называется *функциональной последовательностью* и обозначается

$$\{f_n(x)\} \text{ или } f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots; \qquad (3.3)$$

функции $f_n(x)$ называются *членами* последовательности. Каждое значение $x \in I$, для которого последовательность (3.3) имеет некоторый (конечный) предел, принадлежит *области сходимости* этой последовательности. Таким образом, последовательность определяет в области своей сходимости некоторую функцию

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

которая называется *предельной функцией* (или *пределом*) последовательности. В дальнейшем предполагаем, не ограничивая общности, что область сходимости совпадает с областью определения I.

Для того чтобы охарактеризовать предельную функцию, используют понятие *равномерной сходимости.* Функциональная последовательность сходится к предельной функции $f(x)$ *равномерно* в I, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, не зависящее от x, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и для всех $x \in I$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Если существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого числа N имеется по меньшей мере одно $n > N$ и $x_0 \in I$ такие, что $|f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$, то говорят, что последовательность сходится *неравномерно.*

Примеры. 1) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ сходится для любого $x \in I = [0, 1]$ к функции $f(x) \equiv 0$. Эта сходимость является равномерной в I, так как для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N(\varepsilon)$, например $[1/(2\varepsilon)] + 1$ (где $[1/(2\varepsilon)]$ означает наибольшее целое число, которое меньше или равно $1/(2\varepsilon)$), что для всех $n > N = N(\varepsilon)$ и всех $x \in I$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \varepsilon.$$

2) Функциональная последовательность

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$$

сходится при любом $x \in I = [0, 1]$ к функции $f(x) \equiv 0$. Для любого фиксированного $x > 0$ достаточно выбрать $n > \left[\frac{1}{x\varepsilon}\right] + 1$ таким, чтобы выполнялось неравенство $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$. Однако эта сходимость в I не является равномерной. Если выбрать $\varepsilon < 1/2$, то, каково бы ни было N, можно указать такие $n > N$ и $x \in I$ (например, $n = N + 1$, $x = 1/(N+1)$), что $f_n(x) \geqslant \varepsilon$ (при данном выборе n и x имеем $f_{N+1}(1/(N+1)) = 1/2$).

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Последовательность (3.3) сходится к предельной функции равномерно в I тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от x число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n \geqslant N$ и для любого $m \geqslant 1$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in D$ одновременно.

Функциональные ряды. Бесконечный ряд (см. 3.1.14.1), построенный из функциональной последовательности

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

называется *функциональным рядом.* Понятия «область сходимости», «предельная функция» и «равномерная сходимость» переносятся на функциональную последовательность частичных сумм $S_n(x) = \sum_{s=1}^{n} f_s(x)$. Разность между суммой $S(x)$ сходящегося функционального ряда и одной из его частичных сумм $S_n(x)$ называют *остатком* и обозначают

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x) \equiv f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на промежутке I равномерно, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами такой, что для всех $n \geqslant N$ и всех $x \in I$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant a_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорантой* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Примеры. 1) Функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходятся в каждой конечной области равномерно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. Так как $|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|$ и $|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ может быть выбран в качестве мажоранты.

2) Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)$$

в каждом интервале (a, b) является равномерно сходящимся. Действительно, $1 - \cos\frac{x}{n} = 2\sin^2\frac{x}{n} \leqslant \frac{2x^2}{n^2}$, так как $|\sin x| \leqslant |x|$. Но $|x| \leqslant C$, где $C = \max(|a|, |b|)$. Тогда $0 \leqslant 1 - \cos\frac{x}{n} \leqslant 2\left(\frac{C}{n}\right)^2$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C^2}{n^2}$ сходится и является мажорантой данного функционального ряда.

Признак Абеля равномерной сходимости. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \equiv a_1(x) b_1(x) + \ldots + a_n(x) b_n(x) + \ldots$ сходится для всех $x \in I$ равномерно, если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ сходится в I равномерно и равномерно ограниченная последовательность $\{a_n(x)\}$ для каждого $x \in I$ является монотонной.

Признак Дирихле равномерной сходимости. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \equiv a_1(x) b_1(x) + \ldots + a_n(x) b_n(x) + \ldots$ сходится для всех $x \in I$ равномерно, если частичные суммы $S_n^b(x) = \sum_{n=1}^{n} b_n(x)$ равномерно ограничены ($|S_n^b(x)| \leqslant M,\ M = \text{const}$), а последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонно и равномерно стремится к нулю.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)^n}{n^n}x^n$ сходится на отрезке $[0, 1/2]$ равномерно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ на отрезке $[0, 1/2]$ сходится равномерно (см. признак Вейерштрасса; мажорантой, например, является $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n$), а последовательность $\{a_n(x)\} = \left\{\frac{(n+1)^n}{n^n}\right\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонно возрастает и ограничена (граница, например, e).

Свойства равномерно сходящихся рядов.

I. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены на отрезке $I = [a, b]$ и непрерывны в некоторой точке $x = x_0$ этого отрезка. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на I равномерно, то *сумма* $f(x)$ ряда также *непрерывна* в точке $x = x_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

II. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны на отрезке $I = [a, b]$, и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на I равномерно и имеет сумму $f(x)$. При этих условиях ряд можно *почленно интегрировать* (т. е. поменять местами знак бесконечной суммы и знак интегрирования):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Замечания. 1) Для почленного интегрирования ряда достаточно, чтобы функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ были интегрируемы на $[a, b]$ (не обязательно непрерывны).

2) Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не является необходимой для перестановочности знака интегрирования со знаком бесконечной суммы или для непрерывности суммы ряда.

III. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ на отрезке $I = [a, b]$ имеют непрерывные производные $f'_n(x)$. Если на этом отрезке ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, а ряд, составленный из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, сходится, и притом равномерно, то сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеет на I непрерывную производную, причем

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Замечания. 1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке I, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится на I равномерно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на I сходится равномерно.

2) Свойства рядов I–III нетрудно перенести на функциональные последовательности. Например, свойству I соответствует следующее: пусть функции $f_n(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ заданы на отрезке $I = [a, b]$ и непрерывны в некоторой точке $x = x_0$ этого отрезка. Если функциональная последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

сходится на I равномерно, то предельная функция $f(x)$ этой последовательности непрерывна в точке $x = x_0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Примеры. 1) Последовательность $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + x^2n^2}$ сходится на $[0, 1]$ равномерно. Предельная функция $f(x) = 0$ непрерывна. Далее, по свойству II

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2n^2} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + n^2)}{2n^2} = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

2) В ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ функции $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$ непрерывно дифференцируемы на произвольном отрезке $[a, b]$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ в силу неравенства $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ сходится на $[a, b]$ равномерно, так же как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, состоящий из производных $f'_n(x)$, так как

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно, сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Пусть F – множество функций, определенных на отрезке $I = [a, b]$. Множество F называется *равномерно ограниченным*, если существует число M такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in I$ и для всех функций $f(x) \in F$ (так что M не должно зависеть от конкретной $f \in F$). Множество F называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x_1, x_2 \in I$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, и для всех $f \in F$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (так что δ зависит только от ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$, и не зависит от f и от $x_1, x_2 \in I$).

Теорема Арцела–Асколи. Пусть на $I = [a, b]$ задано бесконечное множество функций F. Если F равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то из него можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность.

3.1.14.5. Степенные ряды. *Степенной ряд* есть функциональный ряд с общим членом

$$f_n(y) = a_n(y - y_0)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(a_n – действительные числа):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y - y_0)^n = a_0 + a_1(y - y_0) + a_2(y - y_0)^2 + \ldots + a_n(y - y_0)^n + \ldots$$

Действительное число y_0 называется *центром* степенного ряда. Заменой переменного $x = y - y_0$ этот степенной ряд преобразуется в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

с нулевым центром. В дальнейшем ограничимся исследованием рядов именно такого вида.

Существуют степенные ряды, которые

а) сходятся при всех x (*всюду сходящиеся степенные ряды*); например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ сходится для любого x по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1;$$

б) сходятся только при $x = 0$, например $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} (|x|\,|n+1|) = \infty > 1$$

при $x \neq 0$ (признак Даламбера);

в) для некоторых $x \neq 0$ сходятся, для других x расходятся, например $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| = |x|$. Таким образом, этот ряд при $|x| < 1$ сходится, а при $|x| \geqslant 1$ расходится.

Свойства степенных рядов.

I. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_1$, то он абсолютно сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$, а если степенной ряд расходится при $x = x_2$, то он расходится и для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_2|$.

II. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при некоторых $x \neq 0$ сходится, а при остальных x расходится, то существует, и только одно, положительное число r такое, что степенной ряд при $|x| < r$ сходится, и даже абсолютно, а при $|x| > r$ расходится. При $x = r$ и $x = -r$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Число r называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Если $r > 0$, то промежуток $(-r, r)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости служит *теорема Коши — Адамара*: радиус сходимости r ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен обратной величине верхнего предела последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(при этом $r = \infty$, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, и $r = 0$, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$).

Верхний предел r числовой последовательности $\{b_n\}$ (ср. 3.1.3.1.2) есть верхняя граница множества «точек сгущения» последовательности, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует только конечное число индексов n таких, что $b_n > r + \varepsilon$, но для бесконечного числа n справедливо неравенство $b_n > r - \varepsilon$. Если для любого действительного числа C имеется бесконечное множество индексов n таких, что $b_n > C$, то говорят, что верхний предел равен $+\infty$; если, напротив, для любого действительного числа C имеется только конечное число индексов n таких, что $b_n > C$, то говорят, что верхний предел равен $-\infty$. Верхний предел существует всегда. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости r степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ может быть вычислен также при помощи признака Даламбера: если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, то $r = \frac{1}{q}$ ($r = \infty$ при $q = 0$ и $r = 0$ при $q = \infty$).

Примеры. 1) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ имеет радиус сходимости $r = 1$, так как

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

2) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ имеет радиус сходимости $r = \infty$, так как

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = \infty.$$

3) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ расходится в граничных точках $x = 1$ и $x = -1$ интервала сходимости.

4) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ имеет радиус сходимости $r = 1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$; он сходится в граничной точке $x = -1$ (признак Лейбница) и расходится в граничной точке $x = 1$ (гармонический ряд) интервала сходимости.

5) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ имеет радиус сходимости $r = 1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Этот ряд сходится абсолютно и в граничных точках $x = \pm 1$ интервала сходимости (о ряде $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ см. 3.1.14.2).

III. В каждой внутренней точке интервала сходимости степенной ряд сходится *абсолютно*. Во всяком замкнутом промежутке, который целиком лежит в интервале сходимости, степенной ряд сходится равномерно. Если степенной ряд сходится при $x = r$ (не обязательно абсолютно), то степенной ряд на $[0, r]$ сходится *равномерно*. (Если степенной ряд расходится при $x = r$, то на интервале $[0, r)$ степенной ряд не может сходиться равномерно.)

IV. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k a_{n+k} x^n$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) имеют один и тот же радиус сходимости (в частности, интервалы сходимости степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ ($k = 1$) совпадают); однако в граничных точках интервала сходимости эти ряды могут иметь различное поведение.

V. Теорема единственности разложения в степенной ряд. Если два ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ сходятся в одном и том же интервале $|x| < r$ и во всех его точках (или хотя бы в бесконечном подмножестве точек, имеющих нуль в качестве предельной точки) имеют одинаковые суммы, то эти ряды совпадают, т. е. $a_n = b_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

Данная теорема обосновывает *метод сравнения коэффициентов*.

Примеры. 1) Пусть $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$ для всех действительных a и всех натуральных n. Ряды

$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ и $(1+x)^b = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n$ при $|x|<1$ сходятся абсолютно (см. 3.1.14.6, пример 2)); следовательно,

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}\binom{a}{m}\binom{b}{n-m}\right]x^n,$$

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n.$$

Тем самым получается *теорема сложения биномиальных коэффициентов*:

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{m=0}^{n}\binom{a}{m}\binom{b}{n-m} = \binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \ldots + \binom{a}{n}\binom{b}{0}$$

для любых действительных чисел a, b и всякого натурального n.

2) Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и ряд имеет ненулевой радиус сходимости. Если $f(x)$ – четная (или нечетная) функция, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ содержит только четные (или нечетные) степени.

VI. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ – степенной ряд с радиусом сходимости $r>0$, то его сумму $f(x)$ можно разложить также в степенной ряд с центром в любой точке x_1 из интервала сходимости:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_1)^n,$$

где

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} C_{n+m}^{n} a_{n+m}(x_1-x_0)^m.$$

(При этом все эти ряды, суммы которых равны b_n, сходятся (см. свойство IV), а для радиуса сходимости r_1 нового ряда справедливо неравенство $r_1 \geqslant r - |x_1 - x_0|$.)

VII. а) Сумма $f(x)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ для всех значений x из интервала сходимости $(-r, r)$ есть *непрерывная функция*. Если степенной ряд сходится при $x=r$, то сумма $f(x)$ при этом значении x также непрерывна (слева):

$$\lim_{x\to r-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Если степенной ряд сходится при $x=-r$, то сумма $f(x)$ при $x=-r$ непрерывна справа (**теорема Абеля о предельном значении**).

б) Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ всегда можно *почленно интегрировать* на отрезке $[0, x_1]$, где $|x_1|<r$:

$$\int_0^{x_1} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{x_1} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x_1^{n+1}}{n+1};$$

если x_1 – один из концов интервала сходимости и ряд сходится в x_1, то формула остается справедливой.

в) Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри его интервала сходимости можно *почленно дифференцировать*:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{dx^n}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Это утверждение верно также и для концов интервала сходимости, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ сходится в этих точках. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно *дифференцировать любое число раз* (см. свойство IV):

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = k! \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{k} a_{n+k} x^n.$$

Примеры. 1) Справедлива формула $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$ (см. 3.1.14.6, пример 3)), $r=1$. При $x=1$ ряд также сходится (см. признак Лейбница). Следовательно,

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

2) Справедливо равенство

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(см. 3.1.14.6, пример 3)), $r=1$. Ряд при $x=1$ (а также при $x=-1$) сходится, так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n^2+n+0{,}25}{n^2+2{,}5n+1{,}5}$$

и $b_1 - a_1 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5 > 1$ (см. замечание к признаку Даламбера). Согласно теореме Абеля о предельном значении, имеем

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

3) Сумма сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ (см. признак Лейбница) может быть вычислена следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1} = \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{3n}\,dt = \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4) Ряд функции Бесселя

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $xu'' + u' + xu = 0$. Этот ряд сходится при всех x, и выполняются

равенства

$$xJ_0 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)^2}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},$$

$$J_0' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},$$

$$xJ_0'' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}.$$

Если сложить эти ряды, то в качестве коэффициентов при x^{2n-1} $(n = 1, 2, \ldots)$ получаем

$$\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}(2n(2n-1) + 2n - (2n)^2) = 0,$$

что и доказывает утверждение.

Другие примеры к этим утверждениям даны в 3.1.14.6.

VIII. Действия со степенными рядами. а) Если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, то для любого x, являющегося внутренней точкой интервалов сходимости обоих рядов (см. свойство III), можно построить сходящиеся ряды

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n,$$

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right)x^n.$$

б) Пусть $g(x)$ – сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости r: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, а $f(u)$ – сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости r': $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$. Тогда $F(x) = f(g(x))$ снова есть сумма некоторого степенного ряда: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ – по крайней мере для тех x, для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n|$ сходится и имеет сумму, меньшую чем r'. Коэффициенты c_n вычисляются при помощи рядов: $c_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_{mn}$, которые абсолютно сходятся при условии, что $|b_0| < r'$, где $(g(x))^k = \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} x^n$. Другими словами, чтобы получить степенной ряд для $F(x)$, можно подставить $u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ и привести подобные члены.

в) Если функция $f(x)$ в окрестности нулевой точки есть сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $f(0) = a_0 \neq 0$, то функция $1/f(x)$ в окрестности нулевой точки также есть сумма некоторого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$; так как для малых x оба ряда сходятся, то

$$1 = \frac{1}{f(x)}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m c_{n-m}\right)x^n$$

и, согласно теореме о единственности разложения функции в степенной ряд, выполняются соотношения

$$1 = a_0 c_0, \qquad 0 = \sum_{m=0}^{n} a_m c_{n-m} \qquad \text{при} \quad n \geqslant 1;$$

отсюда можно последовательно найти c_n. Точно так же можно представить отношение двух функций g/f, являющихся суммами степенных рядов, как сумму степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ в некоторой окрестности нуля, если $a_0 = f(0) \neq 0$. Коэффициенты c_n вычисляются из соотношения

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right),$$

т. е. из системы $b_n = \sum_{m=0}^{n} a_m c_{n-m}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

Примеры приведены в 3.1.14.6.

3.1.14.6. Аналитические функции. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Функция $f(x)$ называется *аналитической* в точке x_0, если для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < r$, функция $f(x)$ есть сумма некоторого степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Каждая аналитическая в точке x_0 функция аналитична также в некоторой окрестности x_0 (см. 3.1.14.5, свойство VI). Сумма, разность и произведение аналитических функций – снова аналитические функции. Если функция $f(x)$ – аналитическая в x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то функция $1/f(x)$ – также аналитическая в x_0. Функция $f(g(x))$ аналитична в x_0, если $g(x)$ аналитична в x_0 и $f(u)$ аналитична в точке $u_0 = g(x_0)$ (ср. 3.1.14.5, свойство VIII). Если $f(x)$ аналитична в x_0, то в некоторой окрестности x_0 она дифференцируема любое число раз и

$$f^{(k)}(x) = k!\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{k} a_{n+k}(x - x_0)^n.$$

Тогда

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k$$

и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (3.4)$$

(*ряд Тейлора*).

Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 дифференцируема любое число раз, а остаточный член в формуле Тейлора (см. 3.15.3) стремится к нулю при $n \to \infty$, то степенной ряд (3.4) имеет отличный от нуля радиус сходимости, а функция $f(x)$ аналитична в x_0.

Эти соображения можно перенести на степенные ряды с бо́льшим числом переменных. Функция $f(x, y)$, которую можно записать как сумму степенного ряда от двух переменных:

$$f(x, y) = \sum_{m,\ n=0}^{\infty} a_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n,$$

с областью сходимости, содержащей точки (x, y) с $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, называется *аналитической* в точке (x_0, y_0). Точка относится к области сходимости, если степенной ряд в этой точке сходится. Для степенных рядов нескольких переменных имеют место теоремы, аналогичные сформулированным в 3.1.14.5 для одного переменного.

Функция, аналитическая в точке (x_0, y_0), дифференцируема по всем переменным любое число раз, и

$$a_{mn} = \frac{1}{m!\,n!}\,\frac{\partial^{m+n} f(x_0, y_0)}{\partial x^n\,\partial y^n}.$$

Таким образом, разложение функции $f(x, y)$, если оно возможно, должно иметь вид

$$f(x, y) = \sum_{m,\ n=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,n!}\,\frac{\partial^{m+n} f(x_0, y_0)}{\partial x^m\,\partial y^n}(x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

(*ряд Тейлора*).

Примеры. 1) Функция $f(x) = 1/(1 - x)$ является аналитической в каждой точке x_0, удовлетворяющей условию $|x_0| < 1$. Разложение в степенной ряд для этой функции в точке x_0 получают следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - x_0}\,\frac{1}{1 - (x - x_0)/(1 - x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{(1 - x_0)^{n+1}}$$

(так как $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ при $|q| < 1$; см. 3.1.14.1, пример 1)).

Ряд сходится при $|x - x_0| < |1 - x_0| = r$.

2) Ряд $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ имеет радиус сходимости $r = \infty$.

Почленно дифференцируя, получаем, что

$$E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n - 1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x).$$

Функция $E(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'(x) = y(x)$. Отсюда следует, что $E(x) = Ce^x$ и $C = 1$ в силу $E(0) = 1$. Таким образом,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

есть функция, аналитическая всюду.

Ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

имеет радиус сходимости $r = 1$. Почленным дифференцированием получаем для $f(x)$ дифференциальное уравнение $(1 + x)f' = af$, а в качестве решения — функцию $f(x) = (1 + x)^a$, так как $f(0) = 1$. Таким образом,

$$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \equiv 1 + ax + \frac{a(a - 1)}{1 \cdot 2} x^2 +$$

$$+ \frac{a(a - 1)(a - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots + \frac{a(a - 1)\ldots(a - n + 1)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n + \ldots$$

для $|x| < 1$.

3) Функцию $f(x) = \arcsin x$ при $x = 0$ можно разложить в степенной ряд (ряд Тейлора). Если найти производную $f'(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$, то эту функцию при $|x| < 1$ можно разложить в следующий ряд:

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

(см. пример 2)). При $|x| < 1$ ряд можно почленно проинтегрировать:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

Поэтому

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + \ldots$$

для $|x| \leqslant 1$. Справедливость формулы при $x = \pm 1$ следует из теоремы Абеля о предельном значении и из примера 2) к свойству VII в 3.1.14.5.

Аналогичным способом получаются, например, следующие ряды:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} \equiv$$

$$\equiv x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} + \ldots$$

для $|x| \leqslant 1$,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \equiv$$

$$\equiv x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

для $-1 < x \leqslant 1$.

4) Для функции $f(x) = \sin x$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2n \quad (n = 0, 1, \ldots), \\ (-1)^n \dfrac{1}{(2n + 1)!} & \text{при } k = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, \ldots); \end{cases}$$

поэтому

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \ldots$$

Так как для n-го остатка ряда

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2} \sin \vartheta x, & n \text{ нечетное}, \\ (-1)^{n/2} \cos \vartheta x, & n \text{ четное}, \end{cases}$$

справедлива оценка $|R_n| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ при $x \in [a, b]$, то $\sin x$ представляется этим рядом для всех x.

Таким же способом можно показать, что (для $|x| < \infty$)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

5) При помощи почленного интегрирования рядов получаются разложения в степенные ряды некоторых интегралов, которые в конечном виде через элементарные функции не выражаются. Из равномерно сходящегося на любом конечном промежутке ряда

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \equiv$$

$$\equiv 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

получается интеграл (для $|x| < \infty$)

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} \equiv$$

$$\equiv x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \ldots$$

Так как (для $|x| < \infty$)

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \equiv$$

$$\equiv 1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

то отсюда следует формула

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!3} + \ldots + (-1) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} + \ldots$$

6) Функция $F(x) = \operatorname{tg}(x)$, как отношение аналитических в точке $x = 0$ функций $g(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, также аналитическая в точке $x = 0$. Можно найти разложение этой функции в ряд; так как функция $\operatorname{tg} x$ нечетная, то разложение содержит только нечетные степени x (см. 3.1.14.5, свойство V):

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Из соотношения $\operatorname{tg} x \cos x = \sin x$ и рядов для $\cos x$ и $\sin x$ получаем

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{T_m}{(2m+1)!\,(2n-2m)!}\right) x^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Используя теорему о единственности разложения функции в степенной ряд, получим для определения неизвестных коэффициентов T_n следующие уравнения:

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{T_m}{(2m+1)!\,(2n-2m)!} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!},$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда легко вычисляются $T_0 = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 16$, $T_3 = 272$, $T_4 = 7936$, ...;

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

7) Функцию $\frac{x}{e^x - 1}$ можно разложить в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, предварительно доопределив ее при $x = 0$ предельным значением 1. Положим

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n.$$

Вычислим коэффициенты β_n, используя теорему о единственности разложения функции в степенной ряд:

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n\right) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{\beta_m}{(n-m)!\,m!}\right) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

коэффициент при x:

$$\beta_0 = 1;$$

коэффициент при x^n:

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{\beta_m}{(n-m)!\,m!} - \frac{\beta_n}{n!} = 0$$

при $n \geqslant 2$.

Можно в общем виде показать, что коэффициенты β_n – рациональные числа;

$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_1 = -1/2,$$

$$\beta_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\beta_{2k} = (-1)^{k+1} B_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где B_k – *числа Бернулли* (см. 1.1.3.1):

$$B_1 = 1/6, \quad B_2 = 1/30, \quad B_3 = 1/42, \quad B_4 = 1/30,$$

$$B_5 = 5/66, \quad B_6 = 691/2730, \quad B_7 = 7/6, \quad B_8 = 3617/510,$$

$$B_9 = 43\,867/798, \quad B_{10} = 174\,611/330, \quad B_{11} = 854\,513/138.$$

Некоторые авторы называют числами Бернулли коэффициенты β_n.

Пользуясь этим разложением, можно найти разложение $\operatorname{cth} x$. Действительно,

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\, \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

Заменив в этой формуле x на $2x$, получим (для $|x| < \pi$)

$$x \operatorname{cth} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n} \equiv$$

$$\equiv 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \frac{2}{945}x^6 - \ldots$$

Числа Бернулли используют также в следующих разложениях:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad |x| < \pi,$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}, \qquad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2n}, \qquad |x| < \pi.$$

8) Пусть $f(x)$ – аналитическая в точке $x = 0$ функция:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots;$$

тогда $f^2(x)$ – также аналитическая функция; при $a \neq 0$ аналитическими будут функции

$$1/f(x), \qquad 1/f^2(x),$$

а при $a > 0$ – функции

$$\sqrt{f(x)}, \qquad 1/\sqrt{f(x)}.$$

Запишем первые члены разложения в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$ этих аналитических функций:

$$f^2(x) = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \ldots,$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - \frac{3b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{f^2(x)} = \frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{2b}{a}x + \left(\frac{3b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{6bc}{a^2} - \frac{2d}{a} - \frac{4b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{6bd}{a^2} + \frac{3c^2}{a^2} - \frac{2e}{a} - \frac{12b^2c}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{a}\left[1 + \frac{b}{2a}x + \left(\frac{c}{2a} - \frac{b^2}{8a^2}\right)x^2 + \left(\frac{d}{2a} - \frac{bc}{4a^2} + \frac{b^3}{16a^3}\right)x^3 + \left(\frac{e}{2a} - \frac{bd}{4a^2} - \frac{c^2}{8a^2} + \frac{3b^2c}{16a^3} - \frac{5b^4}{128a^4}\right)x^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[1 - \frac{b}{2a}x + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\right)x^2 + \left(\frac{3bc}{4a^2} - \frac{d}{2a} - \frac{5b^3}{16a^3}\right)x^3 + \left(\frac{3bd}{4a^2} + \frac{3c^2}{8a^2} - \frac{e}{2a} - \frac{15b^2c}{16a^3} + \frac{35b^4}{128a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

9) Обратная функция $x = g(y)$ для аналитической функции $y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \ldots$ $(a \neq 0)$ – также аналитическая в точке $y = 0$ и имеет разложение в ряд

$$g(y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + \ldots,$$

где

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = -\frac{b}{a^3}, \qquad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac),$$

$$D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5), \ \ldots$$

3.1.15. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Если $\{u_n\}$ – последовательность (числовая или функциональная), то последовательность $\{P_n\}$, где

$$P_1 = u_1,\ P_2 = u_1u_2,\ \ldots,\ P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1u_2\ldots u_n,$$

состоит из *частичных произведений бесконечного произведения*, которое символически записывается в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если существует такое q, $0 < q < 1$, что для любого n выполнено неравенство $0 < u_n < q$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, т. е. предельное значение этого бесконечного произведения есть нуль, хотя ни один из сомножителей u_n не равен нулю. Но так как естественно выделить бесконечные произведения, равные нулю только тогда, когда хотя бы один сомножитель равен нулю, то сходимость для бесконечных произведений определяется иначе, чем сходимость бесконечных рядов.

VI. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *расходящимся*, если существует такое m, что для всех $n > m$ выполняется неравенство $u_n \neq 0$, и последовательность частичных произведений $P_n^m = \prod\limits_{k=m+1}^{n} u_k$ при $n \to \infty$ сходится к *отличному от нуля числу* U^m: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^m = U^m$. Не зависящее от m действительное число $U = u_1u_2\ldots u_mU^m$ называется *значением бесконечного произведения*. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^m$ равен 0, или ∞, или $-\infty$, то говорят, что бесконечное произведение *расходится* к 0, или к ∞, или к $-\infty$. Если предел P_n^m при $n\to\infty$ не существует, то бесконечное произведение называется *неопределенно расходящимся*.

Из этого определения следует: сходящееся бесконечное произведение тогда и только тогда равно 0, когда один из сомножителей равен 0.

Примеры. 1) Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ сходится и имеет значение 1/2, так как $u_n \neq 0$ для всех n и

$$P_n^1 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} P_n^1 = \frac{1}{2}.$$

2) Произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ расходится к 0 (стремится к 0), так как $u_n \neq 0$ для всех n и

$$P_n^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)}{n!} = \frac{1}{n},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^1 = 0$.

3) Произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится к $+\infty$ (стремится к $+\infty$), так как $u_n \neq 0$ для всех n и

$$P_n=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}{n!}=n+1,$$

откуда следует, что $\lim_{n\to\infty} P_n=+\infty$.

Основные теоремы для бесконечных произведений.

I. Если сходится бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится также и каждое остаточное произведение $\pi_n=\prod_{m=n+1}^{\infty} u_m=u_{n+1}u_{n+2}\ldots$ Если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет сходящееся остаточное произведение π_n, то сходится также и само бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$. Это означает, что добавка или отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость бесконечного произведения.

II. Если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\pi_n=1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}u_n=1.$$

Для всех n, начиная с некоторого, все сомножители u_n сходящегося бесконечного произведения больше нуля. На основании I и II, таким образом, можно без ограничения общности считать все u_n положительными.

III. Для сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными сомножителями u_n необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln u_n.$$

Если это условие выполнено и L — сумма этого ряда, то

$$U=e^L,$$

где

$$U=\prod_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Часто бывает целесообразно записать произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$

Тогда, согласно II, условие $\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$ является необходимым условием сходимости произведения.

IV. Если для всех $n\geqslant m$ справедливо неравенство $a_n>0$ (или $a_n<0$), то произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

V. Если существуют как положительные, так и отрицательные a_n, то для сходимости бесконечного произведения достаточно, чтобы вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходился и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

VI. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ расходится к 0 тогда и только тогда, когда для достаточно большого m справедливо соотношение (ср. II) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n}\ln(1+a_k)=-\infty$. Важные частные случаи: существует номер m такой, что для всех $k\geqslant m$ $a_k<0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится или же ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ расходится.

VII. Для произведений $\sum_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ с a_n любого знака справедливо следующее утверждение: бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится тогда и только тогда, когда для любого действительного числа $\varepsilon>0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что для всех $n\geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполнено неравенство

$$\left|\prod_{m=n+1}^{n+p}(1+a_m)-1\right|<\varepsilon.$$

Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$.

VIII. Если $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ сходится, то произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится, т. е. из абсолютной сходимости следует обычная сходимость бесконечного произведения.

IX. Произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно (см. 3.1.14.3).

X. Порядок сомножителей у абсолютно сходящегося произведения может быть изменен произвольным образом, при этом не изменится ни характер сходимости, ни значение бесконечного произведения.

Примеры. 1) Произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})$ абсолютно сходится при $|x|<1$ к величине $\frac{1}{(1-x)}$. Абсолютная сходимость данного произведения следует из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2^{n-1}}$ при $|x|<1$ (см. IX). Значение произведения вычисляется следующим образом:

$$(1-x)P_n=$$
$$=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}})=1-x^{2^n},$$

поэтому $P_n = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{1-x}$ для $|x| < 1$.

2) Бесконечное произведение

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^x}{1+x/n}$$

абсолютно сходится для всех $x \neq -k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Рассмотрим

$$u_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда, согласно IX, следует абсолютная сходимость произведения. Далее,

$$P_n = \frac{1}{x}\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x}{1+\frac{x}{1}}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^x}{1+\frac{x}{2}}\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^x}{1+\frac{x}{3}}\cdots\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Отсюда следует формула для *гамма-функции*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\,n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\right),$$

и тогда

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nx}{x+1+n}\right) = x;$$

следовательно, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

3.2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Вариационное исчисление — математическая дисциплина, посвященная отысканию экстремальных (наибольших или наименьших) значений функционалов. Под *функционалом* (линейным) понимается числовая функция, определенная на некоторых классах функций. Функционал ставит в соответствие каждой функции из такого класса некоторое число. Примером функционала является интеграл $J(x) = \int_a^b x(t)\,dt$, где $x(t)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Вариационное исчисление является естественным развитием той главы математического анализа, которая посвящена задаче отыскания экстремумов функций. Возникновение и развитие вариационного исчисления тесно связано с задачами механики, физики и т. д. В XX веке возник целый ряд новых направлений вариационного исчисления, связанных с интенсивным развитием техники, смежных вопросов математики и особенно вычислительной техники. Одним из основных направлений развития вариационного исчисления во второй половине XX века является рассмотрение неклассических задач вариационного исчисления. Это направление получило название оптимального управления. В основе решения задач оптимального управления лежит общий математический прием, который носит название «*принцип максимума Л. С. Понтрягина*». Следует заметить, что все основные необходимые условия классического вариационного исчисления с обыкновенными производными следуют из принципа максимума Понтрягина.

3.2.1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.2.1.1. Постановка задачи, примеры и основные понятия.

Пример 1. Существенный импульс развитию вариационного исчисления дала следующая, поставленная в 1696 г. Иоганном Бернулли проблема, которая обычно называется задачей о *брахистохроне*.

Между точками P_0 и P_1, расположенными на различной высоте, нужно провести соединяющую их кривую таким образом, чтобы время падения тела, движущегося без трения вдоль кривой из P_0 в P_1 под действием силы тяжести, было минимальным.

Для решения этой задачи построим декартову систему координат с началом координат в точке P_0 и с вертикальной осью y, идущей в направлении лежащей ниже точки P_1. Для случая, когда тело находится в момент начала падения в состоянии покоя в точке P_0, из закона сохранения энергии следует, что

$$mgy = mv^2/2,$$

откуда для скорости v имеем $\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy}$, и тем самым время падения t (с учетом, что $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$) выражается интегралом

$$t = \int_{P_0}^{P_1}\frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

Требуется найти функцию $y(x)$, график которой соединяет обе точки $P_0(0, 0)$ и $P_1(x_1, y_1)$, т. е. $y(0) = 0$ и $y(x_1) = y_1$, и которая минимизирует указанный интеграл.

Пример 2. Найти кратчайшую кривую между двумя точками $P_0(x_0, y_0)$ и $P_1(x_1, y_1)$ в плоскости x, y, т. е. найти функцию $y(x)$, при которой

$$J = \int_{P_0}^{P_1} ds = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

принимает наименьшее значение; при этом функция $y(x)$ должна удовлетворять условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

В обоих примерах отыскиваются функции $y(x)$, которые минимизируют функционал вида

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx;$$

при этом задаются граничные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Это — так называемая *простейшая задача вариационного исчисления*.

Из всех классов функций, на которых ищется экстремум, здесь будут рассматриваться только класс непрерывных и класс непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$, которые мы будем обозначать C_0 и C_1 соответственно. Следует отметить, что весьма существенно, в каком классе ищется экстремум, так как он может существовать в одном классе и не существовать в другом.

Аналогом расстояния между двумя функциями в каждом из рассматриваемых классов является норма разности этих функций; понятие нормы в этих классах определяется следующим образом:

$$\text{в } C_0 \quad \|y\|_{C_0} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x)|,$$

$$\text{в } C_1 \quad \|y\|_{C_1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x)| + \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y'(x)|.$$

В качестве ε-окрестности $U_\varepsilon(y^1)$ функции y^1 понимают множество

$$U_\varepsilon(y^1) = \{y \mid y \in C_i, \ \|y - y^1\|_{C_i} < \varepsilon\}, \qquad i = 0, 1.$$

Если для функции y^0 из области определения $D(J)$ существует окрестность $U_\varepsilon(y^0)$ такая, что

$$J(y^0) \leqslant J(y)$$

или

$$J(y^0) \geqslant J(y)$$

$$\forall y \in U_\varepsilon(y^0) \bigcap D(J),$$

то $J(y^0)$ называется (*локальным*) *минимумом* или *максимумом*. Элементы из $U_\varepsilon(y^0) \bigcap D(J)$ называются также *функциями сравнения*.

Понятие экстремума функционала нуждается в уточнении. Говоря о максимуме или минимуме (точнее, об относительном максимуме или минимуме), мы имели в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала на близких кривых. Однако близость кривых может быть понимаема различно, как это видно из определения нормы. Поэтому в определении максимума или минимума надо указывать, какая близость имеется в виду (в смысле класса C_0 или класса C_1). Если функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых модуль разности $y(x) - y_0(x)$ мал, т. е. по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ в смысле нормы пространства C_0, то максимум или минимум называется *сильным*. Если же функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума лишь по отношению к кривым $y = y(x)$, близким к $y = y_0(x)$ в смысле нормы класса C_1, т. е. по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то максимум или минимум называется *слабым*.

Аналогично тому, как это делают в случае функций, число $J(y^0)$ называют наименьшим (*абсолютным минимумом*) или наибольшим (*абсолютный максимум*) значением, если

$$J(y^0) \leqslant J(y) \quad \text{или} \quad J(y^0) \geqslant J(y) \qquad \forall y \in D(J).$$

Из определения нормы в пространствах C_0 и C_1 видно, что сильный экстремум является одновременно и слабым, но не наоборот.

Основным элементом исследования в вариационном исчислении являются понятия первой и второй вариации функционала.

Положим $F(\varepsilon) = J(y^0 + \varepsilon h)$ и рассмотрим первую и вторую производные функции $F(\varepsilon)$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$.

Величины $F'(0)$ и $F''(0)$ называют *первой* и *второй вариацией функционала* $J(y)$ и обозначают соответственно $\delta J(y^0, h)$ и $\delta^2 J(y^0, h)$.

Условия $\delta J(y^0, h) = 0$ и $\delta^2 J(y^0, h) \geqslant 0$ или $\delta^2 J(y^0, h) \leqslant 0$ могут быть использованы при формулировке необходимых условий экстремума функционала $J(y)$.

3.2.1.2. Теория Эйлера – Лагранжа. *Задачей Лагранжа* в вариационном исчислении называют описанную в 3.2.1.1 задачу нахождения экстремума для функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx. \tag{3.5}$$

При этом требуется, чтобы искомые функции $y(x)$ удовлетворяли граничным условиям

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1.$$

Если нет специальной оговорки, то считаем, что $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$.

Необходимые условия экстремума. Дифференциальное уравнение Эйлера – Лагранжа. Если функция $y^0(x)$ доставляет функционалу $J(y)$ слабый (локальный) экстремум, то она должна являться решением *дифференциального уравнения Эйлера – Лагранжа*:

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0, \tag{3.6}$$

или в другой форме:

$$f'_y - f''_{y'x} - f''_{y'y} y' - f''_{y'y'} y'' = 0$$

(f предполагается дважды непрерывно дифференцируемой). Так как сильный (локальный) экстремум есть одновременно и слабый (локальный) экстремум, то дифференциальное уравнение Эйлера – Лагранжа представляет собой также и необходимое условие для сильного (локального) экстремума.

Уравнение Эйлера – Лагранжа есть дифференциальное уравнение 2-го порядка. Решения этого уравнения называют *экстремалями*. Появляющиеся здесь две постоянные интегрирования определяются при помощи граничных условий

$$y(x_0) = y_0 \ \text{и} \ y(x_1) = y_1,$$

так что должна быть решена задача с граничными условиями.

Пусть $y^0(x)$ есть решение задачи (3.5), т. е. пусть существует экстремум. Для кривых сравнения вида

$$y_\varepsilon(x) = y^0(x) + \varepsilon h(x),$$
$$h(x_0) = h(x_1) = 0$$

(ε – малый параметр) имеем

$$J(y_\varepsilon) = F(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y^0(x) + \varepsilon h(x), y^{0\prime}(x) + \varepsilon h'(x))\,dx.$$

Таким образом, функционал $F(\varepsilon)$ есть функция только параметра ε. В силу предположения о том, что $y^0(x)$ есть решение, должно выполняться соотношение

$$\delta J \equiv F(0) = 0. \tag{3.7}$$

Вычислим $F'(\varepsilon)$:

$$F'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{d\varepsilon} dx = \int_{x_0}^{x_1} (f'_y h(x) + f'_{y'} h'(x))\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[f'_y h(x) - \frac{d}{dx}(f'_{y'})\, h(x) \right] dx + h(x) f'_{y'} \Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} h(x) \left(f'_y - \frac{d}{dx}(f'_{y'}) \right) dx.$$

Из $F'(0) = 0$ в силу основной леммы вариационного исчисления*) вытекает уравнение Эйлера – Лагранжа.

Из краткого описания доказательства видно, что предположение о существовании решения y^0 данной вариационной задачи существенно. В то время как в теории задач на экстремум для непрерывных функций (заданных на замкнутом множестве) теорема Вейерштрасса обеспечивает существование решения задачи, в вариационном исчислении существует трудность, заключающаяся в том, что задачи, которые формулируются корректно, в некоторых случаях не имеют решения. Это означает, что существование решения данной задачи в вариационном исчислении нуждается в особых доказательствах.

До сих пор требовалось, чтобы функции $y(x)$ были обязательно непрерывно дифференцируемы. Это требование можно ослабить. Так, например, вариационная задача с подынтегральной функцией $f(x, y, y')$ имеет смысл уже тогда, когда требуется только кусочная непрерывность первой производной $y(x)$. Остается теперь ответить на вопрос, обладает ли эта функция сама по себе производными более высокого порядка и удовлетворяет ли уравнению Эйлера – Лагранжа.

Лемма Дюбуа – Реймона. Пусть f дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам. Если функция y непрерывно дифференцируема и в точке y первая вариация функционала J равна нулю, то для каждой точки x, удовлетворяющей *условию Лежандра* $f''_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$, существует окрестность, в которой функция y дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Эйлера – Лагранжа.

Пример 3. Найти экстремум функционала $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^x)\, dx$ при $y(0) = 0$, $y(1) = e$. Уравнение Эйлера – Лагранжа имеет вид

$$2(y + e^x) - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \quad \text{или} \quad y'' - y = e^x.$$

Таким образом, $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{xe^x}{2}$. Используя граничные условия, получаем

$$y(x) = \frac{e^2}{2(e^2 - 1)}(e^x - e^{-x}) + \frac{xe^x}{2}.$$

*) Если $g(x)$ непрерывна и $\int_{x_0}^{x_1} h(x) g(x)\, dx = 0$ для любой такой непрерывной функции, имеющей непрерывную производную, что $h(x_0) = h(x_1) = 0$, то $g(x) = 0$ на $[x_0, x_1]$.

Специальные случаи задачи (3.5).

а) Если $f \equiv f(x, y')$, т. е. $f'_y = 0$, то уравнение Эйлера – Лагранжа имеет вид $\frac{d}{dx}(f'_{y'}) = 0$, так что $f'_{y'} = \text{const}$ есть первый интеграл этого уравнения.

Пример 4. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_{-1}^{1} (x^2 + y'^2)\, dx, \qquad y(-1) = -1,\ y(1) = 1.$$

Из условия $f'_{y'} = \text{const}$ получаем, что $y' = C_1$, и, следовательно, $y(x) = C_1 x + C_2$. Применяя граничные условия, получим $y(x) = x$.

б) Если $f \equiv f(y, y')$, то $f'_x = 0$ и $df/dx = f'_x + f'_y y' + f'_{y'} y'' = f'_y y' + f'_{y'} y''$.

Из уравнения Эйлера – Лагранжа следует, что

$$\frac{df}{dx} = y' \frac{df'_{y'}}{dx} + y'' f'_{y'} = \frac{d}{dx}(y' f'_{y'}),$$

и, таким образом, $\frac{d}{dx}(f - y' f'_{y'}) = 0$. Следовательно, $f - y' f'_{y'} = \text{const}$ есть первый интеграл.

Пример 5. Задача о брахистохроне. Найти экстремум функционала (см. пример 1)

$$J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Из того, что $f - y' f'_{y'} = \text{const} = C_1$, следует соотношение $\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{(1 + y'^2)\, y}} = C_1$, и тем самым $y(1 + y'^2) = 1/C_1^2 = 2K_1$.

Используя замену $y'(x) = \operatorname{ctg}(v(x)/2)$, получим, что $y = 2K_1 \sin^2(v/2) = K_1(1 - \cos v)$, $y' = 2K_1 v' \cos(v/2) \sin(v/2) = \operatorname{ctg}(v/2)$, т. е. $dx/K_1 = dv \cdot 2\sin^2(v/2)$, откуда вытекают параметрические уравнения экстремалей:

$$x = K_1(v - \sin v) + K_2, \; y = K_1(1 - \cos v).$$

Полученные уравнения являются параметрическими уравнениями циклоиды. Константы определяются из граничных условий.

в) Если $f \equiv f(x, y) + a(x)\, y'$, то уравнение Эйлера – Лагранжа упрощается и принимает вид

$$f'_y = a'(x) \quad \text{(тривиальный случай)}.$$

г) Если $f \equiv f(y')$, то $f'_{y'} = \text{const}$, и тем самым $y'(x) = \text{const} = C_1$, т. е. экстремали являются прямыми вида $y(x) = C_1 x + C_2$.

Следует учитывать, что экстремали не всегда реализуют (локальный) минимум или максимум функционала, так как уравнение Эйлера – Лагранжа представляет собой только необходимое условие экстремума.

Приводимые далее необходимые условия экстремальности позволяют в определенных случаях исключить те экстремали, которые не дают экстремума функционалу.

Условие Лежандра. Используя вторую вариацию $\delta^2 J = F''(0)$, получают *необходимое условие экстремума Лежандра*: чтобы функция $y(x)$ доставляла слабый (локальный) минимум (максимум) функционалу $J(y)$, необходимо, чтобы для $x \in [x_0, x_1]$ имело место неравенство

$$f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geqslant 0 \quad (f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \leqslant 0). \tag{3.8}$$

Пример 6. Найти минимум функционала

$$J(y)=\int_0^1 (y'^2-13\sqrt{1+y'^2})\,dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=1.$$

Так как подынтегральная функция зависит только от y', то экстремалями являются прямые. С учетом граничных условий получаем $y(x)=x$. Условие Лежандра имеет вид $f''_{y'y'}=2-13(1+y'^2)^{-3/2}\geqslant 0$. Для экстремали $y(x)=x$ это неравенство не выполняется, так что слабого локального минимума не существует.

Условие Якоби. Пусть для функции $y(x)$, $x\in[x_0,\ x_1)$, выполнено *строгое условие Лежандра*, т. е. $f''_{y'y'}(x,\ y,\ y')>0$. Если при этом функционал $J(y)$ имеет при $y(x)$ слабый минимум, то для точки x_s, *сопряженной* с x_0, должно выполняться неравенство $x_s\geqslant x_1$. Сопряженная точка x_s определяется следующим образом. Пусть $u(x)$ есть решение дифференциального *уравнения Якоби*

$$\frac{d}{dx}(f''_{y'y'}u')-u\left(f''_{yy}-\frac{d}{dx}f''_{yy'}\right)=0,\quad u(x_0)=0.\quad (3.9)$$

За x_s принимают наименьший из корней функции $u(x)$, лежащих справа от x_0. Если же $u(x)$ справа от x_0 не обращается в нуль, то полагаем $x_s=\infty$

Пример 7. Найти минимум функционала

$$J(y)=\int_0^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)\,dx,\quad y(0)=y_0,\ y_1(x_1)=y_1.$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа $y''+16y=0$ имеет решение $y(x)=C_1\sin 4x+C_2\cos 4x$. Условие Лежандра выполнено в строгой форме:

$$f''_{y'y'}(x,\ y(x),\ y'(x))=2>0.$$

Уравнение Якоби (3.9) имеет вид

$$u''+16u=0,\ u(0)=0,$$

так что его решение есть $u(x)=C_1\sin 4x$. Поэтому для сопряженной точки получаем значение $x_s=\pi/4$, т. е. условие Якоби выполнено в случае, если $x_1\leqslant\pi/4$.

Наряду с необходимыми условиями для слабого локального экстремума существуют также необходимые условия для сильного локального экстремума. Как отмечалось, необходимые условия для слабого экстремума представляют собой также и необходимые условия для сильного экстремума, но не наоборот.

Условие Вейерштрасса. Для существования сильного минимума функционала $J(y)$ необходимо, чтобы для *E-функции Вейерштрасса*

$$E(x,\ y,\ y',\ l)=$$
$$=f(x,\ y,\ l)-f(x,\ y,\ y')-(l-y')f'_{y'}(x,\ y,\ y')\quad (3.10)$$

во всех точках экстремалей $y(x)$ для любого числа l выполнялось неравенство

$$E(x,\ y,\ y',\ l)\geqslant 0.\quad (3.11)$$

Пример 8. Найти минимум функционала

$$J(y)=\int_0^1 y'^3\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

Решение уравнения Эйлера – Лагранжа дает экстремаль

$$y(x)=x.$$

Условие Лежандра выполнено:

$$f''_{y'y'}=6y'=6>0.$$

Решение дифференциального уравнения Якоби

$$6u''=0,\ u(0)=0,$$

имеет вид $u(x)=cx$, так что для сопряженной точки имеем $x_s=\infty$, т. е. это необходимое условие выполняется и на экстремалях.

Для E-функции Вейерштрасса получаем

$$E(x,\ y,\ y',\ l)=l^3-1-3(l-1)=l(l^2-3)+2.$$

Очевидно, что эта функция не для всех значений l неотрицательна, так что функционал может обладать при $y(x)=x$ самое большее слабым локальным минимумом.

Угловые условия Вейерштрасса – Эрдмана. Может оказаться, что рассматриваемый функционал $J(y)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций не обладает экстремумом.

Пример 9. Найти минимум функционала

$$J(y)=\int_0^2 y^2(1-y')^2\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=1.$$

Так как подынтегральная функция от x не зависит, то (см. специальный случай б) задачи (3.5))

$$y^2(1-y')^2+2y'y^2(1-y')=\text{const}=C_1$$

есть первый интеграл уравнения Эйлера – Лагранжа. Отсюда следует, что

$$y'^2=1-\frac{C_1}{y^2}\quad\text{или}\quad\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-C_1}}=dx.$$

Поэтому экстремали имеют вид

$$y^2-(x+C_2)^2=C_1.$$

Использование граничных условий приводит к кривой

$$(x-3/4)^2-y^2=9/16.$$

Конечные точки лежат, однако, на различных ветвях этой гиперболы, так что непрерывно дифференцируемой экстремали, которая связывает обе точки, нет. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то значение функционала не может быть меньше нуля. Очевидно, что его нулевая граница достигается для функции

$$y(x)=\begin{cases}0 & \text{для } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1 & \text{для } 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

которая хотя и непрерывна на отрезке $[0,\ 2]$, но в точке $x=1$ не имеет производной.

Рассмотрим класс кусочно непрерывно дифференцируемых функций. Точку $(x,\ y(x))$ кусочно непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ называют *точкой перелома*, если в точке x производная слева $p_1=y'_-(x)$ и производная справа $p_2=y'_+(x)$ функции y существуют и не равны друг другу.

Информацию о том, существуют ли экстремали с точками перелома, дают следующие *условия Вейерштрасса – Эрдмана*.

Если $(x,\ y)$ является точкой перелома экстремали, то оба уравнения

$$f'_{y'}(x,\ y,\ p_1)=f'_{y'}(x,\ y,\ p_2),\quad (3.12)$$

$$(f-y'f'_{y'})_{y'=p_1}=(f-y'f'_{y'})_{y'=p_2}\quad (3.13)$$

должны иметь *общее* решение, для которого $p_1\neq p_2$.

Пример 10. Для задачи из примера 9 условия Вейерштрасса – Эрдмана (3.12), (3.13) для точки перелома дают

$$-2y^2(1-p_1)=-2y^2(1-p_2),$$

$$y^2(1-p_1)^2+2y^2p_1(1-p_1)=y^2(1-p_2)^2+2y^2p_2(1-p_2),$$

т. е. точки перелома могут появиться только при $y=0$.

Естественные граничные условия; условия трансверсальности. Наряду со случаем задания граничных условий $y(x_0)$ и $y(x_1)$ могут встречаться также случаи, когда: 1) существует только одно (например, $y(x_0)$) граничное условие или граничных условий вообще нет; 2) граничное условие задается тем, что в точке x_1 (неизвестной) верно равенство $y(x_1) = \varphi(x_1)$, т. е. точка $(x_1, y(x_1))$ должна лежать на заданной кривой $y = \varphi(x)$.

Равенство нулю первой вариации функционала $J(y)$ дает, наряду с уравнением Эйлера – Лагранжа, следующие условия для недостающих граничных значений:

а) Если заранее известно только значение функции $y(x_0)$ в граничной точке x_0, то граничное условие в точке x_1 определяется из уравнения

$$f'_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0. \tag{3.14}$$

Аналогичное соотношение получается, если в точке x_0 не задано наперёд значение функции. Соотношение (3.14) называется *естественным граничным условием*.

б) Пусть в точке x_0 граничное условие задано в виде $y(x_0) = y_0$, а в точке x_1 (переменной) требуется, чтобы $y(x_1) = \varphi(x_1)$, где $y = \varphi(x)$ – заданная кривая. В этом случае получается *условие трансверсальности*

$$f(x_1, y(x_1), y'(x_1)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1)) f'_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0, \tag{3.15}$$

с помощью которого определяется значение функции $y(x_1)$.

Соотношение, аналогичное (3.15), получается, если на заданной кривой должна лежать точка $(x_0, y(x_0))$.

Пример 11. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2/2 + yy' + y' + y)\,dx, \quad y(0) = 1/2.$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа принимает вид $y'' = 1$, так что экстремалями являются функции $y(x) = x^2/2 + C_1X + C_2$.

Из $y(0) = 1/2$ следует $C_2 = 1/2$. Константа C_1 получается из (3.14):

$$f'_{y'}(1, y(1), y'(1)) = y'(1) + y(1) + 1 = 1 + C_1 + 0{,}5 + C_1 + 0{,}5 + 1 = 2C_1 + 3 = 0,$$

т. е. $C_1 = -3/2$. Таким образом, экстремаль имеет вид

$$y(x) = (x^2 - 3x + 1)/2.$$

Пример 12. Требуется определить кратчайшее расстояние между точкой (x_0, y_0) и кривой $y = f(x)$. Эта задача сводится к задаче отыскания минимума функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = f(x_1),$$

причем x_1 неизвестно. Экстремали этого функционала – прямые вида

$$y(x) = a(x - x_0) + y_0,$$

так как подынтегральная функция зависит только от y'. Точка x_1 определяется из *условия трансверсальности*

$$\sqrt{1 + y'^2(x_1)} + (f'(x_1) - y'(x_1))\, y'(x_1)/\sqrt{1 + y'^2(x_1)} = 0,$$

которое приводит к известному соотношению ортогональности

$$y'(x_1) f'(x_1) = -1.$$

Принцип Гамильтона. Вариационное исчисление играет основополагающую роль в составлении уравнений механики и теоретической физики. Большинство этих уравнений может быть получено на основе *вариационного принципа* при помощи понятия энергии. Так, например, *принцип Гамильтона* в механике системы точек состоит в следующем.

Для системы такого рода переход из одного состояния в другое за заданный отрезок времени $[t_0, t_1]$ происходит так, чтобы первая вариация функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

равнялась нулю: движение системы осуществляется функциями, которые среди всех допустимых движений делают упомянутый выше интеграл постоянным, т. е. уравнение движения системы совпадает с уравнением Эйлера – Лагранжа для функционала J. При этом T означает кинетическую и U – потенциальную энергию системы, а $L = T - U$ – *функция Лагранжа*. Интерес здесь фокусируется в первую очередь на обращении первой вариации функционала J в нуль, а не на вопросе об экстремуме. Задачи такого рода также называют *вариационными задачами*.

Пример 13. Пусть материальная точка движется под влиянием силы тяжести (свободное падение). При этом для кинетической и потенциальной энергии имеют место формулы

$$T = my'^2/2 \text{ и } U = -mgy$$

(m – масса, $y(t)$ – высота точки ко времени t). Интеграл для функции Лагранжа имеет следующий вид:

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt = m \int_{t_0}^{t_1} (y'^2/2 + gy)\,dt.$$

Согласно принципу Гамильтона уравнение движения системы есть уравнение Эйлера – Лагранжа для функционала $J(y)$:

$$mg - m\,dy'/dt = 0, \text{ т. е. } y'' = g;$$

таким образом,

$$y(t) = C_1 + C_2t + gt^2/2.$$

Это – известное *уравнение движения для свободного падения*.

Известный из механики принцип Гамильтона можно переносить и на другие физические процессы, так что вариационные принципы представляют собой общий метод составления уравнений в математической физике.

Другие задачи. Наряду с задачами для функционалов вида

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$$

существуют также и другие постановки задач.

В дальнейшем в качестве условий экстремума указываются только уравнения Эйлера – Лагранжа, хотя существуют и другие необходимые условия, аналогичные приведенным выше.

Задачи с высшими производными. Для задачи нахождения экстремума функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

с граничными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y'_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

уравнение Эйлера – Лагранжа имеет вид

$$f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}f'_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}f'_{y^{(n)}} = 0.$$

Пример 14. Найти экстремум функционала $J(y) = \int_0^1 (y'' - y)^2\,dx$.

Уравнение Эйлера – Лагранжа принимает вид

$$f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}f'_{y''} = 2y - 4y'' + 2y^{(4)} = 0,$$

т. е.

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0;$$

оно имеет решение в виде

$$y(x) = e^x(C_1 + C_2x) + e^{-x}(C_3 + C_4x).$$

Использование граничных условий приводит к получению искомой экстремали.

Задачи для нескольких функций. Для задачи нахождения экстремума функционала

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y_1, \ldots, y_n,\ y'_1, \ldots, y'_n)\,dx$$

с граничными условиями $y_i(x_0) = y_{i0}$, $y_i(x_1) = y_{i1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *уравнения Эйлера – Лагранжа* имеют вид

$$f_{y_i} - \frac{d}{dx}f_{y'_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Задачи в параметрическом представлении. Требование, чтобы искомая кривая была задана явно: $y = y(x)$, может существенно сузить задачу. Общее рассмотрение достигается при параметрическом задании кривой:

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Функционал

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y,\ y')\,dx$$

принимает при этом следующий вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),\ y(t),\ \dot{y}(t)/\dot{x}(t))\,\dot{x}(t)\,dt,$$

где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ – производные x и y по t; подынтегральная функция не содержит явно независимое переменное t и является однородной функцией первой степени относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

В общем случае рассматривают функционал вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})\,dt,$$

причем подынтегральная функция является положительно однородной функцией первой степени относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, т. е.

$$f(x,\ y,\ \alpha\dot{x},\ \alpha\dot{y}) = \alpha f(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}) \text{ для } \alpha > 0.$$

При этом предположении значение функционала зависит только от вида кривой

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

и не зависит от специально выбранного параметрического представления. *Уравнения Эйлера – Лагранжа* имеют вид

$$f'_x - \frac{d}{dt}f'_{\dot{x}} = 0, \qquad f'_y - \frac{d}{dt}f'_{\dot{y}} = 0.$$

Однако они не являются независимыми друг от друга, так как на основании теоремы Эйлера (для однородных функций) выполняется соотношение

$$\dot{x}\left(f'_x - \frac{d}{dt}f'_{\dot{x}}\right) + \dot{y}\left(f'_y - \frac{d}{dt}f'_{\dot{y}}\right) = 0,$$

так что достаточно решить только одно из этих уравнений.

Следует заметить, что получаемые решения могут допускать представление в явной или неявной форме, а не только в параметрической форме.

Пример 15. Найти экстремум функционала

$$J = \int_0^1 \frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}}\,dt, \qquad x(0) = y(0) = 0, \qquad x(1) = y(1) = 1.$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) = 0, \qquad \frac{2y\dot{y}^2}{\dot{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2y^2\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0.$$

Так как для отыскания экстремали достаточно решить только одно уравнение, то используем более простое первое уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = y^2y'^2 = (yy')^2 = \text{const},$$

и, таким образом, $y^2/2 = C_1x + C_2$. **Используя граничные условия, получаем** $y^2 = x$.

Задачи с дополнительными условиями в виде уравнений. При нахождении экстремума функционала

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y_1, \ldots, y_n,\ y'_1, \ldots, y'_n)\,dx$$

с граничными условиями

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \qquad y_i(x_1) = y_{i1}$$

и дополнительными условиями

а) $g_j(x,\ y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ m < n)$,

или

б) $\int_{x_0}^{x_1} g_j(x,\ y_1, \ldots, y_n,\ y'_1, \ldots, y'_n)\,dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ m < n)$

(*изопериметрическая задача*), или

в) $g_j(x,\ y_1, \ldots, y_n,\ y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ m < n)$,

уравнения Эйлера – Лагранжа принимают вид

$$L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

причем так называемая *функция Лагранжа* L для дополнительных условий а), б), в) имеет следующий вид:

а) $L(x,\ y,\ y',\ \lambda) = f(x,\ y,\ y') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)g_j(x,\ y) \quad (y = (y_1, \ldots, y_n))$;

б) $L(x, y, y', \lambda) = f(x, y, y') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, y, y')$;

в) $L(x, y, y', \lambda) = f(x, y, y') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) g_j(x, y, y')$.

При этом экстремали $y_j(x)$ и постоянные λ_j или функции $\lambda_j(x)$ (*множители Лагранжа*) должны быть определены так, чтобы выполнялись дополнительные условия и уравнения Эйлера (ср. 3.1.6.6).

Формулы для функции Лагранжа показывают, что здесь речь идет об обобщении известного метода множителей Лагранжа при поиске условного экстремума.

Достаточные условия экстремума. В то время как для действительных функций одного переменного условие $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) является достаточным для того, чтобы в точке x_0 функция $f(x)$ имела минимум (максимум), аналогичных условий для второй вариации $\delta^2 J$ (т. е. $\delta^2 J > 0$ или $\delta^2 J < 0$) не хватает, чтобы получить достаточные условия экстремума для вариационной задачи. Для этого привлекают дополнительные соображения, основанные на рассмотрении полей экстремалей. В дальнейшем будет рассматриваться достаточное условие для слабого и сильного экстремумов только для задачи Лагранжа нахождения экстремума функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1.$$

Будем говорить, что экстремаль $y = y(x)$ можно расположить в *поле экстремалей*, если существует семейство экстремалей $y = y(x, C)$ (C – параметр) такое, что

– оно покрывает определенную область G плоскости x, y так, что через каждую точку G проходит ровно одна экстремаль семейства;

– для данного $C = C_0$ получаем исходную экстремаль $y = y(x)$, причем экстремаль $y = y(x)$ лежит не на границе области G.

Поле экстремалей называется *центральным*, если все кривые поля исходят из точки $(x_0, y_0) \in G$ (центр семейства экстремалей). Наклон проходящих через точку (x, y) экстремалей поля называется *градиентом* поля в точке (x, y) и обозначается $p(x, y)$; $p(x, y)$ как функция от (x, y) называется *градиентной функцией*.

Достаточным условием для включения экстремали в поле экстремалей (с центром (x_0, y_0)) является условие Якоби $x_s > x_1$.

При применении E-функции Вейерштрасса, определяемой соотношением

$$E(x, y, p, y') = \\ = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p) f'_{y'}(x, y, p)$$

(где $p = p(x, y)$ – градиентная функция), получаются следующие достаточные условия экстремума:

а) Функция $y(x)$ доставляет функционалу $J(y)$ слабый (локальный) экстремум, если

1) $y(x)$ является экстремалью, т. е. удовлетворяет уравнению Эйлера – Лагранжа и граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$;

2) $y(x)$ может быть включена в поле экстремалей;

3) знак функции $E(x, y, p, y')$ не изменяется во всех точках (x, y), которые лежат достаточно близко от экстремали $y(x)$, и для всех значений y', лежащих вблизи $p(x, y(x))$. Функция y доставляет функционалу минимум при $E \geqslant 0$ и максимум при $E \leqslant 0$.

б) Функция $y(x)$ доставляет функционалу $J(y)$ сильный (локальный) экстремум, если

1) выполнены пп. 1) и 2) условий а);

2) функция $E(x, y, p, y')$ не изменяет свой знак для всех точек (x, y), лежащих в достаточной близости от $y(x)$, и для любых значений y' ($E \geqslant 0$ – минимум, $E \leqslant 0$ – максимум).

Пример 16. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^1 y'^3\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Для этой задачи, решенной в примере 8, экстремаль $y = x$ удовлетворяет условиям Лагранжа и Якоби и может быть включена в поле экстремалей $y = Cx$; E-функция имеет вид

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$

Из выражения для E-функции видно, что первый сомножитель всегда неотрицателен, а второй положителен для значений y', которые расположены около 1, т. е. $y = x$ реализует слабый (локальный) минимум функционала. Условие сильного экстремума не выполнено, так как при $y' < -2$ E-функция отрицательна.

Пример 17. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^1 (x + 2y + y'^2/2)\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Экстремали этой задачи имеют вид

$$y = x^2 + C_1 x + C_2.$$

Применение граничных условий дает $y = x^2 - x$. Условия Лежандра и Якоби выполнены. Экстремаль $y = x^2 - x$ может быть включена в поле $y = x^2 + Cx$

Из соотношения $E(x, y, p, y') = (y' - p)^2/2$ видно, что $E \geqslant 0$ для всех y', так что экстремаль $y = x^2 - x$ реализует сильный (локальный) минимум.

Задачи для функций многих переменных.

Пример 18. Найти экстремум функционала

$$J(u) = \iint_G f(x, y, u, u'_x, u'_y)\,dx\,dy, \tag{3.16}$$

$$u(x, y) = u_0(x, y) \text{ для } (x, y) \in DG. \tag{3.17}$$

Здесь отыскивается функция $u(x, y)$, которая определена в области G плоскости x, y и принимает заданные значения $u_0(x, y)$ на границе DG области G. Кроме того, требуется, чтобы $u(x, y)$ имела непрерывные частные производные $u'_x(x, y)$ и $u'_y(x, y)$.

Большинство из указанных выше условий экстремума для функций одного переменного непосредственно обобщается и на этот случай.

Так, например, в качестве необходимого условия слабого (локального) экстремума функционала (3.16) получают следующее уравнение Эйлера – Лагранжа: если u дважды непрерывно дифференцируема, то

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u'_y} = 0. \tag{3.18}$$

Это есть дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка. Так как значения функции u на границе ∂G заданы, то краевая задача может быть решена.

Требование, чтобы функция u имела непрерывные производные u'_x и u'_y, позволяет ослабить следующая

Теорема Хаара. Равенство нулю первой вариации $J(y)$ из (3.16) при непрерывной функции u и кусочно непрерывных производных u'_x и u'_y эквивалентно равенству

$$\iint_S f'_u\,dx\,dy = \int_L (f'_{u'_x}dy - f'_{u'_y}dx),$$

где S – любая односвязная часть множества G (ограниченная кусочно гладкими кривыми), а L представляет собой ее границу (при обходе в положительном направлении).

Интегральное соотношение в теореме Хаара играет ту же роль, которую ранее играло уравнение Эйлера – Лагранжа.

Пример 19. Для функционала $J(u)=\iint_G (u_x'^2 + u_y'^2)\,dx\,dy$ уравнение Эйлера – Лагранжа имеет вид

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad (\textit{уравнение Лапласа}).$$

Задачи Майера и Больца. Наряду с задачей Лагранжа на практике встречаются также задачи на нахождение экстремума функционала

$$J(y) = F(y_0(x_1)) \tag{3.19}$$

или

$$J(y) = F_1(y_0(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} F_2(x, y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n)\,dx \tag{3.20}$$

с условиями

$$\begin{aligned} &f_i(x, y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n) = 0 \\ &\qquad (i = 0, 1, \ldots, m;\ m < n), \\ &y_j(x_0) = y_{j0} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n), \\ &y_j(x_1) = y_{j1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Задачи такого вида называются *задачей Майера* ((3.19), (3.21)) или *задачей Больца* ((3.20), (3.21)). Так как задача Майера есть частный случай задачи Больца ($F_2 = 0$), то рассматривается только последняя. Функционал $F_1(y_0(x_1))$ из (3.20) может быть приведен посредством замены

$$y_{n+1}(x) = F_1(y_0(x)),$$

т. е.

$$y'_{n+1}(x) = F'_{1y_0}(y_0(x))\,y'_0(x), \quad y_{n+1}(x_0) = F_1(y_{00}),$$

к виду

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{1y_0}(y_0(x))\,y'_0(x)\,dx + F_1(y_{00}).$$

Так как $F_1(y_{00})$ есть известная постоянная, которая не оказывает влияния на поиск экстремума, то задача Больца эквивалентна следующей *задаче Лагранжа* нахождения экстремума функционала:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} (F'_{1y_0}(y_0)\,y'_0 + F_2(x, y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n))\,dx,$$

$$f_i(x, y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m;\ m < n),$$

$$y_j(x_0) = y_{j0} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$y_j(x_1) = y_{j1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

3.2.1.3. Теория Гамильтона – Якоби. Между уравнениями Эйлера – Лагранжа и уравнениями в частных производных 1-го порядка существует важная связь, которая была открыта Гамильтоном и развита Якоби.

В дальнейшем будем рассматривать только функционалы вида

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Предположим, что существует экстремальное значение функционала. Пусть, например, J есть минимальное значение функционала $J(y)$, т. е.

$$J = J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y^0, y^{0\prime})\,dx.$$

Пусть искомая функция $y^0(x)$ соединяет точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P_1(x_1, y_1)$, т. е.

$$y^0(x_0) = y_0, \qquad y^0(x_1) = y_1.$$

Величину J называют *характеристической функцией Гамильтона*. Если считать, что функция $y^0(x)$ уже определена, то значение J будет зависеть только от пределов интегрирования, т. е.

$$J = J(x_0, y_0;\ x_1, y_1).$$

Предположим, что точка P_0 зафиксирована, а точка P_1 может перемещаться, т. е. $P_1 = P_1(x, y)$. Тогда

$$J = J(x, y),$$

т. е. J есть функция только координат. Можно показать, что функция $J(x, y)$ удовлетворяет следующим *формулам Гамильтона*:

$$J'_x = f(x, y, p(x, y)) - p(x, y)\,f'_{y'}(x, y, p(x, y)), \tag{3.22}$$

$$J'_y = f'_{y'}(x, y, p(x, y)), \tag{3.23}$$

где $p(x, y) = y^{0\prime}$ – градиент.

Формулы (3.22), (3.23) играют в вариационном исчислении фундаментальную роль. При помощи этих формул можно вывести ряд условий экстремума; в частности, уравнение Эйлера – Лагранжа получается, если предположить, что J является дважды непрерывно дифференцируемой функцией по x и y. Исключая $p(x, y)$ из формул Гамильтона, получают *уравнение Гамильтона – Якоби*:

$$J'_x + H(x, y, J'_y) = 0, \tag{3.24}$$

где

$$H(x, y, J'_y) = (p f'_{y'}(x, y, p) - f(x, y, p))_{p = y'(x, y, J'_y)}$$

(*H – функция Гамильтона*, или *гамильтониан*); $p = y'(x, y, J'_y)$ находим из уравнения (3.23) (в предположении, что $f''_{y'y'}|_{y'=p} \neq 0$).

Уравнение Гамильтона – Якоби является уравнением в частных производных 1-го порядка для определения экстремума $J(x, y)$ функционала J. Общее решение (3.24) может содержать наряду с постоянными также и функции, которые можно выбирать произвольно. Пусть

$$J = J(x, y, a)$$

есть однопараметрическое свойство решений, в котором параметр a является существенным, т. е. выступает не только как аддитивный член. Тогда основная теорема теории Гамильтона – Якоби позволяет утверждать следующее: функция, определенная из уравнения $\dfrac{\partial J(x, y, a)}{\partial a} = b$

(b – произвольная постоянная), является общим решением уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала $J(y)$ в неявной форме.

Во многих случаях поиск решения уравнения Гамильтона – Якоби оказывается более простым, чем уравнения Эйлера – Лагранжа.

Пример 20. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}\,dx, \qquad y(x_0)=y_0, \qquad y(x_1)=y_1.$$

Запишем формулы Гамильтона применительно к данному случаю:

$$J'_y = p\sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{1+p^2},$$

$$J'_x = \sqrt{(x^2+y^2)(1+p^2)} - p^2\sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{1+p^2} = \sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{1+p^2}.$$

Решение уравнения Гамильтона – Якоби

$$J'^2_x + J'^2_y = x^2+y^2$$

находим в виде

$$J(x, y) = (x^2 \sin a - 2xy\cos a - y^2 \sin a)/2.$$

Из уравнения $\partial J/\partial a = b/2$ получаем общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа

$$x^2\cos a + 2xy\sin a - y^2\cos a = b.$$

3.2.1.4. Обратная задача вариационного исчисления. Необходимое условие того, что функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J(y)$, приводит к уравнению Эйлера – Лагранжа. *Обратной задачей вариационного исчисления* называют задачу построения по заданному уравнению в частных или обыкновенных производных функционала $J(y)$, для которого это уравнение представляет собой уравнение Эйлера – Лагранжа. Этот метод играет важную роль при численном решении дифференциальных уравнений с граничными условиями.

В общем случае, однако, построить функционал $J(y)$ по заданному дифференциальному уравнению довольно сложно.

Частный случай. Рассмотрим уравнение (в частных или обыкновенных производных) вида

$$Au = f,$$

где A – линейный дифференциальный оператор, а f – известная функция. Пусть, далее, оператор A симметричен, т. е. $(Au, v) = (u, Av)$, и положителен, т. е. $(Au, u) \geqslant 0$ (равно 0 только при $u \equiv 0$). Выражение (u, v) означает скалярное произведение функций u и v. Если уравнение $Au = f$ имеет решение, то оно доставляет минимум функционалу

$$J(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Обратно, если существует элемент, который реализует минимум функционала $J(u)$, то этот элемент является решением уравнения $Au = f$.

Выводы этой теоремы могут быть применены для построения функционала по заданному уравнению в частных или обыкновенных производных, причем так, чтобы уравнение Эйлера – Лагранжа для этого функционала совпадало с заданным уравнением. Главная трудность состоит в доказательстве того, что оператор A является симметричным и положительным.

Пример 21. Пусть дано уравнение

$$Au \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x)$$

с граничными условиями $u(a) = u(b) = 0$. При предположениях, что функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ являются непрерывными и для каждого $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, оператор A является симметричным и положительным:

$$(Au, v) = -\int_a^b v(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))\,dx = (u, Av)$$

(для $v(a) = v(b) = 0$), т. е. A симметричен. Если подставить в это выражение $v = u$, то получим, что

$$(Au, u) \geqslant p_0\int_a^b (u')^2\,dx \geqslant \frac{p_0}{(b-a)^2}\int_a^b u^2\,dx \geqslant 0,$$

т. е. оператор A положителен. Таким образом, вышеупомянутое уравнение $Au = f$ является уравнением Эйлера – Лагранжа для функционала

$$J(u) = \int_a^b\left(\left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right)u - 2fu\right)dx.$$

Пример 22. Пусть дано уравнение Пуассона

$$Au = -\Delta u \equiv -u''_{xx} - u''_{yy} = f(x, y)$$

с граничными условиями

$$u(x, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \partial G,$$

где ∂G – граница области G, в которой ищется решение. Тогда

а) $(Au, v) - (Av, u) =$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv'_x - vu'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv'_y - vu'_y)\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{\partial G} (-(uv'_y - vu'_y)\,dx + (uv'_x - vu'_x)\,dy) = 0,$$

если $v(x, y) = 0$ при $(x, y) \in \partial G$, и

б) $(Au, u) = -\iint_G u(u''_{xx} + u''_{yy})\,dx\,dy =$

$$= -\int_{\partial G} (-uu'_y\,dx + uu'_x\,dy) + \iint_G (u'^2_x + u'^2_y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G (u'^2_x + u'^2_y)\,dx\,dy \geqslant 0.$$

Из $(Au, u) = 0$ следует $u'^2_x + u'^2_y = 0$, т. е. $u(x, y) = 0$, так как и $(x, y) = \text{const}$ и $u(x, y) = 0$ на ∂G.

Таким образом, оператор A является симметричным и положительным, и для функционала $J(u)$ получается выражение

$$J(u) = \iint_G (u'^2_x + u'^2_y - 2fu)\,dx\,dy.$$

3.2.1.5. Численные методы. Во многих практических случаях уравнение Эйлера – Лагранжа нельзя решить точно и приходится использовать приближенные методы. Для того чтобы решить уравнение Эйлера – Лагранжа, можно привлекать численные методы решения дифференциальных уравнений (прежде всего метод сеток). Так как при этом приходится решать краевые задачи, то часто появляются трудности. Поэтому для численного решения вариационных задач применяются *прямые методы*. В этом случае вместо построения решения

дифференциальных уравнений пытаются построить минимизирующую последовательность.

Если функционал $J(y)$ ограничен на своей области определения $D(J)$ снизу, т. е.

$$\inf_{y \in D(J)} J(y) = m > -\infty,$$

то каждую последовательность $\{y^n\}$ из $D(J)$, для которой имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} J\{y^n\} = m,$$

называют *минимизирующей последовательностью.* Сама последовательность $\{y^n\}$ при этом не обязательно должна сходиться. Кроме того, не всегда имеются минимальные элементы $y^0 \in D(J)$ (т. е. $J(y^0) = m$). Зачастую относительно $\{y^n\}$ можно только сказать, что

$$J(y^{n+1}) \leqslant J(y^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(метод релаксации).

В то время как при помощи уравнений Эйлера – Лагранжа определяют локальный экстремум, прямые методы позволяют находить абсолютный экстремум. Правда, необходимы дополнительные соображения относительно того, насколько решения, найденные прямым методом, удовлетворяют уравнению Эйлера – Лагранжа.

Метод Эйлера рассмотрим на примере решения задачи нахождения экстремума функционала

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Если отрезок $[a, b]$ разбить на n равных отрезков точками

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

то на основе метода прямоугольников функционал $J(y)$ можно приблизить выражением

$$J_n(y) = F(y_1, \ldots, y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih, y_i, (y_{i+1} - y_i)/h)$$

$(h = (b-a)/n,\ y_i \approx y(a+ih))$. Тем самым получаем приближенную задачу на нахождение экстремума для функции $n-1$ переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Пример 23. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)\,dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Отрезок [0, 1] разбивается на пять равных частей, и

$$y_0 = y(0) = 0, \quad y_1 = y(0{,}2), \quad y_2 = y(0{,}4),$$
$$y_3 = y(0{,}6), \quad y_4 = y(0{,}8), \quad y_5 = y(1) = 0,$$
$$y'(0) \approx y_0' = (y_1 - 0)/(0{,}2), \quad y'(0{,}2) \approx y_1' = (y_2 - y_1)/(0{,}2),$$
$$y'(0{,}4) \approx y_2' = (y_3 - y_2)/(0{,}2), \quad y'(0{,}6) \approx y_3' = (y_1 - y_3)/(0{,}2),$$
$$y'(0{,}8) \approx y_4' = (0 - y_4)/(0{,}2).$$

Приближенная задача на нахождение экстремума функционала

$$J_5(y) = f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0{,}2\sum_{i=0}^{4}\left(\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{0{,}2}\right)^2 + y_i^2 + 0{,}4iy_i\right)$$

решается методами дифференциального исчисления:

$$f'_{y_1} = \frac{2y_1}{0{,}04} - \frac{2(y_2 - y_1)}{0{,}04} + 2y_1 + 0{,}4 = 0,$$
$$f'_{y_2} = \frac{2(y_2 - y_1)}{0{,}04} - \frac{2(y_3 - y_2)}{0{,}04} + 2y_2 + 0{,}8 = 0,$$
$$f'_{y_3} = \frac{2(y_3 - y_2)}{0{,}04} - \frac{2(y_4 - y_3)}{0{,}04} + 2y_3 + 1{,}2 = 0,$$
$$f'_{y_4} = \frac{2(y_4 - y_3)}{0{,}04} + \frac{2y_4}{0{,}04} + 2y_4 + 1{,}6 = 0.$$

В следующей таблице сравниваются величины y_i, полученные на основе данного приближения, с точными значениями $y(0{,}2i)$ (округленными до четвертого знака):

i	y_i	$y(0{,}2i)$
1	−0,0286	−0,0287
2	−0,0503	−0,0505
3	−0,0580	−0,0583
4	−0,0442	−0,0444

Метод Ритца. При помощи этого метода, как и при использовании метода Эйлера, вариационная задача сводится к задаче отыскания экстремума функций.

Основная идея заключается в следующем. Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots$ есть полная система функций в области определения $D(J)$ функционала $J(y)$, т. е. каждая функция y из $D(J)$ может быть приближена с любой степенью точности линейной комбинацией функций u_i:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,$$

причем число n зависит от требуемой точности.

Если эту линейную комбинацию подставить в функционал $J(y)$, то он окажется функцией только параметров a_i:

$$J\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Необходимым условием того, чтобы эта функция принимала экстремальное значение относительно параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, является система соотношений

$$f'_{a_1} = 0, \quad f'_{a_2} = 0, \ldots, f'_{a_n} = 0.$$

Из этой системы нелинейных уравнений определяются параметры a_i. Функции u_i называют также *координатными функциями.* Они подбираются обычно таким образом, чтобы функция

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

удовлетворяла граничным условиям задачи.

Пример 24. Решение задачи из примера 23 методом Ритца.

Допустим, что используются координатные функции

$$u_1(x) = x^2 - x, \quad u_2(x) = x^3 - x^2, \ldots, u_n(x) = x^{n+1} - x^n.$$

Пусть n равно 2, т. е.

$$y_2(x) = a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2), \quad y_2(0) = y_2(1) = 0.$$

Тогда

$$J(y_2(x)) = \int_0^1 ((a_1(2x-1) + a_2(3x^2-2x))^2 +$$
$$+ (a_1(x^2-x) + a_2(x^3-x^2))^2 + 2x(a_1(x^2-x) +$$
$$+ a_2(x^3-x^2))) dx = f(a_1, a_2).$$

Из условий $f'_{a_1} = 0$ и $f'_{a_2} = 0$ вытекает, что

$$\frac{11}{15}a_1 + \frac{11}{30}a_2 = \frac{1}{6}, \quad \frac{11}{30}a_1 + \frac{2}{7}a_2 = \frac{1}{10},$$

и, следовательно, $a_1 = 69/473$, $a_2 = 77/473$, $y_2(x) = (77x^3 - 8x^2 - 69x)/473$.

Сравнение с точным решением $y(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x}) - x$ дано в таблице.

i	$y_2(0,2i)$	$y(0,2i)$
1	−0,0285	−0,0287
2	−0,0506	−0,0505
3	−0,0585	−0,0583
4	−0,0442	−0,0444

Пример 25. Как следует из примера 22, уравнение Лапласа

$$v''_{xx} + v''_{yy} = 0$$

есть уравнение Эйлера – Лагранжа для функционала

$$J(v) = \iint_G (v'^2_x + v'^2_y)\, dx\, dy.$$

Пусть область G ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ и на ее границе ∂G задана функция $v(x, y) = x^2 + y^2$. Возьмем координатные функции вида

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy(1 - x - y),$$
$$u_2(x, y) = x^2y(1 - x - y), \ldots$$

и положим $n = 3$, т. е.

$$v_3(x, y) = x^2 + y^2 + a_1xy(1 - x - y) + a_2x^2y(1 - x - y) +$$
$$+ a_3x^3y(1 - x - y).$$

Функция $u_0(x, y)$ прибавляется для того, чтобы $v_3(x, y)$ удовлетворяла граничным условиям. Таким образом,

$$J(v_3) = f(a_1, a_2, a_3).$$

Из соотношений $f'_{a_1} = 0$, $f'_{a_2} = 0$, $f'_{a_3} = 0$ получим $a_1 = 3{,}0401$, $a_2 = a_3 = -0{,}0562$, и, следовательно,

$$v_3(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)(3{,}0401 - 0{,}0562(x + x^2)).$$

Метод градиентного спуска. Так же как и для задачи нелинейной оптимизации, для численного решения вариационных задач можно применять метод градиентного спуска.

Пример 26. Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx,$$

причем на функции $y(x)$ не накладывается никаких граничных условий.

Градиент функционала $J(y)$ определяется в гильбертовом пространстве (см. 2.4.4.1.6) следующим образом. Если *дифференциал Гато*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(y + th) - J(y)}{t}$$

(для таких h, что $y + th \in D(J)$ в некоторой окрестности точки $t = 0$) существует и равен $(J'(y), h)$, то $J'(y)$ называют *градиентом функционала* $J(y)$. Под скалярным произведением (u, v) при этом понимают интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx.$$

В 3.2.1.2 было получено выражение

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'}\right) h(x)\, dx,$$

откуда для градиента получаем

$$J'(y) = f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'}.$$

Если $y(x)$ является экстремалью, т. е. $f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0$, то $J'(y) = 0$. Используем этот градиент для приближенного решения указанной выше задачи.

Исходя из известного начального приближения $y^1(x)$, построим последующие приближения по формуле

$$y^{n+1} = y^n - \beta_n J'(y^n).$$

Величину шага β_n можно определить, например, из условия

$$J(y^n - \beta_n J'(y^n)) = \min_{\beta \geqslant 0} J(y^n - \beta J'(y^n)).$$

Заметим, что $J(y^n - \beta J'(y^n))$ – функция только параметра β. Для последовательности $\{y^n\}$ имеет место цепочка неравенств

$$J(y^1) \geqslant J(y^2) \geqslant \ldots \geqslant J(y^n) \geqslant \ldots$$

Пример 27. Рассмотрим решение задачи из примеров 23 и 24 на нахождение минимума функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)\, dx$$

(без задания граничных условий). Вычислим градиент

$$J'(y) = 2x + 2y - 2y''$$

и положим

$$y^{n+1} = y^n - \beta_n(2x + 2y^n - 2(y^n)'').$$

Пусть начальное приближение есть $y^1(x) = 0$. Это означает, что $J'(y^1) = 2x$ и $J(y^1) = 0$, откуда для первой итерации следует:

$$y^2 = y^1 - \beta J'(y^1) = -2\beta x,$$

$$J(y^2) = 4\int_0^1 (\beta^2 + \beta^2x^2 - \beta x^2)\, dx = 4\left(\frac{4}{3}\beta^2 - \frac{1}{3}\beta\right) = \min_{\beta \geqslant 0},$$

т. е. $\beta_1 = 1/8$, $y^2(x) = -x/4$, $J(y^2) = -1/12$.

Аналогично делают следующие шаги. Процесс останавливают, когда $J'(y^n) = 0$ или, например, когда разница двух следующих друг за другом значений функционала становится достаточно малой (например, $J(y^n) - J(y^{n+1}) < \varepsilon$).

Легко найти точное решение этой задачи.

Из уравнения Эйлера – Лагранжа $y'' - y - x = 0$ следует, что $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - x$; произвольные постоянные C_1 и C_2 можно определить из (естественных) граничных условий

$$y'(0) = C_1 - C_2 - 1 = 0,$$

$$y'(1) = C_1e - C_2e^{-1} - 1 = 0,$$

т. е.

$$C_1 = \frac{1 - e^{-1}}{e - e^{-1}}, \quad C_2 = \frac{1 - e}{e - e^{-1}}.$$

3.2.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

3.2.2.1. Основные понятия.

Пример 28. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки. Состояние движущегося объекта можно охарактеризовать функцией $x_1(t)$ и скоростью $x_2(t)$. На движение можно влиять выбором ускорения $u(t)$. Уравнения движения при этом имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u.$$

Существенно, что состояние объекта, описываемое указанным законом (системой обыкновенных дифференциальных уравнений), изменяется под внешним воздействием (управлением). Функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, описывающие состояние объекта, называют *фазовыми координатами объекта*. Вектор $x(t)$ с координатами $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ называют *фазовым вектором*, n-мерное пространство точек x — *фазовым пространством*. Состояние объекта зависит от величин управления $u_1(t), \ldots, u_r(t)$, которые объединяются в *вектор управления* $u(t)$; r-мерное пространство точек u называется *пространством управления*.

Если $x^0 = x(t_0)$ есть начальное состояние объекта, то состояние $x(t)$ должно однозначно определяться заданием x^0 и $u(t)\,(t \geqslant t_0)$. Соответствующую кривую в пространстве состояний, исходящую из точки x^0, называют *траекторией*.

Пусть закон изменения состояния описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (*динамической системой*):

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t),$$

или, в векторном виде,

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Если функции $f_i(x, u, t)$ и $\partial f_i/\partial x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывно дифференцируемы по всем аргументам, то говорят о *непрерывной динамической системе*. Динамическая система

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}(t)\,u_k,$$

т. е.

$$f = Ax + Bu,$$

где A есть $n \times n$-матрица с элементами a_{ij}, а B — $n \times r$-матрица с элементами b_{ik}, называется *линейной*.

Две динамические системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad \dot{z} = g(z, u, t)$$

называются *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица P размера $n \times n$ с постоянными элементами такая, что

$$Z(t) = Px(t).$$

Тогда $\dot{z} = P \cdot \dot{x} = P \cdot f(P^{-1}z, u, t)$.

В общем случае вектор управления не может выбираться произвольно, так как в силу реальных технических условий на него накладываются определенные ограничения. Пусть U есть подмножество в пространстве управления, определенное, например, посредством неравенств $|u_i| \leqslant a_i$, или $\|u\| \leqslant a$, или $h(u) \leqslant 0$, и пусть $u(t)$ принимает значения только из U; тогда U называется *областью управления* (зачастую область U является замкнутой или даже замкнутой, ограниченной и выпуклой).

Очень часто на $u(t)$ накладываются дополнительные требования гладкости. Если, например, управляющие устройства работают безынерционно, то это значит, что управление должно быть кусочно непрерывным.

Управление называется *допустимым* на отрезке $[t_0, t_1]$, если

1) $u(t)$ принимает значения только из U;
2) $u(t)$ кусочно непрерывна.

Состояние x^1 называется *достижимым* из состояния $x^0 = x(t_0)$, если существуют допустимое управление и такое $t_1 \geqslant t_0$, что для соответствующей траектории $x(t_1) = x^1$. Множество всех состояний, достижимых из x^0, называют *множеством достижимости*, относящимся к начальному состоянию $x^0 = x(t_0)$ и области управления U. Если при этом задано и t_1, то говорят о множестве достижимости, относящемся к x^0, U и t_1.

Если множество U выпукло, то для линейной системы множество достижимости, относящееся к фиксированному t_1, является также выпуклым (множество достижимости в общем смысле при этом не обязательно выпуклое).

Всюду в дальнейшем будем считать, что область управления совпадает со всем пространством управления. Если состояние $x^1 = 0$ является достижимым из состояния $x^0 = x(t_0)$, то говорят, что x^0 — *управляемое* состояние в момент времени t_0. Если каждое состояние x^0 является управляемым в момент времени t_0, то систему для времени t_0 называют *управляемой*; если каждое состояние x^0 является управляемым для каждого t_0, то систему называют *полностью управляемой* (т. е. каждую точку пространства состояний при любом начальном моменте времени можно перевести в начало координат).

Система управляема тогда и только тогда, когда любая эквивалентная ей система является управляемой. Однако это утверждение трудно использовать для практического анализа.

Для линейной системы, у которой элементы матриц A и B являются постоянными (автономная линейная система), справедливо следующее утверждение.

Пусть G есть матрица размера $n \times n \cdot r$:

$$G = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B);$$

линейная автономная система

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

является полностью управляемой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\operatorname{rang} G = n.$$

3.2.2.2. Принцип максимума Понтрягина. При одинаковых начальных состояниях данной динамической системы, но при разных допустимых управлениях получают, вообще говоря, различные функции состояний и, следовательно, различные процессы $(u(t), x(t))$. Поэтому имеет смысл говорить о таком процессе, который оптимален в некотором смысле. Тогда говорят об *оптимальном процессе*:

соответствующее управление называют *оптимальным управлением*, соответствующее состояние — *оптимальным* и соответствующую кривую — *оптимальной траекторией*.

Основная задача. Пусть задана динамическая система

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и областью управления U. Ищется такое допустимое управление и соответствующая траектория, что для фиксированного конечного момента времени t_1 выражение

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) = c^T x(t_1),$$

где c_i — заданные постоянные, является минимальным. (Очевидно, что речь идет о минимизации линейной комбинации координат конечного состояния.)

Введем *присоединенную вектор-функцию* $\mathbf{p}(t)$ с координатами $p_1(t), \ldots, p_n(t)$, удовлетворяющими соотношению

$$\dot{p}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} p_j, \quad p_i(t_1) = -c_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Вводя обозначения $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $p = (p_1, \ldots \ldots, p_n)^T$,

$$\partial f/\partial x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

получаем векторное представление:

$$\dot{p} = -\frac{\partial f}{\partial x} p, \qquad p(t_1) = -c.$$

Под *функцией Гамильтона* понимают выражение

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i = pf.$$

Таким образом, динамическая и присоединенная системы могут быть представлены в форме *канонических уравнений*:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad x(t_0) = x^0,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(t_1) = -c,$$

где $\frac{\partial H}{\partial p}$ и $\frac{\partial H}{\partial x}$ — градиенты H по p и x.

Принцип максимума Понтрягина. Для того чтобы процесс $(u(t), x(t))$ решал заданную основную задачу (т. е. являлся оптимальным процессом в смысле постановки задачи), необходимо существование присоединенной функции $p(t)$, являющейся решением присоединенной системы с соответствующим граничным условием и такой, что для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется условие

$$\max_{u \in U} H(p(t), x(t), u, t) = H(p(t), x(t), u(t), t).$$

Если нужно максимизировать J, то указанное относительно H условие максимума заменяется соответствующим условием минимума или граничное условие записывается в виде $p(t_1) = +c$.

Существенное преимущество принципа максимума по сравнению с классическими теоремами вариационного исчисления состоит в том, что он применим для любого (в частности, замкнутого) множества U. Расширение класса возможных областей управления U по сравнению с классическим случаем открытых множеств весьма существенно для приложений теории.

Если нужно минимизировать дважды дифференцируемую по всем аргументам функцию

$$J = F[x(t_1)],$$

то в принципе максимума Понтрягина начальные условия для присоединенной системы следует заменить на

$$p_i(t_1) = -\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{t = t_1}.$$

Если нужно минимизировать функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)\, dt,$$

где функция f_0 удовлетворяет таким же условиям, что и f_i, то функция Гамильтона определяется формулой

$$H = -f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i,$$

а присоединенная система имеет вид

$$\dot{p}_i = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad p_i(t_1) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Пример 29.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \qquad x_i(0) = x_i^0, \ |u| \leq 1, \qquad t_1 = 1.$$

Найдем оптимальное управление, при котором функционал

$$\int_0^1 (u + u^2)\, dt$$

оказывается минимальным. Имеем

$$H^* = -(u + u^2) + x_2 p_1 + u p_2 = x_2 p_1 - (1 - p_2) u - u^2,$$

$$\dot{p}_1 = 0, \qquad p_1(1) = 0, \qquad \dot{p}_2 = -p_1, \qquad p_2(1) = 0,$$

т. е.

$$p_1(t) = p_2(t) = 0.$$

Следовательно, $H^* = -u - u^2 = -\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Максимум H^* доставляет $u = -1/2$.

Условие для конечной точки. Условие трансверсальности. Условия в задачах часто задаются в конечной точке $x(t_1)$. Так, в дополнение к основной задаче на оптимальной траектории часто должны выполняться условия вида

$$F_k[x(t_1)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

причем предполагается, что функции F_k дважды дифференцируемы по всем x_i и якобиан $\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)$ имеет максимальный ранг m. Тогда условия $F_k = 0$ ($k = 1, \ldots, m$) определяют в пространстве состояний некоторое гладкое многообразие.

Требуется найти такое оптимальное управление, которое переводит точку $x^0 = x(t_0)$ в произвольно выбранную точку этого многообразия. Если вектор $p(t_1)$ перпендикулярен конечному многообразию, т. е. если

$$p_i(t_1) = p_0 c_i - \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right|_{t=t_1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

при некоторых значениях параметров λ_α ($p_0 \leqslant 0$ – постоянная), то говорят о выполнении *условий трансверсальности.*

Конечные условия для $p(t_1)$ в принципе максимума Понтрягина должны быть заменены на эти условия трансверсальности.

Если критерий оптимальности задан в интегральной форме:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)\,dt,$$

то гамильтониан определяется формулой

$$H^* = p_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i,$$

а присоединенная система имеет вид

$$\dot p_i = -p_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i},$$

$$p_i(t_1) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\right|_{t=t_1} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $p_0 \leqslant 0$ – постоянная. В том случае, когда условия для конечной точки не заданы, можно сразу записать, что $p_0 = -1$.

Важнейшие соотношения, устанавливаемые в принципе максимума Понтрягина, приведены в табл. 3.4.

Если I представляет собой подмножество $\{1, 2, \ldots, n\}$, а конечные условия таковы, что

$$x_i(t_1) = x_i^1 \qquad \text{для} \quad i \in I$$

(некоторые конечные координаты заданы), то условие трансверсальности принимает специальный вид:

$$p_i(t_1) = \begin{cases} \text{заданы для } i \in I, \\ p_0 c_i \quad \text{для } i \notin I. \end{cases}$$

Пример 30. Дано

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = u, \qquad x_1(0) = x_2(0) = 0, \qquad x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

Надо найти оптимальное управление, при котором минимизируется интеграл

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2\,dt.$$

Имеем $t_1 = 1$, $F_1(x) = x_1 - 1$, $F_2(x) = x_2 - 1$,

$$H^* = p_0 \frac{1}{2} u^2 + p_1 x_2 + p_2 u,$$

$$\dot p_1 = 0, \quad p_1(1) = -\lambda_1, \quad p_2(1) = -\lambda_2, \quad \dot p_2 = -p_1,$$

т. е.

$$p_1(t) = -\lambda_1 \quad \text{и} \quad p_2(t) = \lambda_1 t - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Тем самым максимум функции Гамильтона дает оптимальное управление (очевидно, что $p_0 < 0$ и можно принять $p_0 = -1$)

$$u(t) = \lambda_1 t - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Неизвестные параметры λ_1 и λ_2 должны быть определены так, чтобы система переводилась в конечную точку

$$x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

Интегрируя уравнения состояния, получим, что

$$x_1(t) = \frac{1}{6}\lambda_1 t^3 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)t^2, \quad x_2(t) = \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t.$$

Из условий $x_1(1) = x_2(1) = 1$ следуют линейные уравнения для определения параметров λ_1 и λ_2:

$$\frac{1}{6}\lambda_1 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 1, \qquad \frac{1}{2}\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) = 1,$$

так что оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = -6t + 4.$$

Если на управление u накладываются ограничения в форме неравенств (например, $|u(t)| \leqslant 1$), то, как легко видеть, найти оптимальное управление становится значительно труднее.

Аналогично получают условие трансверсальности для начальной точки в случае, если $x(t_0)$ не задана, а только требуется, чтобы $x(t_0)$ являлась точкой гладкого многообразия, описываемого следующей системой:

$$G_\beta[x(t_0)] = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, l).$$

Тогда для присоединенной векторной функции должно выполняться условие

$$p_i(t_0) = -\sum_{\beta=1}^{l} \mu_\beta \cdot \left.\frac{\partial G_\beta}{\partial x_i}\right|_{t=t_0} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Задачи со свободным конечным временем. Во многих задачах конечное время t_1 не задано, и тогда говорят о задачах со свободным конечным временем.

В зависимости от задачи (основная задача, другие виды критериев оптимальности, условия в конечной точке) принцип максимума может быть дополнен условием

$$\max_{u \in U} H(x(t), u, p(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i\,dt$$

или (в случае, если критерий задается в интегральной форме)

$$\max_{u \in U} H^*(x(t), u, p(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i\,dt.$$

Если имеется автономная система, т. е. функции $f_i(x(t), u(t))$ зависят от t неявно, то из того, что $\partial f_i/\partial t = 0$, сразу вытекает, что

$$\max_{u \in U} H(x(t), u, p(t)) = 0$$

Таблица 3.4

	$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) = \min$, $x(t_1)$ свободный	$F_\alpha[x(t_1)] = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$	$F[x(t_1)] = \min$, $x(t_1)$ свободный	$F_\alpha[x(t_1)] = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$	$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t) = \min$, $x(t_1)$ свободный	$F_\alpha[x(t_1)] = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$
Гамильтониан	$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$				$H^* = p_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$	
Присоединенная система	$\dot{p}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} p_j$				$\dot{p}_i = -\frac{\partial f_0}{\partial x_i} p_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} p_j$	
Условия на конце	$p_i(t_1) = -c_i$	$p_i(t_1) = p_0 c_i - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_0 \leqslant 0}}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\Big\vert_{t=t_1}$	$p_i(t_1) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big\vert_{t=t_1}$	$p_i(t_1) = p_0 \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big\vert_{t=t_1} - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_0 \leqslant 0}}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\Big\vert_{t=t_1}$	$p_i(t_1) = 0$, $p_0 = -1$	$p_i(t_1) = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\Big\vert_{t=t_1}$
Дополнительное условие при свободном конечном времени t_1	$\max_{u \in U} H(x, u, p, t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt$				$\max_{u \in U} H^*(x, u, p, t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i \, dt$	

или

$$\max_{u \in U} H^*(x(t),\ u,\ p(t)) = 0.$$

Если нужно минимизировать $t_1 - t_0$, то говорят о так называемой *временной оптимизационной задаче* (оптимизации по времени). В этом случае критерий оптимальности можно также записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0\,dt \quad \text{с} \quad f_0 \equiv 1.$$

Тогда

$$H^* = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i = p_0 + H.$$

Дополнительное условие принимает вид

$$\max_{u \in U} H(x(t),\ u,\ p(t),\ t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i\,dt - p_0.$$

Пример 31. Дано

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Надо найти такое допустимое управление, чтобы точка $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ переводилась в точку $x_1(t_1) = x_2(t_2) = 0$ за кратчайшее время t_1. Следовательно,

$$H = p_1 x_2 + p_2 u,$$

$$\dot{p}_1 = 0, \qquad \dot{p}_2 = -p_1.$$

Управление

$$u = \begin{cases} 1, \text{ если } p_2 > 0, \\ 0, \text{ если } p_2 < 0, \end{cases}$$

очевидным образом максимизирует H. При интегрировании присоединенной системы получаем

$$p_1 = b_1, \quad p_2 = -b_1 t + b_2$$

с неизвестными постоянными интегрирования b_1, b_2. Очевидно, p_2 не более одного раза претерпевает смену знака, т. е. оно может не более одного раза дать переключение управления с $u = 1$ на $u = 0$ или с $u = 0$ на $u = 1$.

При $u = 1$ интегрированием системы состояний получаем семейство траекторий

$$x_1 = \frac{1}{2}t^2 + s_2 t + s_1, \quad x_2 = t + s_2$$

(s_1, s_2 — постоянные интегрирования). Исключая t, получим семейство парабол

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + s_1 - \frac{1}{2}s_2^2.$$

Соответственно для $u = 0$ имеем семейство прямых

$$x_1 = r_2 t + r_1, \qquad x_2 = r_2$$

(r_1, r_2 — постоянные интегрирования). Очевидно, что никакая прямая этого семейства не может пройти через конечную точку, которую нужно достигнуть, так как тогда должно было бы выполняться условие $r_1 = r_2 = 0$. Для семейства парабол из условия $x_1 = x_2 = 0$ сразу получается, что $s_1 - \frac{1}{2}s_2^2 = 0$, т. е. парабола $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ проходит через конечную точку. Так как x_2 возрастает монотонно по t, то попадание в конечную точку происходит, но на ветви параболы

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, \qquad x_2 \leqslant 0.$$

Так как эта парабола не содержит начальной точки, то сначала необходимо управлять с $u = 0$, пока не будет достигнута нужная парабола, а затем сделать переключение на $u = 1$.

Время переключения t_2 и полное время t_1 могут быть легко вычислены.

Исходящая из начальной точки траектория получается при $u = 0$:

$$x_1 = -t + 1, \qquad x_2 = -1.$$

Для t_2 имеем $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$, или $1 - t_2 = \frac{1}{2}$, или $t_2 = 1/2$. Достигнутое состояние есть

$$x_1 = 1/2, \qquad x_2 = -1.$$

Дальнейшее управление с $u = 1$ дает траекторию

$$x_1 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{8}, \qquad x_2 = t - \frac{3}{2}.$$

Из условия $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ следует, что $t_1 = 3/2$. Для присоединенной функции p_2, таким образом, должны выполняться следующие соотношения:

$$p_2(t) \begin{cases} < 0 \text{ при } t < 1/2, \\ = 0 \text{ при } t = 1/2, \\ > 0 \text{ при } t > 1/2, \end{cases}$$

т. е. $b_1 = 2b_2$, $b_1 < 0$.

Дополнительное условие принципа максимума Понтрягина также выполнено.

Системы с распределенными параметрами. В отличие от задач управления, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, задачи, которые описываются уравнениями в частных производных, называют *системами с распределенными параметрами.*

Для этих задач можно сформулировать принцип максимума Понтрягина аналогично рассмотренному выше.

Так, например, для задачи нахождения минимума функционала

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_i(a,\ b)$$

при $u \in U$ с

$$Q_{ixy} = f_i(x,\ y,\ Q,\ Q'_x,\ Q'_y,\ u) \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n),$$

$$Q_i(x,\ 0) = h_i(x),\ Q_i(0,\ y) = g_i(y), \quad h_i(0) = g_i(0),$$

где $u = (u_1, \ldots, u_r)$ — кусочно непрерывный вектор управления, $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — вектор состояния, *принцип максимума Понтрягина* имеет следующую форму:

для того чтобы процесс $(u(x,\ y),\ Q(x,\ y))$ решал данную задачу, необходимо существование присоединенных функций $N_i(x,\ y)$, являющихся решением *присоединенной системы*

$$N_{ixy} = H'_{Q_i} - (\partial/\partial x) H'_{Q_{ix}} - (\partial/\partial y) H'_{Q_{iy}},$$

$$N_{ix} = -H'_{Q_{iy}}\Big|_{y=b}, \quad N_{iy} = -H'_{Q_{ix}}\Big|_{x=a},$$

$$N_i(a,\ b) = -c_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

так что почти для всех $(x,\ y) \in [0,\ a] \times [0,\ b]$ выполняется условие максимума

$$\max_{u \in U} H(x,\ y,\ N(x,\ y),\ Q(x,\ y),\ Q'_x(x,\ y),\ Q'_y(x,\ y)\,u) =$$
$$= H(x,\ y,\ N(x,\ y),\ Q(x,\ y),\ Q'_x(x,\ y),\ Q'_y(x,\ y),\ u(x,\ y)),$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,\ y) f_i(x,\ y,\ Q,\ Q'_x,\ Q'_y,\ u).$$

Пример 32. Найти минимум функционала

$$J(u)=\int_0^1\int_0^1 (x-1)Q\,dx\,dy$$

при $|u|\leqslant 1$ с

$$Q''_{xy}=-2Q'_x-Q'_y-2Q+u,\quad Q(x,\ 0)=Q(0,\ y)=0.$$

Вводя функцию $Q_0(x,\ y)=\int_0^x\int_0^y (x-1)Q\,dx\,dy$, получим основную задачу нахождения минимума функционала $Q_0(1,\ 1)$ при условии, что $|u|\leqslant 1$ и

$$Q_{0yx}=(x-1)Q,\qquad Q_0(x,\ 0)=Q_0(0,\ y)=0,$$

$$Q''_{xy}=-2Q'_x-Q'_y-2Q+y,\quad Q(x,\ 0)=Q(0,\ y)=0.$$

Максимизация функции Гамильтона

$$H=N_0(x-1)Q+N(-2Q'_x-Q'_y-2Q+u)$$

дает оптимальное управление

$$u(x,\ y)=\operatorname{sign}N(x,\ y).$$

Решение присоединенной системы

$$N''_{0xy}=0,\qquad N''_{xy}=-2N+2N'_x+N'_y+N_0(x-1),$$

$$N'_{0x}=0|_{y=1},\qquad N'_x=N|_{y=1},$$

$$N'_{0y}=0|_{x=1},\qquad N'_y=2N|_{x=1},$$

$$N_0(1,\ 1)=-1,\quad N(1,\ 1)=0$$

имеет вид $N_0(x,\ y)=-1$, $N(x,\ y)=\frac{1}{2}(e^{x-1}-x)(1-e^{2(y-1)})$, так что оптимальное управление выражается функцией

$$u(x,\ y)=\operatorname{sign}\frac{1}{2}(e^{x-1}-x)(1-e^{2(y-1)})=\operatorname{sign}(e^{x-1}-x).$$

Для систем, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных другого вида, существуют аналогичные принципы максимума.

Связь между теорией оптимального управления и вариационным исчислением. Теория оптимальных процессов разрабатывалась для решения задач с замкнутой областью определения. На основе этой теории можно решать также и вариационные задачи.

Пример 33. Пусть задана задача Лагранжа (см. 3.2.1.2) нахождения экстремума функционала

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(x,\ \dot{x};\ t)\,dt,\qquad x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=x^1.$$

При помощи замены $\dot{x}(t)=u(t)$ получают следующую задачу оптимального управления: найти экстремум функционала

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} f(x,\ u,\ t)\,dt,\quad \dot{x}=u,\ x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=x^1.$$

Гамильтониан и присоединенная система имеют вид

$$H^*=pu-f(x,\ u,\ t),$$

$$\dot{p}=f'_x(x,\ u,\ t).$$

Так как управление $u(t)$ принимает значения из открытой области, то

$$H^*_u\equiv p-f'_u(x,\ u,\ t)=0,$$

откуда может быть определен максимум или минимум гамильтониана. Из этого равенства следует, что

$$\dot{p}=\frac{d}{dt}f'_u.$$

Учитывая, что $\dot{x}=u$ и $\dot{p}=f'_x$, получим уравнение Эйлера

$$f'_x-\frac{d}{dt}f'_{\dot{x}}=0,\quad x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=x^1.$$

3.2.2.3. Дискретные системы. Если область определения функции состояния $x(t)$ является множеством конечного числа значений $t_1,\ t_2,\ldots,t_N$ и изменение состояния происходит согласно закону

$$x(t_k)=f(x(t_{k-1}),\ u(t_k),\ t_k)\quad (k=1,\ldots,N),$$

то говорят о *дискретной системе*. При этом $u(t_k)$ является r-мерным вектором управления в момент времени t_k с областью управления U_k.

Вводя обозначения: $u^k=u(t_k)$, $x^k=x(t_k)$, представим систему в виде

$$x^k=f(x^{k-1},\ u^k,\ t_k)=f^k(x^{k-1},\ u^k).$$

Если положить $t_k=k$, то систему можно наглядно описать при помощи N-ступенчатого процесса (рис. 3.51). При этом x^k есть выходное состояние ступени k, x^{k-1} – соответствующее входное

x^0 → (u^1 ↓) Ступень 1 → x^1 … x^{k-1} → (u^k ↓) Ступень k → x^k … x^{N-1} → (u^N ↓) Ступень N → x^N

Рис. 3.51

состояние, а u^k – управление, действующее на этой ступени. Выходное состояние получается в зависимости от входного состояния и соответствующего управления.

Особое значение имеет следующая *оптимизационная задача*. Дана система

$$x^k=f^k(x^{k-1},\ u^k)\qquad (k=1,\ldots,N),$$

где f^k по меньшей мере один раз дифференцируема по всем переменным, $u^k\in U^k$ (замкнутое), начальное значение x^0 задано; найти такое допустимое управление u^k, чтобы сумма $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^N$ была минимальна (x_i^N – координаты выходного состояния x^N). Если нужно минимизировать $F[x^N]$, то для каждой ступени вводят величину состояния x^k_{n+1}:

$$x^k_{n+1}=F(x^k)=F[f^k(x^{k-1},\ u^k)].$$

Цель оптимизации – минимизировать x^N_{n+1}. Для таких систем могут быть сформулированы некоторые типичные постановки задач, подобно тому как это делалось для непрерывных систем.

Гамильтониан ступени k ($k=1,\ldots,N$):

$$H^k=\sum_{i=1}^{n} p_i^k f_i^k(x^{k-1},\ u^k).$$

Присоединенный вектор p^k и *присоединенная система* ступени k:

$$p_i^{k-1}=\frac{\partial H^k}{\partial x_i^{k-1}}=\sum_{j=1}^{n} p_j^k\frac{\partial f_j^k}{\partial x_i^{k-1}},\qquad p_i^N=-c_i$$

$$(i=1,\ldots,n).$$

Принцип максимума. Если u^k оптимально в смысле поставленной задачи, то необходимо существование N присоединенных, отличных от нуля векторов p^k, представляющих собой решения присоединенной системы и таких, что $\dfrac{\partial H^k(p^k, x^{k-1}, u^k)}{\partial x_i^k} = 0$ в случае, если u^k лежит внутри U^k, и $H^k(p^k, x^{k-1}, u^k)$ максимально в случае, если u^k лежит на границе U^k.

В отличие от так называемого сильного принципа максимума для непрерывных процессов, эту форму называют *слабым принципом максимума.*

3.2.2.4. Численные методы. Принцип максимума (необходимое условие оптимальности) дает полную систему для определения неизвестных величин. Однако в нем не содержится никаких алгоритмов для вычисления этих величин.

Как и при рассмотрении численных методов вариационного исчисления, различают так называемые *прямые* и *косвенные численные методы.*

Принцип максимума Понтрягина приводит к так называемой *задаче с граничными значениями в двух точках* для определения функции состояния и присоединенной функции, причем дополнительно должна быть решена задача максимизации.

Пример 34. Найти минимум функционала $J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(t)dt$ при условии, что $|u| \leqslant 1$ и $\dot x = x + u$, $x(0) = 0$. Максимизация гамильтониана

$$H^* = p(x+u) - \frac{1}{2}x^2$$

достигается за счет оптимального управления

$$u(t) = \operatorname{sign} p(t),$$

так что для определения $x(t)$ и $p(t)$ получают задачу с граничными значениями в двух точках:

$$\dot x = x + \operatorname{sign} p, \qquad x(0) = 0,$$
$$\dot p = -p + x, \qquad p(1) = 0.$$

Численные методы для приближенного решения этой задачи и для требуемой приближенной максимизации гамильтониана называют *косвенными методами.* Эти методы определяют величины, которые удовлетворяют необходимым условиям оптимальности (принцип максимума).

Так же как в вариационном исчислении, для приближенного решения задач оптимального управления зачастую применяются так называемые *прямые методы.* Они создают монотонно убывающую последовательность значений функционала, или *минимизирующую последовательность* (определение см. в 3.2.1.5).

Значительную роль среди прямых методов играют так называемые *градиентные методы. Градиент* $J'(u)$, определенный в 3.2.1.5, для функционала

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)dt$$

с $\dot x = f(x, u, t)$, $\quad x(t_0) = x^0$, имеет вид

$$J'(u) = -H_u^{*\prime}$$

с $\dot p = -H'_x$, $\ p(t_1) = 0$ и $H^* = pf - f_0$.

Таким образом, для приближенного решения задач оптимального управления теперь можно применять известные градиентные методы нелинейной оптимизации. Рассмотрим кратко три из них.

а) Метод градиента для задач без ограничений. На управление u не накладывается никаких ограничений. Исходя из начального управления $u^1(t)$, дальнейшие управления вычисляют согласно правилу

$$u^{i+1} = u^i - \beta_i J'(u^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

б) Метод градиента для задач с ограничениями:

б1) Условный метод градиента. Пусть $u^i(t)$ – начальное приближение. Дальнейшие управления вычисляются согласно правилу

$$u^{i+1} = (1 - \beta_i)u^i + \beta_i v^i;$$

v^i получаются при этом как решения линейной «вспомогательной задачи» нахождения минимума функционала $\int\limits_{t_0}^{t_1} y'(u^i)v\,dt$ при $v \in U$.

б2) Проекционный метод градиента. Пусть $u^1(t)$ – начальное приближение. Дальнейшие управления вычисляются согласно правилу

$$u^{i+1} = p_U(u^i - \beta_i J'(u^i));$$

p_U означает при этом оператор проектирования на множество U, т. е. нужно решить «вспомогательную задачу»

$$\| w - p_U(w) \| = \min_{u \in U} \| w - u \|$$

при $\| w - u \| = \max\limits_{t \in [t_0, t_1]} | w(t) - u(t) |$.

Трудности всех трех методов заключаются в выборе *величины шага* β_i. Шаг должен быть определен так, чтобы для соответствующих значений функционала выполнялось неравенство

$$J(u^{i+1}) \leqslant J(u^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

В методах б1) и б2) проблема выбора шага дополняется еще решением вспомогательной задачи.

Пример 35. Найти минимум функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(t)dt$$

с $\dot x = x + u$, $x(0) = 0$.

Для градиента получаем следующую формулу:

$$J'(u) = -p(t) \text{ с } \dot p = -p + x,\ p(1) = 0.$$

Если никаких ограничений на управление u нет, то из метода а) следует, что

$$u^{i+1} = u^i + \beta_i p^i, \quad \dot p^i = -p^i + x^i,\ p^i(1) = 0,$$
$$\dot x^i = x^i + u^i, \qquad x^i(0) = 0.$$

При часто встречающемся ограничении $|u(t)| \leqslant 1$ при помощи методов б1) и б2) получают

$$u^{i+1} = (1 - \beta_i)u^i + \beta_i \operatorname{sign} p^i$$

или

$$u^{i+1} = \begin{cases} u^i + \beta_i p^i, & \text{если } |u^i + \beta_i p^i| \leqslant 1, \\ \operatorname{sign}(u^i + \beta_i p^i), & \text{если } |u^i + \beta_i p^i| > 1, \end{cases}$$

причем $p^i(t)$ и $x^i(t)$ вычисляются так же, как и на основе метода а).

3.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальное уравнение – уравнение, содержащее неизвестную функцию одного или нескольких переменных, независимые переменные и производные неизвестной функции по независимым переменным.

Примеры дифференциальных уравнений:

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+4y=1,\ y(x) \text{ – неизвестная функция,} \tag{3.25}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-xy^4\frac{dy}{dx}+\sin y=0,\ y(x) \text{ – неизвестная функция,} \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},\ z(x,y) \text{ – неизвестная функция.} \tag{3.27}$$

Решить дифференциальное уравнение – это значит найти все неизвестные функции, обращающие уравнение в тождество. В общем случае неизвестные функции определяются дифференциальным уравнением неоднозначно (если решение вообще существует), поэтому на искомые функции часто накладывают дополнительные условия.

3.3.1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.3.1.1. Общие понятия. Теоремы существования и единственности. *Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка r* называется уравнение (относительно неизвестной функции y одного независимого переменного x) вида

$$F[x,\ y(x),\ y'(x),\dots,y^{(r)}(x)]=0, \tag{3.28}$$

где r – порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. (Например, уравнение (3.25) имеет порядок 2, а (3.26) – порядок 1.) Если уравнение линейно по $y, y', \dots, y^{(r)}$, то оно называется *линейным* ((3.25) линейно, (3.26) – нет). Под дифференциальным уравнением в *явной форме* понимают дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(r)}(x)=f(x,\ y(x),\ y'(x),\dots,y^{(r-1)}(x)).$$

Уравнение вида (3.28) называют дифференциальным уравнением в *неявной форме.* Под *интегрированием* уравнения (3.28) понимают нахождение функции $y(x)$, которая удовлетворяет этому уравнению. При этом функция $y(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения. *Общее решение* обыкновенного дифференциального уравнения порядка r имеет вид

$$y=y(x;\ C_1,\dots,C_r),$$

где $C_1,\dots,C_r$ – произвольные постоянные. При любом наборе конкретных постоянных получаются *частные решения.*

Задача Коши (*задача с начальными условиями*) есть задача о нахождении частного решения, которое удовлетворяет r начальным условиям

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(r-1)}(x_0)=y_0^{(r-1)}.$$

Если известно общее решение, то для решения задачи Коши постоянные C_i находят из уравнений

$$y(x_0;\ C_1,\dots,C_r)=y_0,$$

$$\left[\frac{d}{dx}y(x;\ C_1,\dots,C_r)\right]_{x=x_0}=y'_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\left[\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}y(x;\ C_1,\dots,C_r)\right]_{x=x_0}=y_0^{(r-1)}.$$

Краевая задача есть задача отыскания частного решения, которое удовлетворяет r краевым условиям на концах отрезка $a\leqslant x\leqslant b$, т. е. при $x=a$ и $x=b$. Дифференциальное уравнение может обладать также особыми решениями, т. е. решениями, которые нельзя получить из общего решения путем подстановки конкретных значений для постоянных C_i (ср. 3.3.1.2.2).

Графическое изображение частного решения называют *интегральной кривой.* Общее решение дифференциального уравнения r-го порядка определяет r-параметрическое семейство интегральных кривых. Обратно, каждое r-параметрическое семейство

$$y=y(x;\ C_1,\dots,C_r)$$

определяет (при некоторых дополнительных условиях) дифференциальное уравнение r-го порядка, которое получается путем исключения постоянных $C_1,\dots,C_r$ из уравнений

$$y^{(i)}(x)=y^{(i)}(x;\ C_1,\dots,C_r)\qquad (i=0,\ 1,\dots,r)\ ^{*)}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение описывает семейство кривых.

Пример 1. Семейство всех окружностей на плоскости $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=C_3^2$ содержит три параметра. Трехкратное дифференцирование приводит к уравнениям $(x-C_1)+(y-C_2)y'=0$, $1+(y-C_2)y''+(y')^2=0$, $(y-C_2)y'''+3y'(y'')^2=0$. Исключая C_2 из двух последних уравнений, получаем

$$y'''(1+(y')^2)-3y'(y'')^2=0.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $y_1(x),\dots,y_n(x)$ имеет вид

$$F_i[x,\ y_1,\ y_2,\dots,y_n,\ y'_1,\ y'_2,\dots$$
$$\dots,y'_n,\ y_1^{(r_i)},\ y_2^{(r_i)},\dots,y_n^{(r_i)}]=0\quad (i=1,\ 2,\dots,m).$$

Решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется любая упорядоченная совокупность функций $y_1(x),\dots,y_n(x)$, обращающих каждое уравнение в тождество.

Порядком системы называется число $r=\sum_{i=1}^{n} r_i$, где r_i – порядок i-го уравнения. *Общее решение* системы $y_i=y_i(x)$ $(i=1,\dots,m)$ зависит от r произвольных постоянных.

Каждое уравнение n-го порядка в явной форме

$$y^{(n)}(x)=f(x,\ y'(x),\dots,y^{(n-1)}(x))$$

---

*) $y^{(0)}(x)=y(x)$.

путем введения новых неизвестных функций $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$ можно преобразовать в систему n дифференциальных уравнений

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3, \ldots, y_{n-1}' = y_n, \qquad y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Для систем вида

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.29)$$

справедлива следующая *теорема существования и единственности* для задачи Коши.

Теорема Коши. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны и ограничены ($|f_i| \leqslant A$) в замкнутой области

$$G = \{(x, y_1, \ldots, y_n) \mid |x - x^0| \leqslant a,\ |y_i - y_i^0| \leqslant b,\ i = 1, 2, \ldots, n\};$$

2) в замкнутой области G по переменным $y_1, \ldots, y_n$ выполняется *условие Липшица* с константой Липшица L, т. е. для всех $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ и $(x, y_1, \ldots, y_n)$ из G выполняется неравенство

$$|f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |\bar{y}_k - y_k| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда система (3.29) с начальными условиями $y_i(x^0) = y_i^0$ имеет, и притом единственное, решение для $|x - x^0| \leqslant \alpha$, где $\alpha = \min(a, b/A)$.

Замечание. Условие Липшица выполняется всегда, когда f_i обладают ограниченными в области G частными производными по y_k, т. е. когда

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_k} f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \right| \leqslant M \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Если в теореме Коши опустить предположение о том, что выполнено условие Липшица, то в результате получим лишь теорему существования решений при условии $y_i(x^0) = y_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (*теорема Пеано*).

Примеры дифференциальных уравнений, которые не удовлетворяют условиям теоремы Коши, рассматриваются в 3.3.1.2.2.

Зависимость решения задачи Коши от начальных данных. Если функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в некоторой окрестности $U(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ точки $(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, то они удовлетворяют этим условиям и в некоторой окрестности $U(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ каждой точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, достаточно близкой к точке $(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$. Для каждой точки x, принадлежащей достаточно малой окрестности точки ξ, всегда существует решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (3.29), удовлетворяющее условиям $x = \xi$, $y_1(\xi) = \eta_1, \ldots, y_n(\xi) = \eta_n$. В то же время эти функции, рассматриваемые как функции от начальных значений $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$, непрерывны в некоторой окрестности точки $(x^0, y^0, \ldots, y_n^0)$.

Если функции f_i, кроме переменных, зависят еще и от параметров $p_1, \ldots, p_m$ и если они непрерывны по всем аргументам, то функции $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие задаче Коши, суть непрерывные функции параметров $p_1, \ldots, p_m$.

Общее решение системы (3.29) содержит n произвольных постоянных: $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Функция $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ называется *первым интегралом системы* (3.29), если u постоянна вдоль кривых решения системы (постоянная зависит от выбранного частного решения); n первых интегралов получают путем решения уравнений $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_k)$ относительно C_k. Каждый первый интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial u}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial u}{\partial y_n} = 0,$$

и, обратно, каждое решение u этого дифференциального уравнения дает первый интеграл системы (3.29). Тогда n первых интегралов системы (3.29), для которых соответствующие функции u_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы, образуют *общий интеграл* системы (3.29).

3.3.1.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

3.3.1.2.1. Уравнения 1-го порядка в явной форме. Частные виды уравнений. Дифференциальное уравнение 1-го порядка в явной форме имеет вид

$$y' = f(x, y).$$

Если через точку $M(x, y)$ проходит график решения $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, то наклон α касательной к графику в точке $M(x, y)$ определяется непосредственно из уравнения (так как $\operatorname{tg}\alpha = y'(x) = f(x, y)$). Таким образом, дифференциальное уравнение в каждой точке рассматриваемой области задает направление касательной к кривой решения. Совокупность этих направлений образует *поле направлений* (рис. 3.52). Точка

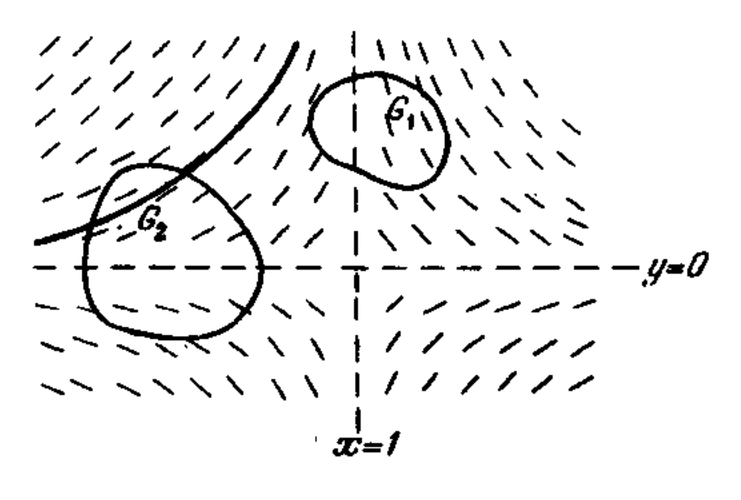


Рис. 3.52

вместе с заданным в ней направлением называется *линейным элементом* поля направлений. Точку $M(x, y)$ называют *носителем* линейного элемента. Итак, интегрирование дифференциального уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$ геометрически сводится к соединению элементов поля направлений в интегральные кривые, касательные к которым в каждой точке имеют направление, совпадающее с полем направлений в данной точке.

Часто приходится иметь дело с полем направлений, в котором встречаются вертикальные направления, соответствующие полюсу функции $f(x, y)$. В этом случае y считают независимым переменным и рассматривают уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

В области, в которой выполняются условия теоремы Коши для уравнения в явной форме, через каждую точку проходит единственная интегральная кривая.

Пример 1. В области G_1 (см. рис. 3.52) выполнены условия теоремы Коши для уравнения $\frac{dx}{dy}=\frac{1-x}{y}$, но не для $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1-x}$; в области G_2 — наоборот.

Совокупность всех интегральных кривых зависит от одного параметра. Уравнение соответствующего однопараметрического семейства кривых — *общий интеграл* дифференциального уравнения 1-го порядка — содержит одну произвольную постоянную. Чтобы из общего интеграла $I(x, y, C)=0$ получить частный интеграл $y=y(x)$ (или $x=x(y)$), удовлетворяющий условию $y_0=y(x_0)$ (или $x_0=x(y_0)$), нужно найти постоянную C из уравнения $I(x_0, y_0, C)=0$.

Частные виды обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y'=\frac{f(x)}{g(y)}.$$

Общий интеграл имеет вид

$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C.$$

Пример 2. $y'=\frac{1}{x}\,\frac{-4y^2+6y-7}{4y-3}$. Путем вычисления интегралов $\int\frac{4y-3}{4y^2-6y+7}dy$, $\int\frac{1}{x}dx$ получаем общий интеграл $x^2(4y^2-6y+7)=C$.

Пример 3. $y'=\frac{2}{y}-2$. Из $\int\frac{y\,dy}{-2y+2}=\int dx$ получаем общий интеграл $y+\ln|y-1|=-2x+C$.

Однородное уравнение:

$$y'=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q — однородные функции степени r, т. е.

$$P(kx, ky)=k^rP(x, y),\quad Q(kx, ky)=k^rQ(x, y).$$

Путем введения новой неизвестной функции $u=y/x$ такое уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4. $y'=\frac{3y-7x}{4y-3x}$. Здесь $P=3y-7x$ и $Q=4y-3x$ — однородные функции степени 1. Полагая $y=ux$, приведем уравнение к виду $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\,\frac{-4u^2+6u-7}{4u-3}$. Оно имеет общий интеграл $x^2(4u^2-6u+7)=C$ (см. пример 2). Общий интеграл исходного уравнения имеет вид $4y^2-6yx+7x^2=C$.

Уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right).$$

Если $aB-bA\neq 0$, то заменой $t=x-x_0$, $u=y-y_0$, где x_0 и y_0 — единственное решение системы $ax+by+c=0$, $Ax+By+C=0$, такое уравнение сводится к однородному. Если $aB-bA=0$, то полагают $u=ax+by$, $t=x$; в этом случае уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 5. $y'=\frac{-7x+3y-2}{-3x+4y-5}$. Здесь $aB-bA=-19\neq 0$ и замена $u=y-\frac{29}{19}$, $t=x-\frac{7}{19}$ приводит к уравнению $u'=\frac{3u-7t}{4u-3t}$. Общий интеграл этого уравнения $4u^2-6ut+7t^2=C_1$ был найден в примере 4. Таким образом, $4y^2-10y-6xy+7x^2+4x=C$ есть общий интеграл исходного уравнения.

Пример 6. $y'=\frac{-x+y-2}{x-y}$. Здесь $aB-bA=0$. Тогда замена $u=-x+y$ приводит к уравнению $\frac{du}{dx}=\frac{2}{u}-2$ с общим интегралом $u+\ln|-u+1|=-2x+C$ (см. пример 3).

Общее решение исходного уравнения есть $y+\ln|x-y+1|=-x+C$.

Уравнения в полных дифференциалах:

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0, \tag{3.30}$$

где $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$.

Если в некоторой односвязной области функции P и Q непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка, то условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовала функция $F(x, y)$ такая, что

$$dF(x, y)=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y)\ \text{ и }\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y).$$

В этом случае $F(x, y)=C$ есть общий интеграл уравнения в полных дифференциалах. Функцию $F(x, y)$ можно найти по формуле (ср. 3.1.8.5)

$$F(x, y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi, y)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x_0, \eta)\,d\eta$$

(x_0 и y_0 произвольны).

Пример 7. $(x-y)dx+(y^{-2}-x)dy=0$. Здесь $\partial P/\partial y=-1$ и $\partial Q/\partial x=-1$ в любой односвязной области, не содержащей точек оси абсцисс. Тогда

$$F(x, y)=\int_{x_0}^{x}(\xi-y)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}(\eta^{-2}-x_0)\,d\eta=$$

$$=\frac{x^2}{2}-yx-\frac{1}{y}+\left(-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{y_0}+x_0y_0\right).$$

Получаем общий интеграл $x^2y-2y^2x-2-Cy=0$.

Если левая часть уравнения (3.30) не является полным дифференциалом $\left(\text{т. е. } \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, то иногда можно найти такую функцию $\mu(x, y)$ (*интегрирующий множитель*), что дифференциальное уравнение $\mu P\,dx+\mu Q\,dy=0$ будет уравнением в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Любое частное решение этого уравнения является интегрирующим множителем.

Часто уравнение в частных производных для нахождения интегрирующего множителя μ можно упростить, если считать μ функцией только x (или y, или xy, или x/y). При этом руководствуются следующими правилами:

а) Если $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$, то $\mu(x, y)=\mu(x)$.

б) Если $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y)$, то $\mu(x, y)=\mu(y)$.

в) Если $\frac{1}{Qy-Px}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(xy)$, то $\mu(x, y)=\mu(xy)$.

г) Если $\frac{1}{Qy+Px}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$, то $\mu(x, y)=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример 8. $(xy^2-y^3)\,dx+(1-xy^2)\,dy=0$. Здесь $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy-2y^2\neq 0$, $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2}{y}$.

Считая, что $\mu=\mu(y)$, получим $\mu\cdot\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{d\mu}{dy}$ или $\frac{2\mu}{y}=-\frac{d\mu}{dy}$. Частное решение: $\mu=y^{-2}$.

После умножения на μ получаем уравнение $(x-y)\,dx+(y^{-2}-x)\,dy=0$, которое является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл имеет вид $x^2y-2y^2x-2-Cy=0$ (см. пример 7).

Линейное дифференциальное уравнение:

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{3.31}$$

Это неоднородное относительно y и y' уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$; общее решение получают по формуле

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int Q(x)\mu(x)\,dx+C\right).$$

Если заменить в ней неопределенный интеграл на определенный интеграл с пределами интегрирования x_0 и x, то получим, что $y(x_0)=C$.

Линейному неоднородному уравнению (3.31) ставится в соответствие линейное однородное уравнение $y'+P(x)y=0$ (однородное по отношению к y и y' — не путать с ранее рассмотренным однородным по x и y).

Общее решение линейного дифференциального уравнения наряду с изложенным выше методом можно найти и иначе: $y=u+\tilde{y}$, где u — общее решение линейного однородного уравнения и $\tilde{y}$ — какое-либо частное решение линейного неоднородного уравнения.

Методом *вариации постоянной*, используя общее решение линейного однородного уравнения, можно найти частное решение линейного неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид $u=C_1e^{-\int P(x)dx}$ (см. дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными). Предположим теперь, что C_1 зависит от x, и выберем $C_1=C_1(x)$ так, чтобы функция $\tilde{y}=C_1(x)e^{-\int P(x)dx}$ удовлетворяла уравнению (3.31); получим частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}=C_1(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Пример 9. $y'+\frac{x-2}{x(x-1)}y=-\frac{1}{x^2(x-1)}$.

а) $\mu(x)=\frac{x^2}{x-1}$, и общее решение имеет вид

$$y=\frac{x-1}{x^2}\left(-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+C\right)=\frac{x-1}{x^2}\left(\frac{1}{x-1}+C\right).$$

б) Найдем частное решение, проходящее через точку $x_0=2$, $y_0=1/4$. Имеем

$$\mu(x)=\exp\left(\int_2^x\frac{\xi-2}{\xi(\xi-1)}d\xi\right)=\frac{x^2}{4(x-1)},$$

и соответствующее частное решение равно

$$y(x)=\frac{4(x-1)}{x^2}\left(-\frac{1}{4}\int_2^x\frac{dt}{(t-1)^2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

Пример 10. $RI(t)+L\frac{dI(t)}{dt}=E$ есть дифференциальное уравнение для силы тока $I(t)$ в цепи, состоящей из источника тока с напряжением $E=E_0$ (постоянное напряжение) или $E=E_0\sin\omega t$ (переменное напряжение), сопротивления R и индуктивности L. Обозначая $R/L=a$ и $E_0/L=b$ (a, b — постоянные), получим общее решение:

$$I(t)=Ce^{-at}+b/a \text{ при } E=E_0,$$

$$I(t)=e^{-at}\left(C+b\int\sin\omega t\,e^{at}\,dt\right)=Ce^{-at}+\frac{b\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\left(\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a}\right) \text{ при } E=E_0\sin\omega t.$$

Общее решение Ce^{-at} линейного однородного уравнения соответствует затухающему процессу, а второе слагаемое в формуле для $I(t)$ есть частное решение исходного неоднородного уравнения, оно дает постоянную составляющую силы тока. Для случая $E=E_0\sin\omega t$ сила тока сдвинута по фазе относительно напряжения на угол α.

Уравнение Бернулли

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 1)$$

сводится к линейному дифференциальному уравнению введением нового переменного $z=y^{1-n}$:

$$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

Пример 11. $x^2(x-1)y'-y^2-x(x-2)y=0$, $n=2$. Вводя новое переменное $z=y^{-1}$, получим линейное уравнение $z'+\frac{(x-2)}{x(x-1)}z=-\frac{1}{x^2(x-1)}$. Оно имеет общее решение $z=\frac{x-1}{x^2}\left(\frac{1}{x-1}+C\right)$ (см. пример 9); общее решение исходного уравнения: $y=\frac{x^2}{1+C(x-1)}$.

Уравнение Риккати:

$$y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x).$$

В общем случае это дифференциальное уравнение неразрешимо в квадратурах. Если же известно одно частное решение y_1, то введением нового переменного z по формуле $y=y_1+1/z$ уравнение Риккати может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению

$$z'+(2Py_1+Q)z=-P.$$

Если y_2 — другое частное решение, то $z_1 = 1/(y_2 - y_1)$ есть частное решение линейного уравнения для переменного z; это позволяет упростить интегрирование уравнения. Если же известны три частных решения y_1, y_2, y_3, то общий интеграл уравнения Риккати имеет вид

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C.$$

Заменой $y = -z'/P(x)z$ уравнение Риккати можно привести к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка (ср. 3.3.1.3.4)

$$Pz'' - (P' + PQ)z' + RP^2 z = 0.$$

Заменой $y = \dfrac{z}{P(x)} + b(x)$, где $b = -\dfrac{P' + PQ}{2P^2}$, уравнение Риккати можно привести к канонической форме $z' = z^2 + \bar{R}(x)$, где $\bar{R}(x) = P(-b' + Pb^2 + Qb + R)$.

Частный случай уравнения Риккати:

$$y' + ay^2 = bx^m, \qquad a \neq 0.$$

Оно разрешимо для $m = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными) и для $m = \dfrac{4k}{1 - 2k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$):

если $k > 0$, то заменой $y = \dfrac{1}{x^2 \bar{y}} + \dfrac{1}{ax}$, $x = \bar{x}^{1/(m+3)}$ получаем, что $\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \bar{a}\bar{y}^2 = \bar{b}\bar{x}^{\bar{m}}$, где

$$\bar{a} = \frac{b}{m+3}, \quad \bar{b} = \frac{a}{m+3},$$

$$\bar{m} = -\frac{m+1}{m+3} = \frac{4(k-1)}{1 - 2(k-1)};$$

если $k < 0$, то заменой $y = \dfrac{b}{\bar{x}(b\bar{x}\bar{y} + m + 1)}$, $x = \bar{x}^{-1/(m+1)}$ получаем, что $\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \bar{a}\bar{y}^2 = \bar{b}\bar{x}^{\bar{m}}$, где

$$\bar{a} = -\frac{b}{m+1}, \quad \bar{b} = -\frac{a}{m+1},$$

$$\bar{m} = -\frac{3m+4}{m+1} = \frac{4(k+1)}{1 - 2(k+1)}.$$

Указанные замены следует проводить, пока получаемое $\bar{m}$ не оказывается равным нулю.

Пример 12. $y' = y^2 - (2x+1)y + (x^2 + x + 1)$. Здесь $y_1(x) = x$ есть частное решение. Замена $y = x + 1/z$ приводит к уравнению $z' - z = -1$ с общим решением $z = Ce^x + 1$. Уравнение Риккати имеет общее решение $y = x + \dfrac{1}{Ce^x + 1}$. Замена $y = z + b$, где $b = x + 1/2$, приводит данное уравнение к канонической форме $z' = z^2 - 1/4$. Замена $y = -z'/z$ приводит данное уравнение к уравнению 2-го порядка $z'' + (2x+1)z' + (x^2 + x + 1)z = 0$.

Пример 13. $y' - 3y^2 = x^{-8/5}$, $m = -8/5$, $k = -2$, $a = -3$, $b = 1$. Замена $y = \dfrac{1}{\bar{x}(\bar{x}\bar{y} - 3/5)}$, $x = \bar{x}^{5/3}$ приводит к уравнению $\bar{y}' + \dfrac{5}{3}\bar{y}^2 = -5\bar{x}^{-4/3}$, где $\bar{m} = -\dfrac{4}{3}$, $\bar{k} = -1$, $\bar{a} = \dfrac{5}{3}$, $\bar{b} = -5$, а новая замена $\bar{y} = \dfrac{1}{\bar{\bar{x}}(-5\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} - 1/3)}$, $\bar{x} = \bar{\bar{x}}^3$ — к уравнению $\bar{\bar{y}}' - 15\bar{\bar{y}}^2 = 5$ с разделяющимися переменными.

3.3.1.2.2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка, не разрешенное относительно y'.

1) *Уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно y'.* Пусть в данной точке (x_0, y_0) уравнение $F(x_0, y_0, p) = 0$, где $p = y'$, имеет действительные корни $p_1, \ldots, p_n$, функция $F(x, y, p)$ и ее первые частные производные непрерывны по всем переменным в каждой точке $x = x_0$, $y = y_0$, $p = p_i$ и $\dfrac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. Тогда уравнение $F(x, y, p) = 0$ распадается на n дифференциальных уравнений вида $y' = f_i(x, y)$, где $f_i(x_0, y_0) = p_i$. Через точку (x_0, y_0) проходят точно n интегральных кривых.

Пример 14. Найти интегральную кривую уравнения $y'^2 = |4y|$, проходящую через точку $(0, 1)$. Здесь $F(x, y, p) = p^2 - |4y|$. Функции F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial p}$ непрерывны при $x = 0$, $y = 1$, $p_1 = 2$ и $p_2 = -2$, и $\partial F(0, 1, 2)/\partial p = 4 \neq 0$, $\dfrac{\partial F(0, 1, -2)}{\partial p} = -4 \neq 0$. Таким образом, уравнение $p^2 - |4y| = 0$ распадается на два уравнения: $y' = 2\sqrt{|y|}$ и $y' = -2\sqrt{|y|}$. Через точку $(0, 1)$ проходят обе интегральные кривые: $y = (x+1)^2$ и $v = (x-1)^2$.

2) *Уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно y.* Известна тройка чисел (x_0, y_0, p_0), для которой $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ и уравнение $F(x, y, p) = 0$ разрешимо в окрестности (x_0, y_0, p_0) относительно y: $y = G(x, p)$, т. е. $y_0 = G(x_0, p_0)$ и $F(x, G(x, p), p) \equiv 0$.

Если рассматривать только такие решения $y = y(x)$, которые в окрестности точки x_0 имеют отличную от нуля непрерывную производную, и если еще предположить, что $G(x, p)$ имеет в окрестности точки (x_0, p_0) непрерывные частные производные по x и p и $G'_p(x_0, p_0) = \dfrac{\partial G(x_0, p_0)}{\partial p} \neq 0$, то получим уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - G'_x(x, p)}{G'_p(x, p)},$$

разрешенное относительно производной. Решение этого уравнения имеет вид $p = p(x)$ или $x = x(p)$; после подстановки в уравнение $y = G(x, p)$ получаем решение исходного уравнения в виде $y = y(x)$ или $y = y(p)$, $x = x(p)$ как параметрическое представление.

Пример 15. $e^{y'} + 2xy' - y = 0$. Выберем точку (x_0, p_0) произвольно; возьмем, например, $(0, 1)$; тогда $y_0 = e^{p_0} + 2x_0 p_0$ и $(x_0, y_0, p_0) = (0, e, 1)$. Уравнение принимает вид $y = G(x, p)$, где $G(x, p) = e^p + 2xp$ и $G'_p(0, 1) = e \neq 0$. Таким образом, $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{p}{e^p + 2x}$, или $(e^p + 2x)dp + p\,dx = 0$. Решение этого уравнения (интегрирующий множитель $\mu = p$) при условии $p(0) = 1$ есть $x = \dfrac{1-p}{p^2}e^p$, а решение исходного уравнения в параметрической форме имеет вид $y = (2-p)\dfrac{1}{p}e^p$, $x = (1-p)\dfrac{1}{p^2}e^p$. Эти уравнения суть параметрическое представление интегральной кривой уравнения $e^{y'} + 2xy' - y = 0$ в окрестности $p = 1$ (при условии $x_0 = 0$, $y_0 = e$, $y'(0) = 1$).

3) *Уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно x.* Пусть известна точка (x_0, y_0, p_0), в которой $F(x_0, y_0, p_0) = 0$, и пусть в окрестности

этой точки уравнение $F(x, y, p) = 0$ можно разрешить относительно x: $x = H(y, p)$. Ограничимся решениями вида $y = y(x)$, где $p = y'(x)$ разрешимо в окрестности (x_0, p_0) относительно x; $x = x(p)$. Дифференцируя соотношение $x = H(y, p)$ по p, получим уравнение

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{pH'_p}{pH'_y - 1} \qquad \left(\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p}\frac{dy}{dp}\right)$$

с решением $y = y(p)$ или $p = p(y)$. Решение исходной задачи получается в виде $x = x(p)$ и $y = y(p)$ (p — параметр) или $x = x(y)$.

Пример 16. $x = yy' + (y')^2$. При этом $F(x, y, p) = x - yp - p^2$ и $H(y, p) = yp + p^2$. Точка (x_0, y_0) может быть задана произвольно с единственным условием: $\frac{1}{4}(y_0)^2 + x_0 \geqslant 0$; тогда существует по крайней мере одно значение p_0 такое, что $x_0 - y_0p_0 - p_0^2 = 0$. Рассмотрим, например, точку $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $p_0 = 0$. Вспомогательное линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dp} + y\frac{p}{p^2 - 1} = -\frac{2p^2}{p^2 - 1}$ имеет решение $y(p) = -p + \frac{\arcsin p}{\sqrt{1 - p^2}}$ при $y(0) = 0$. Интегральная кривая уравнения $x = yy' + (y')^2$, проходящая через точку $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ($y'(0) = 0$), имеет (в окрестности $p = 0$) параметрическую форму

$$y = -p + \frac{\arcsin p}{\sqrt{1 - p^2}}, \quad x = p\frac{\arcsin p}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

4) *Уравнение Лагранжа*

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0$$

всегда интегрируется в квадратурах указанным выше способом. Если $a(p) + b(p)p = 0$, то имеем *уравнение Клеро*

$$y = y'x + f(y').$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = Cx + f(C)$.

Линейный элемент (x_0, y_0, p_0) уравнения $F(x, y, p) = 0$, т. е. $F(x_0, y_0, p_0) = 0$, называется *регулярным*, если в окрестности точки (x_0, y_0) существует единственная непрерывная функция $p = f(x, y)$ такая, что $p_0 = f(x_0, y_0)$ и $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$. В этом случае дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ в окрестности точки x_0 имеет единственную интегральную кривую, проходящую через (x_0, y_0) и такую, что $y'(x_0) = p_0$. В противном случае линейный элемент называется *особым*. Совокупность точек (x, y) — носителей особых линейных элементов — называется *дискриминантной кривой* уравнения. Интегральная кривая, состоящая из особых линейных элементов, называется *особой*, а ее уравнение называется *особым интегралом*. Если функция $F(x, y, p)$ в окрестности линейного элемента (x_0, y_0, p_0) непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y и F'_p, то линейный элемент регулярен только тогда, когда $F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$. Если же $F'_p(x_0, y_0, p_0) = 0$, то линейный элемент будет особым.

Как правило, особый интеграл не получается из общего ни при каком значении произвольной постоянной. Для нахождения особого интеграла дифференциального уравнения $F(x, y, p) = 0$, где $p = y'$, к этому уравнению присоединяют уравнение $F'_p(x, y, p) = 0$ и исключают p. Если полученное соотношение является интегралом исходного уравнения, то это особый интеграл. Если известно уравнение семейства интегральных кривых, т. е. общий интеграл данного уравнения, то для нахождения огибающих кривых этого семейства, дающих особые решения, могут быть применены методы дифференциальной геометрии.

Пример 17. $p^2((x - y)^2 - 1) - 2p + ((x - y)^2 - 1) = 0$. Общий интеграл находим, разрешая уравнение относительно y и применяя описанный выше метод:

$$y = x - \sqrt{\frac{(1 + p)^2}{1 + p^2}}; \quad x = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + C, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} + C.$$

Таким образом, $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$.

Дополнительное уравнение для нахождения особых решений есть $p((x - y)^2 - 1) - 1 = 0$. Исключение p приводит к уравнению $(x - y)^2((x - y)^2 - 2) = 0$, т. е. $y = x$, $y = x + \sqrt{2}$, $y = x - \sqrt{2}$. В данном случае $y = x$ не является решением исходного уравнения и, следовательно, не дает особого решения. Два других выражения, $y = x + \sqrt{2}$ и $y = x - \sqrt{2}$, являются особыми решениями. Эти особые решения можно получить также из общего

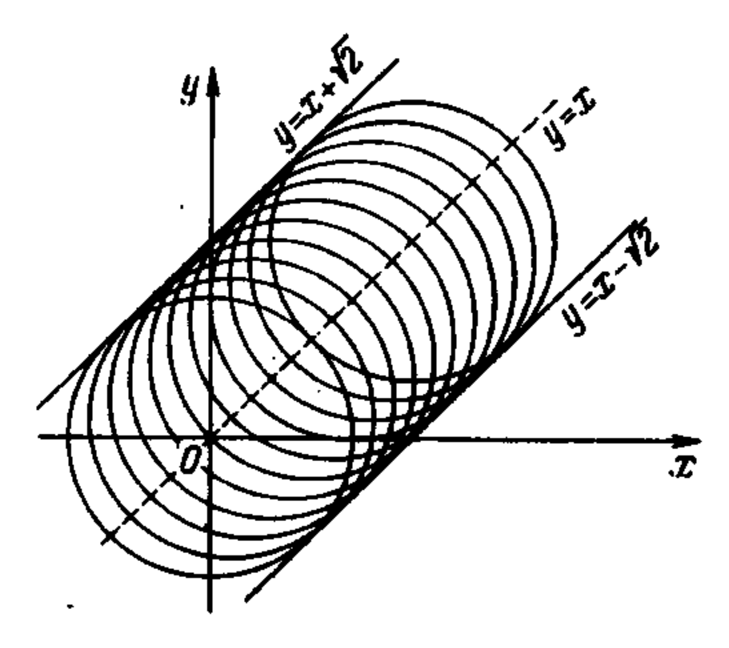


Рис. 3.53

решения как огибающие, исключая C из уравнений

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 - 1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C}((x - C)^2 + (y - C)^2 - 1) = 0$$

(рис. 3.53).

Особые точки дифференциального уравнения. Пусть

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y), \tag{3.32}$$

где P и Q — многочлены по x и y без общего множителя: производная $\partial f/\partial y$ обращается в бесконечность только в тех точках (x_0, y_0), в которых $Q(x_0, y_0) = 0$. В этих точках как правая часть уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ (если $P(x_0, y_0) \neq 0$), так и ее производная по x непрерывны. По теореме существования и единственности через такую точку проходит единственная интегральная кривая $x = g(y)$. Если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ (при данных предположениях это может быть только в изолированных точках), то (x_0, y_0) называется *особой точкой* дифференциального уравнения (3.32). Особых решений для такого уравнения не существует.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+gy} \qquad (ag-bc\neq 0) \qquad (3.33)$$

(a, b, c, g — постоянные) имеет особую изолированную точку (0, 0). Через каждую другую точку, достаточно близкую к (0, 0), проходит единственная интегральная кривая. Рассмотрим корни z_1 и z_2 *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} c-z & a \\ g & b-z \end{vmatrix} = z^2-(b+c)z+(bc-ag)=0$$

и приведем уравнение (3.33) при $z_1\neq z_2$ посредством замены переменных $\bar{x}=Ax+By$, $\bar{y}=Cx+Dy$, где постоянные A, B, C, D ($A^2+B^2>0$, $C^2+D^2>0$) можно найти из систем

$$\begin{cases}(c-z_2)A+aB=0,\\ gA+(b-z_2)B=0,\end{cases} \quad \begin{cases}(c-z_1)C+aD=0,\\ gC+(b-z_1)D=0,\end{cases}$$

к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{z_1\bar{y}}{z_2\bar{x}}, \qquad (3.34)$$

а при $z_0=z_1=z_2$ посредством замены $\bar{x}=ax+\dfrac{b-c}{2}y$, $\bar{y}=y$ — к уравнению

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{\bar{x}+z_0\bar{y}}{z_0\bar{x}}. \qquad (3.35)$$

Эти (аффинные) преобразования не изменяют характера особой точки. Решение уравнения (3.34) имеет вид $\bar{y}=\bar{C}\,|\bar{x}|^{z_1/z_2}$, а решение уравнения (3.35) — вид $\bar{y}=\dfrac{1}{z_0}\bar{x}\ln|\bar{x}|+\bar{C}\bar{x}$.

Случай 1. *Корни z_1 и z_2 — действительные и одного знака.* Особая точка называется *узлом.* Без ограничения общности можно считать, что $z_1\geqslant z_2>0$. Из условия (при $z_1>z_2$)

$$\left.\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0}=\pm\left.\frac{z_1}{z_2}\bar{C}\,|\bar{x}|^{z_1/z_2-1}\right|_{\bar{x}=0}=0$$

следует, что все кривые в особой точке касаются друг друга, т. е. имеют в особой точке общую касательную. Если $z_1=z_2$, то из особой точки в любом направлении выходит единственная интегральная кривая. Наряду с этими семействами кривых имеется еще одна проходящая через особую точку интегральная кривая: $\bar{x}=0$.

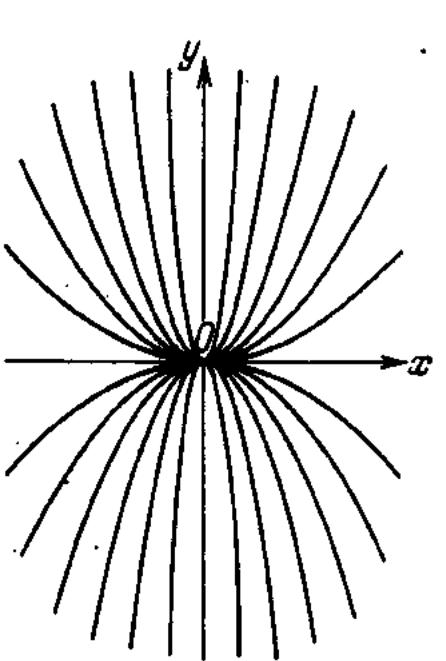


Рис. 3.54

Пример 18. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-6x+4y}{-x+y}$. Корнями характеристического уравнения $z^2-3z+2=0$ являются $z_1=2$ и $z_2=1$. Замена $\bar{x}=-3x+y$, $\bar{y}=-2x+y$ приводит к уравнению $\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\dfrac{2\bar{y}}{\bar{x}}$, интегральные кривые которого задаются уравнениями $\bar{y}=\bar{C}\bar{x}^2$ (рис. 3.54).

Пример 19. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{3x-2y}$. Корни характеристического уравнения $z^2-2z+1=0$ равны между собой: $z_1=z_2=1$. Замена $\bar{x}=2x-2y$, $\bar{y}=y$ приводит к уравнению

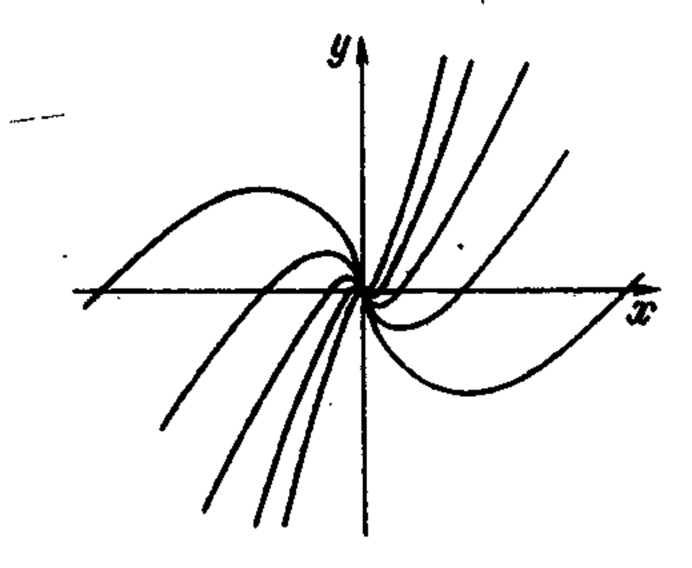


Рис. 3.55

$\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}}$, интегральные кривые которого задаются уравнениями $\bar{y}=\bar{x}\ln|\bar{x}|+\bar{C}\bar{x}$ (рис. 3.55).

Пример 20. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$. Это уравнение уже имеет каноническую форму. Корни характеристического уравнения

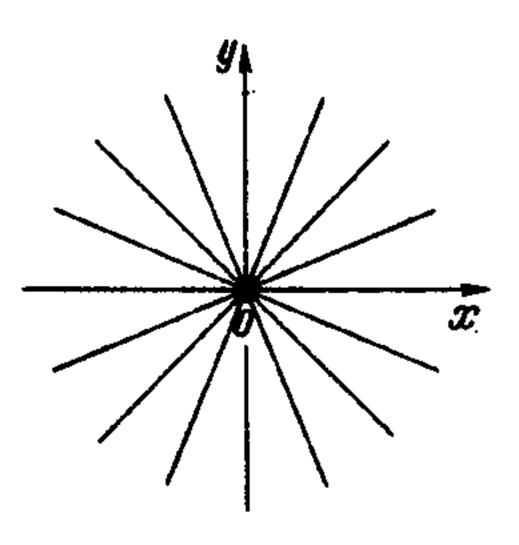


Рис. 3.56

$z^2-2z+1=0$ равны между собой: $z_1=z_1=1$. Уравнения интегральных кривых имеют вид $y=Cx$ (рис. 3.56).

Случай 2. *Корни z_1 и z_2 — действительные и разных знаков.* Особая точка называется *седлом.* При $z_1/z_2=-k<0$ получаем общее решение вида $\bar{y}=\bar{C}\,|\bar{x}|^{-k}$. Через особую точку проходят только две интегральные кривые: $\bar{x}=0$ и $\bar{y}=0$.

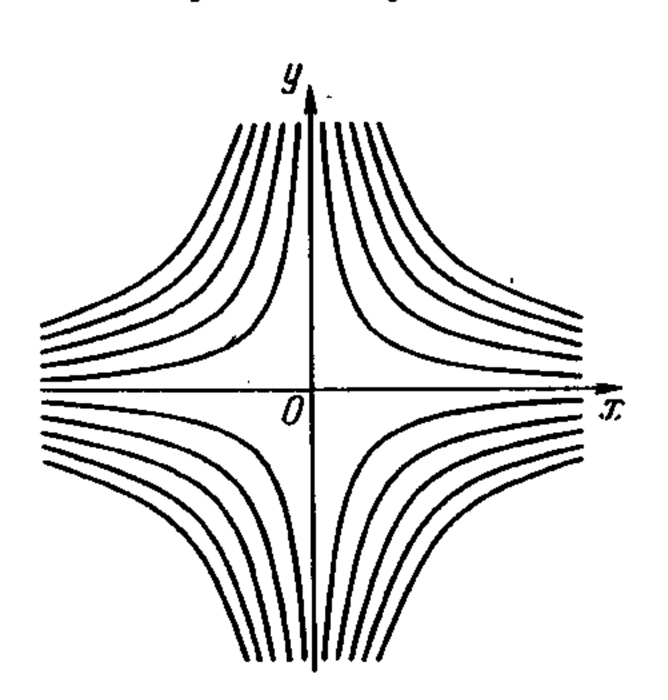


Рис. 3.57

Пример 21. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$. Корни характеристического уравнения $z^2-1=0$ равны $z_1=1$ и $z_2=-1$. Уравнения интегральных кривых имеют вид $xy=C$ (рис. 3.57).

Случай 3. *Корни z_1 и z_2 – комплексно сопряженные* (но не чисто мнимые). Особая точка называется *фокусом*. При замене переменных

$$\bar{x} = Ax + By,\ \bar{y} = Cx + Dy$$

коэффициенты A и B можно определить так, чтобы они были комплексно сопряжены по отношению к коэффициентам C и D. Так как $\bar{x}$, $\bar{y}$ в общем случае для действительных x и y будут комплексными, то вводят новые переменные $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$, полагая

$$\bar{x} = \bar{\bar{x}} + i\bar{\bar{y}} \text{ и } \bar{y} = \bar{\bar{x}} - i\bar{\bar{y}}.$$

Характер особой точки при такой замене вновь не меняется. Общее решение уравнения (3.33) в координатах $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$ имеет вид

$$(\bar{\bar{x}}^2 + \bar{\bar{y}}^2)^{1/2} = \bar{C}e^{-(p/q)\operatorname{arctg}(\bar{\bar{y}}/\bar{\bar{x}})},$$

где

$$z_1 = p + iq,\ z_2 = p - iq,$$

или в полярных координатах

$$\bar{\bar{x}} = \rho\cos\varphi,\ \bar{\bar{y}} = \rho\sin\varphi:\ \rho = \bar{C}e^{-(p/q)\varphi}.$$

Это – семейство логарифмических спиралей в плоскости $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$ с асимптотической особой точкой. Все кривые входят в особую точку, но не имеют там определенной производной и совершают бесконечное множество оборотов вокруг точки (0, 0).

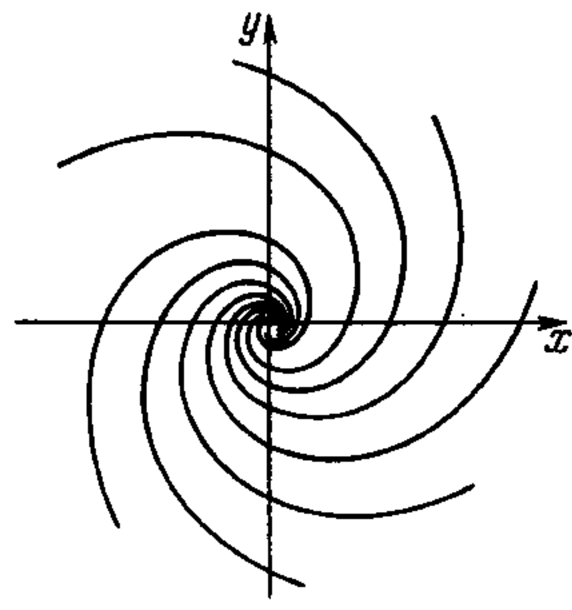


Рис. 3.58

Пример 22. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x - 4y}{2x - 2y}$. **Характеристическое уравнение имеет корни $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$, и замена $\bar{x} = \frac{1}{2}(3 - i)x - y$, $\bar{y} = \frac{1}{2}(3 + i)x - y$ приводит к уравнению $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{(1 + i)\bar{y}}{(i - 1)\bar{x}}$. Наконец, замена $\bar{x} = \bar{\bar{x}} + i\bar{\bar{y}}$, $\bar{y} = \bar{\bar{x}} - i\bar{\bar{y}}$ приводит к уравнению**

$$\frac{d\bar{\bar{y}}}{d\bar{\bar{x}}} = \frac{\bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}}}{\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{y}}},$$

решение которого имеет вид (рис. 3.58)

$$(\bar{\bar{x}}^2 + \bar{\bar{y}}^2)^{1/2} = \bar{C}e^{\operatorname{arctg}(\bar{\bar{y}}/\bar{\bar{x}})}.$$

Случай 4. *Корни z_1 и z_2 – чисто мнимые сопряженные*. Особая точка называется *центром*. Переменные $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$ (выбранные, как в случае 3) дают интегральные кривые

$$\bar{\bar{x}}^2 + \bar{\bar{y}}^2 = \bar{C},$$

т. е. семейство замкнутых кривых, которые окружают особую точку.

Пример 23. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. **Корни характеристического уравнения $z^2 + 1 = 0$ равны $z_1 = i$ и $z_2 = -i$. Уравнения интегральных кривых имеют вид $x^2 + y^2 = \bar{C}$ (рис. 3.59).**

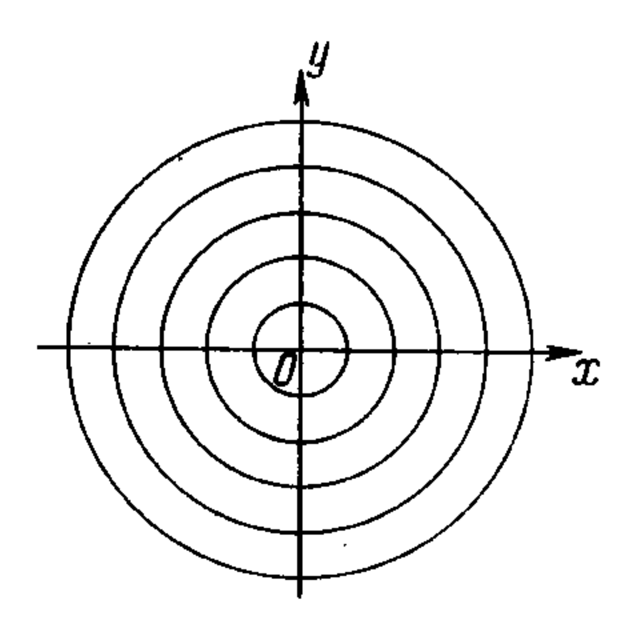


Рис. 3.59

Пусть в дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные, и пусть

$$P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + P_1(x, y),$$
$$Q(x, y) = c(x - x_0) + g(y - y_0) + Q_1(x, y),$$

где $ag - bc \neq 0$ и

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{P_1(x, y)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{Q_1(x, y)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}} = 0.$$

Оказывается, что (за одним исключением) вид особой точки (x_0, y_0) данного дифференциального уравнения будет тот же, что и у особой точки *уравнения первого приближения*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{c(x - x_0) + g(y - y_0)}.$$

Примечание 1. Если особая точка уравнения первого приближения – центр, то особая точка основного уравнения является центром или фокусом.

Примечание 2. Если $ag - bc = 0$, то для определения вида особой точки требуется рассмотрение членов высшего порядка.

3.3.1.2.3. Приближенные методы решения уравнений 1-го порядка. Здесь коротко упомянуты некоторые методы; ниже (см. 7.1.2.9) они будут рассмотрены подробно.

Метод последовательных приближений (Пикар). В предположениях теоремы существования и единственности задача Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = a$ эквивалентна уравнению

$$y(x) = a + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

Функции y_n, вычисленные последовательно по

формуле

$$y_n(x) = a + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt, \quad y_0(t) = a,$$

равномерно сходятся в заданном промежутке к искомому решению $y(x)$.

Пример 24. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. Легко вычислить

$$y_0 = 1, \; y_1 = 1 + \int_0^x (t^2 + 1)\,dt = 1 + x + \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(t^2 + \left(1 + t + \frac{1}{3}t^3\right)^2\right) dt =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}.$$

Интегрирование при помощи рядов. В предположении, что правая часть дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ аналитична по x и y, т. е. что она может быть разложена в степенной ряд по x и y, решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

существует в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad a_k = y^{(k)}(x_0)/k!.$$

Замечания. 1) Коэффициенты a_k можно вычислить при помощи дифференциального уравнения последовательным дифференцированием и подставить в ряд; 2) часто составляют ряд с неопределенными коэффициентами и затем вычисляют a_k из рекуррентной системы, которая получается, если подставить ряд в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$. Этот метод применим также к дифференциальным уравнениям высшего порядка и к системам.

Пример 25. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. Функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ аналитична по x и y. Вычисления $y^{(k)}(0)$ производим, последовательно дифференцируя исходное уравнение:

$$y(0) = 1,$$
$$y'(0) = (x^2 + y^2)|_{x=0} = 1,$$
$$y''(0) = (2x + 2yy')|_{x=0} = 2,$$
$$y'''(0) = (2 + 2(y')^2 + 2yy'')|_{x=0} = 8,$$
$$y^{(4)}(0) = (6y'y'' + 2yy''')|_{x=0} = 28,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Получаем

$$y(x) = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4!}x^4 + \dots$$

Графическое интегрирование. Этот метод базируется на понятии поля направлений (ср. 3.3.1.2.1). Интегральная кривая изображается ломаной, выходящей из заданной начальной точки. Она состоит из коротких отрезков, направление каждого из которых совпадает с направлением поля в начальной точке отрезка, являющейся при этом конечной точкой предыдущего отрезка (рис. 3.60).

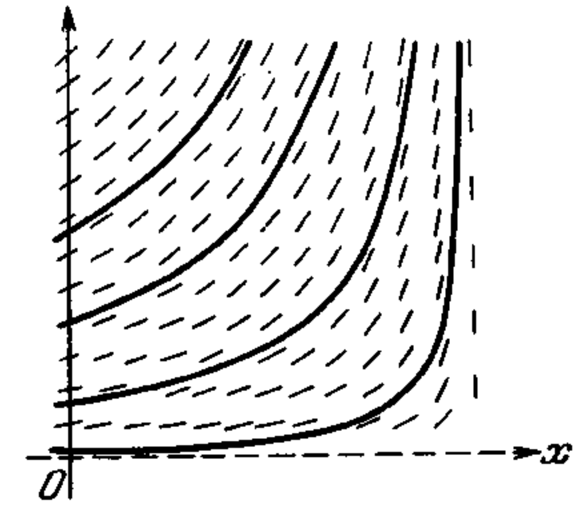


Рис. 3.60

3.3.1.3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы.

3.3.1.3.1. Общая теория линейных дифференциальных уравнений. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x). \tag{3.36}$$

Такие дифференциальные уравнения имеют большое значение в приложениях; при этом функцию $f(x)$ часто называют *возмущающей функцией*. Если $f(x) \equiv 0$, то линейное дифференциальное уравнение называется *однородным*; если $f(x) \not\equiv 0$, его называют *неоднородным*. Коэффициенты $p_\nu(x)$ предполагаются непрерывными в рассматриваемом интервале (a, b).

Однородное уравнение. Если функции $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \dots, k)$ – решения однородного уравнения в интервале (a, b), то и их линейная комбинация

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{k} C_\nu y_\nu(x)$$

(C_ν – произвольные постоянные) является решением линейного однородного дифференциального уравнения.

Функции $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \dots, k)$ называются *линейно зависимыми* на интервале (a, b), если существует k чисел C_ν таких, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо равенство

$$\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu y_\nu(x) = 0,$$

где

$$\sum_{\nu=1}^{k} |C_\nu| > 0.$$

Если же это равенство возможно только при условии, что $C_1 = \dots = C_k = 0$, то функции $y_1(x), \dots, y_k(x)$ называются *линейно независимыми*.

Решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного уравнения линейно зависимы на (a, b), если *определитель Вронского* (*вронскиан*)

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равен нулю в точке $x_0 \in (a, b)$. Из равенства $W(x_0) = 0$ в силу *формулы Лиувилля*

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt\right)$$

следует, что $W(x) \equiv 0$ на (a, b). Указанные n решений однородного уравнения на (a, b) линейно независимы, если определитель Вронского в точке $x_0 \in (a, b)$ не равен нулю, откуда следует, что этот определитель нигде не равен нулю на (a, b).

Каждое однородное дифференциальное уравнение n-го порядка всегда имеет *фундаментальную систему решений*, т. е. n линейно независимых решений. Если решения $y_1, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений, то $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ есть *общее решение* линейного однородного дифференциального уравнения.

Если известно частное решение $y_1(x)$ однородного дифференциального уравнения n-го порядка на интервале (a, b) $(y_1(x) \not\equiv 0)$, то можно понизить порядок дифференциального уравнения (сохраняя его линейность) заменой переменных $y = y_1 \int u(x)\,dx$. Если $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ — фундаментальная система преобразованного уравнения, то функции

$$y_1(x),\ y_2(x) = y_1(x)\int u_1(x)\,dx,\ \ldots,\ y_n(x) = y_{n-1}(x)\int u_{n-1}(x)\,dx$$

образуют фундаментальную систему решений исходного уравнения.

Пример 26. $x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 0$. В канонической форме это уравнение имеет вид

$$y'' + \frac{2(2-x)}{x(1-x)}y' + \frac{2(1+x)}{x^2(1-x)}y = 0.$$

Чтобы обеспечить непрерывность коэффициентов, выберем в качестве интервала (a, b) один из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Частное решение этого уравнения имеет вид $y_1(x) = x^{-2}$. Данное однородное дифференциальное уравнение приводится посредством замены $y = x^{-2}\int u(x)\,dx$ к уравнению $u' + \frac{2}{1-x}u = 0$, решение которого есть $u(x) = (x-1)^2$. Таким образом, $y_1(x) = x^{-2}$, $y_2(x) = x^{-2}\int (x-1)^2\,dx = (x-1)^3/(3x^2)$ образуют фундаментальную систему решений исходного уравнения. Так как $W(x) = \frac{(x-1)^2}{x^4}$ и, следовательно,

$$W(-1) = 4 \neq 0,\quad W(1/2) = 4 \neq 0,\quad W(2) = 2^{-4} \neq 0$$

(смотря по тому, в каком интервале проводится рассмотрение), то полученные решения линейно независимы. Общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{(x-1)^3}{3x^2}.$$

Неоднородное уравнение. Общее решение y линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения z и частного решения $\bar{y}$ неоднородного уравнения: $y = z + \bar{y}$. Для вычисления $\bar{y}$ применяют один из следующих методов.

Метод вариации постоянных. Запишем искомое решение в виде общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения $\bar{y} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ и предположим, что коэффициенты C_ν зависят от x. Производные функций $C_\nu(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0,\\
&C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,\\
&C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}$$

Решая эту линейную систему, получаем C_ν', а затем квадратурами получаем и $C_\nu(x)$. В результате частное решение линейного неоднородного уравнения записывается в виде

$$\bar{y}(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_1(t)}{W(t)}\,dt + \ldots + y_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_n(t)}{W(t)}\,dt.$$

При этом $W_\nu(x)$ — определители, которые получаются из определителя Вронского $W(x)$ для функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, если элементы ν-го столбца заменить на $0, 0, \ldots, 0, f(x)$. Полученное таким образом частное решение $\bar{y}(x)$ уравнения (3.36) удовлетворяет условиям

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}'(x_0) = \ldots = \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Метод Коши. В общем решении линейного однородного дифференциального уравнения выберем коэффициенты C_ν так, чтобы при $x = a$ выполнялись условия $y(a) = 0$, $y'(a) = 0, \ldots, y^{(n-2)}(a) = 0$, $y^{(n-1)}(a) = f(a)$, где a — произвольный параметр. Если $y(x, a)$ есть полученное таким образом решение однородного уравнения, то $\bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} y(x, a)\,da$ — частное решение уравнения (3.36), для которого $\bar{y}(x_0) = \bar{y}'(x_0) = \ldots = \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Пример 27. $x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2$. В канонической форме это уравнение имеет вид

$$y'' + \frac{2(2-x)}{x(1-x)}y' + \frac{2(1+x)}{x^2(1-x)}y = \frac{1}{1-x}.$$

Для непрерывности коэффициентов ограничимся одним из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения есть

$$z = C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{(x-1)^3}{3x^2},\quad\text{и}\quad W(x) = \frac{(x-1)^2}{x^4}$$

(см. пример 26). Далее, $W_1(x) = \frac{(x-1)^2}{3x^2}$ и $W_2(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$. Следовательно, для интервала $(0, 1)$ или $(-\infty, 0)$

$$\bar{y} = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{3}\,dt - \frac{(x-1)^3}{3x^2}\int_0^x \frac{t^2}{(t-1)^3}\,dt = \frac{x}{9} + \frac{(x-1)(3x-2)}{6x} - \frac{(x-1)^3}{3x^2}\ln|x-1|,$$

откуда

$$y = \frac{11}{18}x - \frac{5}{6} + \frac{1}{3x} - \frac{(x-1)^3}{3x^2}\ln|x-1| + C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{(x-1)^3}{3x^2}.$$

3.3.1.3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = f(x) \quad (a_0 \neq 0).$$

Однородное уравнение. Однородному дифференциальному уравнению $a_0y^{(n)} + \ldots + a_ny = 0$ ставится в соответствие *характеристический многочлен**) $P_n(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n$. Этот многочлен можно представить в виде

$$P_n(r) = a_0(r - r_1)^{k_1}\ldots(r - r_\nu)^{k_\nu}(r - (p_1 + iq_1))^{l_1}\ldots \ldots(r - (p_\mu + iq_\mu))^{l_\mu}(r - (p_1 - iq_1))^{l_1}\ldots(r - (p_\mu - iq_\mu))^{l_\mu},$$

где $\sum_{s=1}^{\nu} k_s + 2\sum_{s=1}^{\mu} l_s = n$. При этом r_s – различные действительные корни кратности k_s, а $p_s + iq_s$, $p_s - iq_s$ – различные пары комплексно сопряженных корней кратности l_s (коэффициенты характеристического многочлена действительны). Отдельным сомножителям $P_n(r)$ поставим в соответствие следующие функции: $(r - r_s)^{k_s}$ – функцию $y_s(x) = (b_s^1 + b_s^2x + \ldots + b_s^{k_s}x^{k_s-1})e^{r_sx}$, а $(r - (p_s + iq_s))^{l_s}(r - (p_s - iq_s))^{l_s}$ – функцию

$$u_s(x) = (c_s^1 + c_s^2x + \ldots + c_s^{l_s}x^{l_s-1})e^{p_sx}\cos q_sx + (d_s^1 + d_s^2x + \ldots + d_s^{l_s}x^{l_s-1})e^{p_sx}\sin q_sx.$$

Количество всех коэффициентов – произвольных постоянных b_s^k, c_s^k и d_s^k – в точности равно n. Общее решение однородного дифференциального уравнения может быть записано в виде

$$y = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_{k_\nu}(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_{l_\mu}(x).$$

Пример 28. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 8y'' - 12y' + 8y = 0$,

$$P_5(r) = r^5 - 2r^4 + 8r^2 - 12r + 8 = (r + 2)(r - (1 + i))^2(r - (1 - i))^2.$$

Сомножителю $(r + 2)$ соответствует функция $y_1(x) = b_1e^{-2x}$, а сомножителю $(r - (1 + i))^2(r - (1 - i))^2$ соответствует функция

$$u_1(x) = (c_1^1 + c_1^2x)e^x\cos x + (d_1^1 + d_1^2x)e^x\sin x.$$

Общее решение имеет вид

$$y(x) = b_1e^{-2x} + e^x[(c_1^1 + c_1^2x)\cos x + (d_1^1 + d_1^2x)\sin x].$$

Неоднородное уравнение. Общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами можно представить в виде $y = z + \bar{y}$, где z – общее решение однородного уравнения, а частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения можно найти вариацией постоянных или методом Коши. Еще один способ решения таких уравнений – это операторный метод (см. 3.3.1.6).

Наиболее просто находится частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, если правая часть (*возмущающая функция*) имеет специальный вид.

*) Этот многочлен можно получить, подставив выражение $y = e^{rx}$ в дифференциальное уравнение.

Некоторые примеры. Пусть $Q_k(x)$ – многочлен степени k. Если правая часть уравнения имеет вид $f(x) = Q_k(x)e^{mx}$, то частное решение ищется в виде $\bar{y} = R_k(x)e^{mx}$, где $R_k(x)$ – многочлен степени k с неопределенными коэффициентами, при условии, что m не является корнем характеристического многочлена P_n; частное решение ищется в виде $\bar{y} = x^qR_k(x)e^{mx}$ в случае, если m есть q-кратный корень характеристического многочлена. Если правая часть имеет вид $f(x) = Q_k(x)e^{mx}\sin\omega x$ или $Q_k(x)e^{mx}\cos\omega x$, то частное решение ищется в виде $\bar{y} = e^{mx}(R_k(x)\cos\omega x + S_k(x)\sin\omega x)$, если $m \pm i\omega$ не является корнем характеристического многочлена; частное решение ищется в виде $\bar{y} = x^qe^{mx}(R_k(x)\cos\omega x + S_k(x)\sin\omega x)$, если $m \pm i\omega$ является q-кратным корнем характеристического многочлена. В обоих случаях $R_k(x)$ и $S_k(x)$ – многочлены степени k с неопределенными коэффициентами.

Если правая часть представляет собой линейную комбинацию вышеуказанных функций, то частное решение уравнения равно сумме решений, соответствующих каждому члену линейной комбинации.

Например, при $f(x) = ae^{mx}$, где $P_n(m) \neq 0$, частное решение имеет вид $\bar{y} = \dfrac{ae^{mx}}{P_n(m)}$; если m является q-кратным корнем характеристического многочлена, то частное решение имеет вид

$$y = \frac{ax^qe^{mx}}{P_n^{(q)}(m)}.$$

Пример 29. $y''' - 3y'' + y' - 3y = 6e^{3x}$. Характеристический многочлен $P_3(r) = r^3 - 3r^2 + r - 3 = (r - 3)(r + i)(r - i)$ имеет простой корень $r = 3$. Тогда $\bar{y} = \frac{6}{10}xe^{3x}$ и $y = \frac{6}{10}xe^{3x} + C_1e^{3x} + C_2\sin x + C_3\cos x$.

Пример 30. $y'' + 4y' + 4y = x^2 + e^x - \sin x$. Характеристический многочлен имеет вид $P_2(r) = r^2 + 4r + 4 = (r - 2)^2$. Частное решение ищется в виде $y = (Ax^2 + Bx + C) + De^x + (E\cos x + F\sin x)$. Подставим его в дифференциальное уравнение

$$2A + De^x - E\cos x - F\sin x + 8Ax + 4B + 4De^x - 4E\sin x + 4F\cos x + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4De^x + 4E\cos x + 4F\sin x = x^2 + e^x - \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем систему

$$4A = 1,\quad 8A + 4B = 0,\quad 2A + 4B + 4C = 0,$$
$$9D = 1,\quad 3E + 4F = 0,\quad -4E + 3F = -1.$$

Решая эту систему, находим вид частного решения

$$\bar{y} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{9}e^x + \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x,$$

а общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение Эйлера

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(cx + d)^\nu y^{(\nu)}(x) = f(x)$$

может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $cx + d = e^t$.

Пример 31. $(x+1)^3 y''' - (x+1)y' - 3y = 6(x+1)^3$. Это уравнение при подстановке $(x+1) = e^t$ переходит в уравнение

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 3y = 6e^{3t}$$

(рассмотренное в примере 29). Следовательно, $y(t) = \frac{6}{10}e^{3t}t + C_1e^{3t} + C_2\sin t + C_3\cos t$, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{6}{10}(x+1)^3\ln|x+1| + C_1(x+1)^3 + C_2\sin(\ln|x+1|) + C_3\cos(\ln|x+1|).$$

3.3.1.3.3. **Линейные системы дифференциальных уравнений.** Рассмотрим линейную неоднородную *нормальную* систему

$$y_1'(x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_2(x) + \ldots + p_{1n}(x)y_n(x) = f_1(x),$$
$$y_2'(x) + p_{21}(x)y_1(x) + p_{22}(x)y_2(x) + \ldots + p_{2n}(x)y_n(x) = f_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n'(x) + p_{n1}(x)y_1(x) + p_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + p_{nn}(x)y_n(x) = f_n(x),$$

которая может быть записана также и в *векторной форме*:

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x),$$

где

$$y'(x) = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x))^T,$$
$$y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T,$$
$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T,$$
$$P(x) = \begin{bmatrix} p_{11}(x) & \ldots & p_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(x) & \ldots & p_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Решением данной системы будет набор n функций $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$, называемый *вектор-решением*. Если $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то система называется *однородной*. Такие линейные системы решаются при помощи приемов, аналогичных тем, которые применялись для решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Однородные системы. Данные m вектор-решений $y_i(x) = (y_{i1}(x), \ldots, y_{in}(x))^T (i = 1, 2, \ldots, m)$ называются *линейно зависимыми* на интервале (a, b), если существует m чисел C_i таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} C_iy_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} |C_i| > 0.$$

Если же это равенство возможно лишь при условии $C_1 = \ldots = C_m = 0$, то m вектор-решений называются *линейно независимыми*; n вектор-решений однородной системы $y_i(x) = (y_{i1}(x), \ldots, y_{in}(x))^T$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы только тогда, когда существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $\det y_{ij}(x_0) \neq 0$. Тогда $\det y_{ij}(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Это следует из обобщенной *формулы Лиувилля*

$$\det(y_{ij}(x)) = \det(y_{ij}(x_0))\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n} p_{kk}(t)\,dt\right\}.$$

1. Если $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – набор m вектор-решений линейной однородной системы, то их линейная комбинация $y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_iy_i(x)$ есть вектор-решение (C_i – произвольные постоянные).

2. Если $m > n$, то m вектор-решений линейной однородной системы всегда линейно зависимы на (a, b).

3. Каждая линейная однородная система всегда имеет *фундаментальную систему* вектор-решений, т. е. n линейно независимых вектор-решений. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему, то $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_iy_i(x)$ (C_i – произвольные постоянные) есть общее вектор-решение системы.

4. Если $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))^T$ есть вектор-решение линейной однородной системы и $u_1(x) \neq 0$ на (a, b), то число неизвестных функций в данной системе можно уменьшить. Для этого нужно решить систему уравнений

$$z_q'(x) + \sum_{\nu=2}^{n}\left(p_{q\nu}(x) - \frac{u_q(x)}{u_1(x)}p_{1\nu}(x)\right)z_\nu(x) = 0$$
$$(q = 2, 3, \ldots, n),$$

состоящую из $n-1$ однородных линейных дифференциальных уравнений.

Пусть $\bar{z}_q = (z_{q2}, \ldots, z_{qn})^T$ $(q = 2, 3, \ldots, n)$ – фундаментальная система решений этой системы. Тогда векторы $y_q(x) = v_q(x)u(x) + z_q(x)$ $(q = 2, 3, \ldots, n)$, где $z_q = (0, z_{q2}, \ldots, z_{qn})^T$,

$$v_q(x) = -\int\frac{1}{u_1(x)}\sum_{s=2}^{n} p_{1s}(x)z_{qs}(x)\,dx$$
$$(q = 2, 3, \ldots, n),$$

вместе с вектором $u(x)$ составляют фундаментальную систему исходной однородной системы.

Пример 32.

$$y_1' + \frac{1}{x(x^2+1)}y_1 - \frac{1}{x^2(x^2+1)}y_2 = 0,$$
$$y_2' + \frac{x^2}{x^2+1}y_1 - \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}y_2 = 0.$$

Будем искать решение в виде $y_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, $y_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, где $y_1(0) = a_0 = 1$, $y_2(0) = b_0 = 0$. Подставим y_1 и y_2 в систему, в которой первое уравнение предварительно умножено на $x^2(x^2+1)$, а второе – на $x(x^2+1)$. Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим: $a_\nu = 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots$; $b_\nu = 0$ для $\nu = 0, 2, 3, \ldots$; $b_1 = 1$. Таким образом, $u(x) = (1, x)^T$ есть частное вектор-решение, причем $u_1(x) = 1 \neq 0$. Составим уравнение $z_2' - \frac{2x}{x^2+1}z_2 = 0$ и найдем его решение $\bar{z}_2 = (x^2+1)$; тогда $z_2 = (0, x^2+1)^T$. Вы-

числим $v_2(x) = -\int p_{12}(x) z_{22}(x)\,dx = -\frac{1}{x}$. В результате получим

$$y_2(x) = -\frac{1}{x}(1, x)^T + (0, x^2+1)^T = \left(-\frac{1}{x}, x^2\right)^T.$$

Фундаментальной системой решений будет

$$y_1(x) = u(x) = (1, x)^T,\ y_2(x) = \left(-\frac{1}{x}, x^2\right)^T.$$

5. Для линейных *однородных систем с постоянными действительными коэффициентами* (т. е. $-p_{ij} = a_{ij} = \text{const}$) фундаментальную систему находят следующим образом (ср. 2.4.4.5). Сначала определяют корни характеристического многочлена

$$P(r) = \det(p_{ij} + r\delta_{ij}) =$$

$$= \begin{vmatrix} p_{11}+r & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}+r & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}+r \end{vmatrix} = 0.$$

Если r_1 – простой корень характеристического уравнения $P(r) = 0$, то, подставив решение $y_1(x) = e^{r_1x}(A_1, A_2, \dots, A_n)^T$ ($A_i = \text{const}$) в систему, определим A_i; они будут зависеть от одной произвольной постоянной. Значит, и частное вектор-решение будет содержать одну произвольную постоянную.

Если r_1 есть p-кратный действительный корень уравнения $P(r) = 0$, то, подставив $y_1(x) = e^{r_1x}(A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))^T$ ($A_i(x)$ – многочлен степени $p-1$ с неопределенными коэффициентами) в однородную систему, найдем коэффициенты всех многочленов. Они будут выражены через p произвольных параметров. Следовательно, получим частное решение с p произвольными постоянными.

Если r_1 – простой комплексный корень уравнения $P(r) = 0$, то корнем является также комплексно сопряженное число $\bar{r}_1$. Решение $y_1(x)$ строится только для одного из этих двух корней, так же как в случае простого действительного корня (только теперь A_i – комплексные постоянные). Тогда $\mathrm{Re}(y_1)$ и $\mathrm{Im}(y_1)$ являются действительными вектор-решениями, соответствующими данной паре комплексно сопряженных корней характеристического уравнения.

Если r_1 является p-кратным комплексным корнем уравнения $P(r) = 0$, то поступаем, как и в случае действительного p-кратного корня, а затем в качестве вектор-решений, соответствующих корням r_1 и $\bar{r}_1$, берем $\mathrm{Re}(y_1)$ и $\mathrm{Im}(y_1)$. Неопределенные постоянные (коэффициенты многочленов A_i) берутся комплексными, как в случае простого комплексного корня.

Пример 33. $y_1' - y_1 + y_2 = 0$, $y_2' - 4y_1 + 3y_2 = 0$. Характеристический многочлен имеет вид

$$P(r) = \begin{vmatrix} -1+r & +1 \\ -4 & +3+r \end{vmatrix} = (r+1)^2;$$

$r_1 = -1$ есть двукратный корень. Поэтому решение ищем в виде $y(x) = e^{-x}(A_1x + A_2, B_1x + B_2)^T$.

Подставив эти значения y_1 и y_2 в рассматриваемую систему, после почленного умножения на e^x получим, что

$$-A_1x + (A_1 - A_2) + (B_1 - A_1)x + (B_2 - A_2) = 0,$$
$$-B_1x + (B_1 - B_2) + (3B_1 - 4A_1)x + (3B_2 - 4A_2) = 0,$$

откуда имеем: $B_1 - 2A_1 = 0$, $A_1 - 2A_2 + B_2 = 0$, $2B_1 - 4A_1 = 0$, $B_1 + 2B_2 - 4A_2 = 0$. Следовательно, $A_1 = \frac{1}{2}B_1$ и $A_2 = \frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{4}B_1$. Если положить $B_1 = C_1$ и $B_2 = C_2$, то получим общее вектор-решение

$$y(x) = C_1e^{-x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, x\right)^T + C_2e^{-x}\left(\frac{1}{2}, 1\right)^T.$$

Таким образом, два линейно независимых вектор-решения данной системы имеют вид

$$y(x) = \left(e^{-x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right), e^{-x}x\right)^T,\quad y(x) = \left(\frac{1}{2}e^{-x}, e^{-x}\right)^T.$$

Общий вид системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами есть

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k'(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если $\det(a_{ik})$ не обращается в нуль, то систему можно привести к рассмотренному выше нормальному виду. Однако решение можно получить и непосредственно из данной системы тем же методом, что и в случае нормальной системы. Случай $\det(a_{ik}) = 0$ мы не рассматриваем.

Неоднородные системы. *Общее вектор-решение y* неоднородной системы равно сумме частного вектор-решения $\bar{y}$ неоднородной системы и общего вектор-решения соответствующей однородной системы.

Чтобы найти $\bar{y}$, можно применить метод вариации постоянных. Для этого произвольные постоянные C_i в общем вектор-решении однородной системы заменяем неизвестными функциями $C_i(x)$:

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,y_i(x),$$

и затем подставляем полученное выражение в неоднородную систему.

Для производных новых неизвестных функций $C_i'(x)$ получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Решая ее, находим (после интегрирований) функции $C_1(x), \dots, C_n(x)$. Подставив эти функции вместо постоянных в решение однородной системы, получим искомое частное вектор-решение неоднородной системы. Например,

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{D_i(t)}{\det(y_{jk}(t))}\,dt \qquad (3.36\text{a})$$

есть частное вектор-решение неоднородной системы при условии, что $\bar{y}(x_0) = 0$. При этом $y_i(x) = (y_{i1}(x), \dots, y_{in}(x))^T$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – линейно независимые вектор-решения однородной системы, а $D_i(x)$ – определители, которые получаются из $\det(y_{ik}(x))$ заменой i-й строки на строку, составленную из свободных членов $f_1(x), \dots, f_n(x)$ неоднородной системы.

Пример 34. $y_1' - y_1 + y_2 = x$, $y_2' - 4y_1 + 3y_2 = 2$. Подставляя в систему $\bar{y}(x) = C_1(x)e^{-x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, x\right)^T + C_2(x)e^{-x} \times \times \left(\frac{1}{2}, 1\right)^T$ (см. пример 33), получим, что

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)C_1'(x) + \frac{1}{2}C_2'(x) = xe^x, \quad xC_1'(x) + C_2'(x) = 2e^x.$$

Отсюда $C_1'(x) = 4e^x(x-1)$, $C_2'(x) = 4e^x\left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$. После интегрирования получаем

$$\bar{y}(x) = (4x-8)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, x\right)^T + (-4x^2 + 12x - 10)\left(\frac{1}{2}, 1\right)^T = (3x - 7,\ 4x - 10)^T.$$

Общее решение имеет вид

$$y(x) = (3x - 7,\ 4x - 10)^T + C_1e^{-x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, x\right)^T + C_2e^{-x}\left(\frac{1}{2}, 1\right)^T.$$

Пример 35.

$$y_1' + \frac{1}{x(x^2+1)}y_1 - \frac{1}{x^2(x^2+1)}y_2 = \frac{1}{x},$$

$$y_2' + \frac{x^2}{x^2+1}y_1 - \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}y_2 = 1.$$

Известно общее решение соответствующей однородной системы (см. пример 32): $z(x) = C_1(1, x)^T + C_2\left(-\frac{1}{x}, x^2\right)^T$; при этом

$$\det(y_{ik}) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1/x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 + 1,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1/x & 1 \\ -1/x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{x^2+1}{x}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1/x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Находим теперь $\bar{y}$, используя приведенную выше формулу (3.36а):

$$\bar{y}(x) = y_1(x)\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|(1, x)^T.$$

Общее решение имеет вид

$$y(x) = (\ln|x|,\ x\ln|x|)^T + C_1(1, x)^T + C_2\left(-\frac{1}{x}, x^2\right)^T.$$

Для случая, когда в правых частях уравнений стоят функции специального вида $Q_k(x)e^{mx}$ ($Q_k(x)$ — многочлен степени k), можно применить метод неопределенных коэффициентов, который был описан при рассмотрении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Замечание. Вышеуказанные методы можно перенести и на системы линейных дифференциальных уравнений более высокого порядка.

3.3.1.3.4. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Рассмотрим уравнение

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = F(x).$$

Предположим, что существует интервал I, на котором функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ непрерывны и $a(x) \neq 0$. Тогда дифференциальное уравнение можно разделить на $a(x)$ и к полученному уравнению

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$, $f(x) = \frac{F(x)}{a(x)}$, применить общие положения из 3.3.1.3.1.

В частности, *общее решение* соответствующего *однородного уравнения* ($f(x) = 0$) может быть записано в виде

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые частные решения однородного уравнения, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Если известно частное решение $y_1(x)$ однородного уравнения $y_1(x) \not\equiv 0$ на I, то заменой переменных $y = y_1\int \bar{y}(x)\,dx$ порядок исходного уравнения можно понизить; для $\bar{y}$ получим уравнение

$$\bar{y}'(x) + \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right)\bar{y}(x) = 0.$$

Тогда

$$y_1(x) \text{ и } y_2(x) = Ay_1(x)\int^x \frac{\exp\left(-\int^t p(s)\,ds\right)}{y_1^2(t)}dt$$

($A \neq 0$ — произвольная постоянная) — два линейно независимых решения однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = z + \bar{y},$$

где z — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\bar{y}$ — частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение $\bar{y}$ может быть найдено методом вариаций постоянных по следующей формуле:

$$\bar{y}(x) = \frac{y_2(x)}{A}\int^x f(x)y_1(x)e^{\int^t p(x)dx}dx - \frac{y_1(x)}{A}\int^x f(x)y_2(x)e^{\int^t p(x)dx}dx.$$

Предположим теперь, что существует точка x_0, в которой $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $F(x)$ — аналитические функции, т. е. их можно разложить в сходящиеся ряды по степеням $x - x_0$. Будем считать, что $a(x_0) \neq 0$.

Точки, в которых выполняются эти условия, называются *регулярными точками* дифференциального уравнения. Тогда решения этого уравнения тоже могут быть разложены в ряды по степеням $(x - x_0)$, сходящиеся в той же области, что и ряды для коэффициентов. Эти решения можно найти методом неопределенных коэффициентов. Для этого искомое решение записывается в виде ряда $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x - x_0)^\nu$ и подставляется в дифференциальное уравнение. После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $x - x_0$ получаем формулы для отыскания a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$).

Пример 36. $y'' + xy = 0$. Для $x_0 = 0$ все сделанные предположения выполнены. Предполагаемое решение $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ подставляем в дифференциальное уравнение и

получаем

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)a_\nu x^{\nu-2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{\nu+1} = 0,$$

или

$$2a_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} ((\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2} + a_{\nu-1})x^\nu = 0;$$

следовательно,

$$a_2 = 0 \text{ и } (\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2} + a_{\nu-1} = 0$$

для $\nu = 1, 2, \ldots$

По этим рекуррентным формулам все коэффициенты выражаются через a_0, c_1: $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}a_0$, $a_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}a_1$, $a_5 = 0$, ..., и решение записывается в виде

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right).$$

Предположим теперь, что дифференциальное уравнение при $T(x) = 0$ можно записать в виде

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0,$$

причем $p(x)$ и $q(x)$ аналитичны в точке $x = x_0$. Такая точка x_0 называется *регулярной особой точкой* (или *слабо особой точкой*). Можно показать, что существует по меньшей мере одно решение вида

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-x_0)^{\nu+r},$$

где число r не обязательно целое, причем ряд сходится при $|x-x_0| < R$ (если ряды, соответствующие функциям $p(x)$ и $q(x)$, сходятся при $|x-x_0| < R$). Подставляя ряды для функций $y(x)$,

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu (x-x_0)^\nu \text{ и } q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu (x-x_0)^\nu$$

в исходное уравнение, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (r+\nu)(r+\nu-1)(x-x_0)^{r+\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu (x-x_0)^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (r+\nu)(x-x_0)^{r+\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu (x-x_0)^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-x_0)^{r+\nu} = 0.$$

В предположении, что $a_0 \neq 0$, вычислим коэффициент при $(x-x_0)^r$ в данном соотношении. Имеем

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0. \qquad (3.37)$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением* для r. Коэффициент при $(x-x_0)^{r+\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, равен

$$a_\nu[(r+\nu)(r+\nu-1) + p_0(r+\nu) + q_0] + \sum_{s=1}^{\nu} [p_s(r+\nu-s) + q_s]a_{\nu-s} = 0. \qquad (3.38)$$

Из (3.37) найдем два значения r_1 и r_2 и с учетом формул (3.38) получим два решения:

$$y_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} (x-x_0)^{\nu+r_1},$$

$$y_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} (x-x_0)^{\nu+r_2}.$$

Построение общего решения исходного уравнения зависит от связи между r_1 и r_2.

Случай 1. $r_1 - r_2$ — нецелое число. Тогда $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} (x-x_0)^{\nu+r_1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} (x-x_0)^{\nu+r_2}.$$

Случай 2. $r_1 = r_2$. Тогда $y_1(x) = Cy_2(x)$ и можно показать, что общее решение записывается в виде $\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, где $\bar{y}_1(x) = y_1(x)$,

$$\bar{y}_2(x) = y_1(x)\ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\partial a_\nu}{\partial r}\right)_{r=r_1} (x-x_0)^\nu.$$

Случай 3. $r_2 = r_1 - n$, где n — натуральное число. В этом случае общее решение имеет вид

$$y(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x),$$

где $\bar{y}_1(x) = y_1(x)$, а

$$\bar{y}_2(x) = g_n y_1(x)\ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x-x_0)^\nu,$$

где g_n — коэффициент при x^n в выражении

$$\frac{x^{n+1}}{(y_1(x+x_0))^2} e^{-\int_{x_0}^{x} t^{-1}p(t)\,dt}.$$

Коэффициенты b_ν определяются из дифференциального уравнения.

Замечание. В некоторых задачах требуется найти *решения* уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ для *больших* x, т. е. решения в виде бесконечных рядов по переменному $1/x$. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ аналитичны при $x = \infty$, т. е. их можно разложить в сходящиеся ряды по переменному $1/x$. Замена переменного $x = 1/z$ приводит к уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}p\left(\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^4}q\left(\frac{1}{z}\right)y = 0.$$

Точка $x = \infty$ называется *регулярной точкой* исходного дифференциального уравнения, если $z = 0$ является регулярной точкой преобразованного уравнения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$p(x) = \frac{2}{x} + O(x^{-2}); \quad q(x) = O(x^{-4})$$

при $x \to \infty$. Решения имеют вид

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{-\nu}.$$

Точка $x = \infty$ называется *регулярной особой точкой*, если $z = 0$ является регулярной особой точкой преобразованного дифференциального уравнения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$p(x) = \frac{p_0}{x} + O(x^{-2}), \quad q(x) = \frac{q_0}{x^2} + O(x^{-3})$$

при $x \to \infty$. Соответствующее определяющее уравнение имеет вид $r^2 + (1 - p_0) r + q_0 = 0$, и в случае, если $r_1 - r_2$ не целое число, решения представляются рядами

$$y_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{-r_1 - \nu}, \quad y_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{-r_2 - \nu}.$$

Дифференциальное уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Точка $x = 0$ – регулярная особая точка, и определяющее уравнение имеет вид $r^2 - n^2 = 0$. Отсюда следует, что $r_1 = n$ и $r_2 = -n$. Если подставить $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{n+\nu}$ в уравнение, то после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x получим, что $(2n - 1) a_1 = 0$, $\nu(2n + \nu) a_\nu + a_{\nu-2} = 0$ при $\nu = 2, 3, \ldots, n$. Из этих рекуррентных формул следует, что

$$a_{2k-1} = 0, \; a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} \frac{a_0}{k!(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$$

для $k = 1, 2, \ldots$ и произвольного $a_0 \neq 0$. Решение, полученное при $a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ *), определяет *функцию Бесселя* (*цилиндрическую функцию*) *1-го рода n-го порядка:*

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}.$$

Графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ и $J_3(x)$ изображены на рис. 3.61.

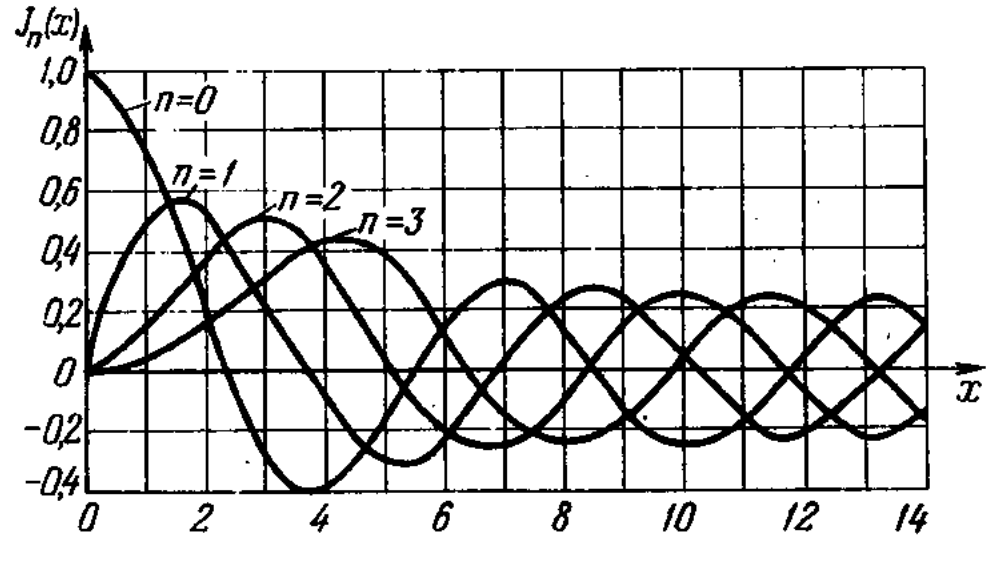


Рис. 3.61

Общее решение уравнения Бесселя в случае, когда n не целое, имеет вид

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x),$$

где $J_{-n}(x)$ определяется рядом, получающимся из ряда для $J_n(x)$ заменой n на $-n$; при целом n справедлива формула

$$J_{-n} = (-1)^n J_n(x).$$

Общее решение уравнения Бесселя при целом n имеет вид

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x).$$

Функция $Y_n(x)$ (обозначается также $N_n(x)$) называется *функцией Бесселя* (*функцией Неймана, функцией Вебера, цилиндрической функцией*) *2-го рода n-го порядка*; для нецелых чисел n она определяется формулой

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}.$$

Для целого n функция $Y_n(x)$ определяется равенством

$$Y_n(x) = \lim_{m \to n} \frac{J_n(x)\cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \times$$

$$\times (\Phi(r+k) + \Phi(k)),$$

где m – близкое к n нецелое число, C – постоянная Эйлера ($C = 0{,}5772\ldots$) и

$$\Phi(k) = \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s}, \quad \Phi(0) = 0.$$

Графики функций $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ изображены на рис. 3.62.

В случае целого n часто удобно рассматривать в качестве линейно независимых решений две

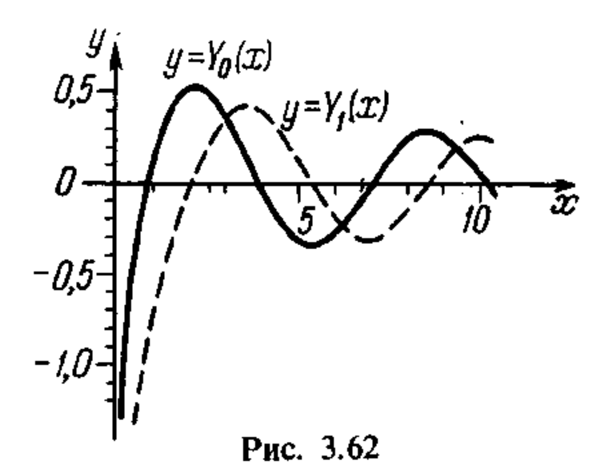


Рис. 3.62

функции $H_n^{(1)} = J_n(x) + iY_n(x)$ и $H_n^{(2)} = J_n(x) - iY_n(x)$ и записывать общее решение в виде

$$y(x) = C_1 H_n^{(1)}(x) + C_2 H_n^{(2)}(x).$$

Функции $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ называются *функциями Бесселя 3-го рода n-го порядка* (или *функциями Ганкеля*).

В некоторых приложениях рассматривают *модифицированные функции Бесселя 1-го рода n-го*

*) Относительно гамма-функции см. 2.2.1.1, 3.1.9.4.

порядка чисто мнимого аргумента

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}$$

(n произвольное) и *модифицированные функции*

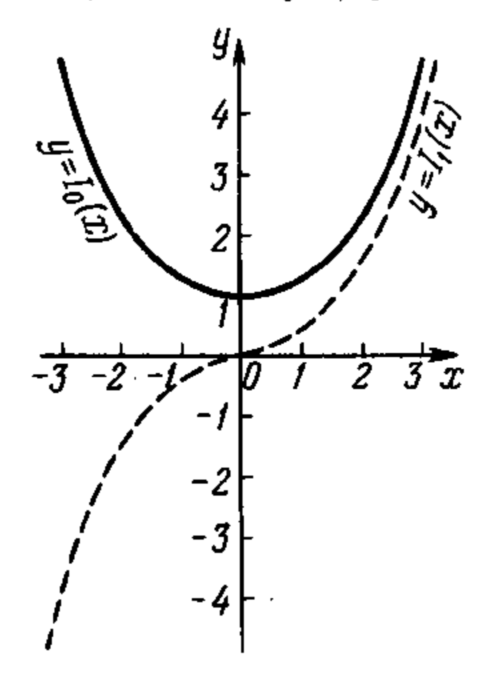


Рис. 3.63

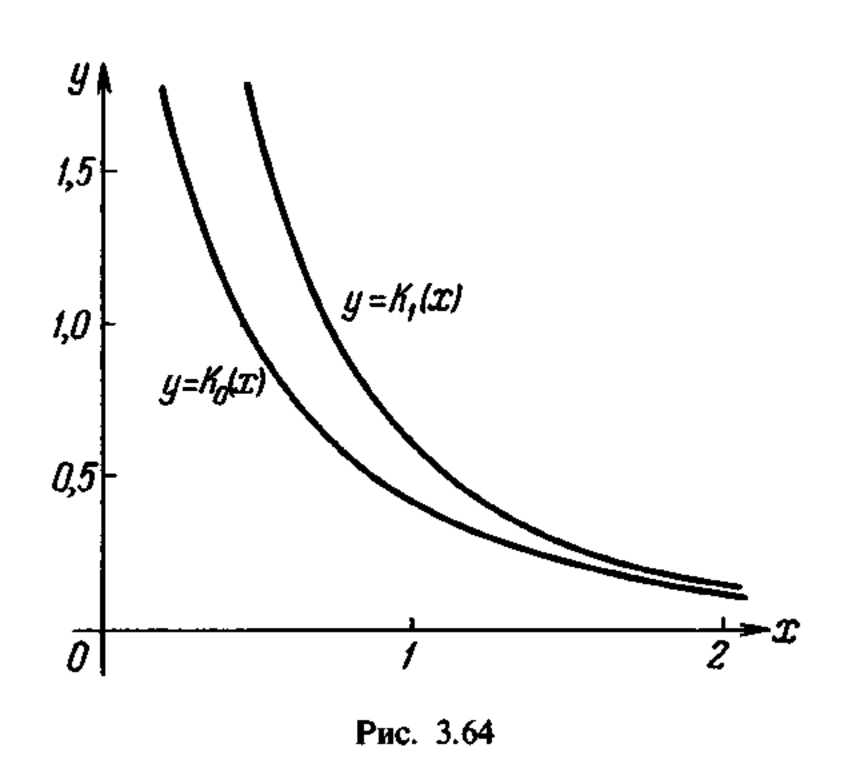


Рис. 3.64

Бесселя 2-го рода n-го порядка (или *функции Макдональда*)

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(n+k)!}(\Phi(k) + \Phi(n+k))\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

(n целое). Тогда функции

$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x)$ для нецелого n,

$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x)$ для целого n

дают общее решение уравнения

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)\,y = 0.$$

Графики функций I_0, I_1 и K_0, K_1 показаны на рис. 3.63 и 3.64.

Важнейшие формулы для функций Бесселя 1-го рода n-го порядка:

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x),$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x), \qquad (3.39)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x), \qquad (3.40)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x). \qquad (3.41)$$

Частный случай: $J_0'(x) = -J_1(x)$;

$$J_n(x) = \frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{(2n-1)/2} \cos(xt)\,dt.$$

Частный случай:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt.$$

Для целого n имеют место соотношения

$$x^{-n} J_n(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\cos(2nt)\,dt,$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin t)\sin((2n+1)t)\,dt,$$

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функции Бесселя при $n = 0, 1, 2, \ldots$ можно получить разложением известных функций в ряды Лорана:

$$\exp\left[x(t - t^{-1})/2\right] = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (t^n + (-t)^{-n})\,J_n(x),$$

или в ряды Фурье:

$$\cos(x\sin t) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2nt),$$

$$\sin(x\sin t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin((2n-1)t).$$

Сферические функции Бесселя $J_{\pm(n+1/2)}(x)$ можно выразить через элементарные функции:

$$J_m(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} (f_m(x)\sin x - g_m(x)\cos x),$$

$$J_m(x) = (-1)^{(2m-1)/2}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} (g_m(x)\sin x + f_m(x)\cos x)$$

(здесь $m = n + 1/2$; $n = 0, 1, 2, \ldots$), где

m	$f_m(x)$	$g_m(x)$
$\frac{1}{2}$	1	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{x}$	1
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{x^2} - 1$	$\frac{3}{x}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}$	$\frac{15}{x^2} - 1$
$\frac{9}{2}$	$\frac{105}{x^4} - \frac{45}{x^2} + 1$	$\frac{105}{x^3} - \frac{10}{x}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{945}{x^5} - \frac{420}{x^3} + \frac{15}{x}$	$\frac{945}{x^4} - \frac{105}{x^2} + 1$

Дальнейшие выражения можно получить из рекуррентных формул.

Для $Y_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ имеют место соотношения, аналогичные соотношениям (3.39), (3.40) и (3.41) для $J_n(x)$.

Важнейшие формулы для модифицированных функций Бесселя 1-го рода n-го порядка:

$$2nI_n(x) = x(I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)),$$

$$2nK_n(x) = x(K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x)),$$

$$2\frac{d}{dx}(I_n(x)) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x),$$

$$2\frac{d}{dx}(K_n(x)) = -K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^n I_n(x)) = x^n I_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^n K_n(x)) = -x^n K_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} I_n(x)) = x^{-n} I_{n+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} K_n(x)) = -x^{-n} K_{n+1}(x).$$

Частный случай:

$$I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x).$$

Для больших значений x справедливы следующие *асимптотические формулы*:

$$J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$Y_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$K_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

где $O(1/x)$ – бесконечно малая величина порядка $1/x$, т. е. $xO(1/x)$ остается ограниченной при $x \to \infty$.

Любая функция, которая является решением дифференциального уравнения Бесселя, называется *цилиндрической функцией* $Z_n(x)$ порядка n. Для $Z_n = J_n$, $Z_n = J_{-n}$ справедливы формулы

$$Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}Z_n(x) - Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x}Z_n(x) - \frac{d}{dx}Z_n(x) = -x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}Z_n(x)).$$

Гипергеометрическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$x(1-x)y'' + (c - (1+a+b)x)y' - aby = 0,$$

где a, b, c – постоянные. Регулярные особые точки:

$x = 0$, тогда $r_1 = 0$ и $r_2 = 1 - c$;

$x = \infty$, тогда $r_1 = a$ и $r_2 = b$;

$x = 1$, тогда $r_1 = 0$ и $r_2 = c - a - b$.

В окрестности регулярных особых точек общие решения имеют следующий вид:

1) В окрестности точки $x = 0$

$$y(x) = C_1F(a, b; c; x) + C_2x^{1-c}F(a-c+1; b-c+1; 2-c; x),$$

если $1 - c$ не нуль и не целое отрицательное число;

$$y(x) = C_1F(a, b; c; x) + C_2F\left[F(a, b; c; x)\ln x + \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r\right],$$

если $c = 1$ (числа a_r определяются из рекуррентных формул).

2) В окрестности точки $x = 1$

$$y(x) = C_1F(a, b; a+b-c+1; 1-x) + C_2(1-x)^{c-a-b}F(c-b, c-a; c-a-b+1; 1-x).$$

3) В окрестности $x = \infty$

$$y(x) = C_1x^{-a}F(a, a-c+1; a-b+1; 1/x) + C_2x^{-b}F(b, b-c+1; b-c+1; 1/x),$$

где $F(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty}((a)_k(b)_k/(k!(c)_k))x^k$ (числа $(a)_k$ определяются равенствами $(a)_0 = 1$ и $(a)_k = a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$ при $k > 0$). Этот ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$, если c не нуль и не целое отрицательное число; расходится при $|x| > 1$, если a и b не являются целыми и отрицательными, и при $|x| = 1$ ряд абсолютно сходится, если $c > a + b$. При $x = 1$ ряд расходится, если a и b не являются целыми и отрицательными, если $c \leqslant a + b$, при $x = -1$ ряд сходится условно, если $a + b - 1 < c \leqslant a + b$, и расходится при $c \leqslant -1 + a + b$.

Некоторые важные соотношения для гипергеометрической функции $F(a, b; c; x)$ ($|x| < 1$):

$$F(a, b; c; x) = F(b, a; c; x),$$

$$F(a, b; c; x) = (\Gamma(c)/(\Gamma(a)\Gamma(c-a)))\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt \quad (c > a > 0),$$

$$\frac{d}{dx}F(a, b; c; x) = \frac{ab}{c}F(a+1, b+1; c+1; x),$$

$$(c-a-1)F(a, b; c; x) + aF(a+1, b; c; x) - (c-1)F(a, b; c-1; x) = 0,$$

$$c[c-1+(1+a+b-2c)x]F(a, b; c; x) - c(c-1)(1-x)F(a, b; c-1; x) + (a-c)(b-c)xF(a, b; c+1; x) = 0,$$

$$F(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c; x),$$

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (c-a-b > 0, c-a > 0, c-b > 0).$$

При некоторых значениях параметров гипергеометрическая функция выражается через элементарные функции, например:

$$F(a, n; a; x) = (1-x)^{-n} \quad (a \text{ — произвольное}),$$

$$F(1, 1; 2; x) = -\frac{\ln(1-x)}{x},$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

Вырожденное гипергеометрическое дифференциальное уравнение:

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0,$$

или *уравнение Куммера.* Регулярная особая точка есть $x = 0$, причем $r_1 = 0$ и $r_2 = 1 - c$. В окрестности $x = 0$ общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1F(a; c; x) + C_2x^{1-c}F(a-c+1; 2-c; x)$$

для $c \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ Функция $F(a; c; x)$ называется *функцией Куммера* или *вырожденной гипергеометрической функцией.* Она разлагается в степенной ряд

$$F(a; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k k!}x^k,$$

сходящийся при всех x.

Некоторые важные соотношения для функции Куммера:

$$F(a; b; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}dt$$

для $c > a > 0$,

$$\frac{d^n}{dx^n}F(a; c; x) = \frac{(a)_n}{(c)_n}F(a+n; c+n; x),$$

$$aF(a+1; c+1; x) = cF(a; c; x) + (a-c)F(a; c+1; x),$$

$$F(a; c; x) = e^xF(c-a; c; -x), \quad F(c; c; x) = e^x.$$

Функции $F(a, b; c; x)$ и $F(a; c; x)$ — частные случаи *обобщенной гипергеометрической функции*

$${}_pF_q(a_1, a_2, \ldots, a_p; c_1, \ldots, c_q; x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{k!(c_1)_k\ldots(c_q)_k}x^k,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_q \neq 0, -1, -2, \ldots$ Поэтому можно записать

$$F(a, b; c; x) = {}_2F_1(a, b; c; x),$$

$$F(a; c; x) = {}_1F_1(a; c; x).$$

Существуют также обобщенные гипергеометрические функции нескольких переменных; например, для двух переменных:

$$F(a, b, b'; c; x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+l}(b)_k(b')_l}{k!l!(c)_{k+l}}x^ky^l.$$

Дифференциальное уравнение Лежандра для целых $n \geqslant 0$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Регулярные особые точки суть $x = -1$ с показателями $r_1 = r_2 = 0$ и $x = 1$ с показателями $r_1 = r_2 = 0$. Введением нового переменного $x = 1 - 2t$ уравнение Лежандра приводится к гипергеометрическому:

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-2t)\frac{dy}{dt} + n(n+1)y = 0,$$

где $a = n + 1$, $b = -n$ и $c = 1$. Таким образом, частное решение есть многочлен

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}\right),$$

так как $(-n)_m = 0$ для $m > n$. Многочлен $P_n(x)$ называется *многочленом Лежандра* степени n. Многочлен $P_n(x)$ — единственное линейно независимое

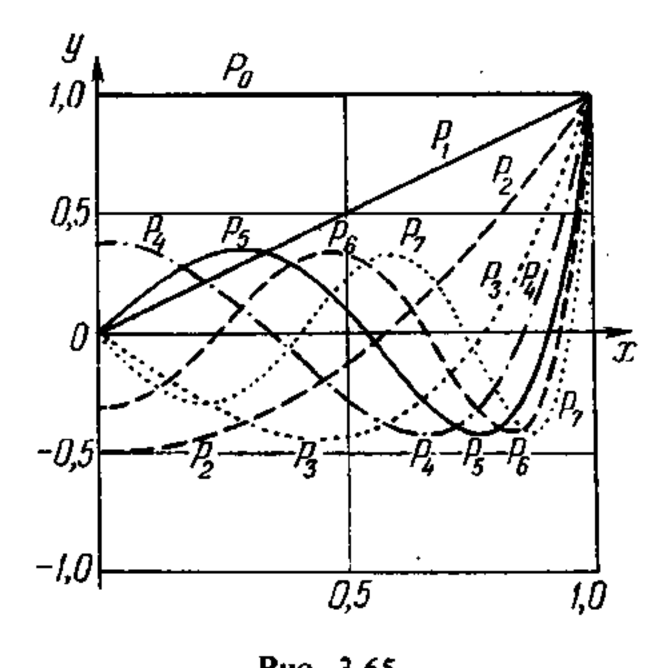


Рис. 3.65

решение уравнения Лежандра, ограниченное в точках $x = 1$ и $x = -1$. На рис. 3.65 изображены

графики первых восьми многочленов Лежандра:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$
$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

Важнейшие соотношения для многочленов Лежандра.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$$

есть многочлен n-й степени с коэффициентом $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ при старшей степени. Многочлен $P_n(x)$ имеет ровно n простых действительных корней в интервале $-1 < x < 1$.

Для многочленов Лежандра справедливы следующие формулы:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x \pm (x^2 - 1)^{1/2}\cos t)^n\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dt}{(x \pm (x^2 - 1)^{1/2}\cos t)^{n+1}} \quad \text{(знак любой)},$$

$$(n + 1) P_{n+1}(x) = (2n + 1) x P_n(x) - nP_{n-1}(x),$$
$$\frac{d}{dx}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = (2n + 1) P_n(x),$$

$$(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(P_n(x)) = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)),$$

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x)\, dx = \frac{2}{2m + 1}\delta_{nm},$$

где

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Многочлены Лежандра можно получить разложением функции $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ в ряд по степеням z:

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} =$$
$$= P_0(x) + P_1(x) z + P_2(x) z^2 + \ldots \quad (|z| < 1).$$

Если $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция при $-1 < x < 1$, то разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{2k + 1}{2}\right)^{1/2} P_k(x),$$

где $c_k = \left(\frac{2k + 1}{2}\right)^{1/2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx$, сходится абсолютно и равномерно на интервале $(-1, 1)$.

Функции, связанные с многочленами Лежандра $P_n(x)$ соотношениями

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}(P_n(x))$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, \ldots, n),$$

называются *присоединенными функциями Лежандра*. Функции $P_n^m(x)$ удовлетворяют уравнению

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \left(n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) y = 0.$$

Справедливы равенства

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_{n'}^m(x)\, dx = \frac{(n + m)!}{(n - m)!}\,\frac{2}{2n + 1}\,\delta_{nn'}$$

при $n,\ n' \geqslant m \geqslant 0$,

$$\int_0^1 (P_n^m(x))^2\, dx = \frac{(n + m)!}{(n - m)!}\,\frac{1}{2n + 1}$$

при $n = 0, 1, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, n$,

$$\int_0^1 \frac{(P_n^m(x))^2}{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2m}\,\frac{(n + m)!}{(n - m)!}$$

при $n = 0, 1, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, n$.

Система присоединенных (для каждого $m \geqslant 0$) функций Лежандра $P_n^m(x)$ $(n = m,\ m + 1,\ \ldots)$ полна в $L_2(-1, 1)$.

Примеры присоединенных функций Лежандра ($P_n^0(x) = P_n(x)$, $P_n^m(x) = 0$ для $m > n$):

$$P_1^1(x) = -(1 - x^2)^{1/2} = -\sin\theta,$$
$$P_2^1(x) = -3x(1 - x^2)^{1/2} = -\frac{3}{2}\sin 2\theta,$$
$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta),$$
$$P_3^1(x) =$$
$$= -\frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2} = -\frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin^3\theta),$$
$$P_3^2(x) = 15x(1 - x^2) = \frac{15}{4}\cos\theta(\cos\theta - \cos 3\theta),$$
$$P_3^3(x) = -15(1 - x^2)(1 - x^2)^{1/2} =$$
$$= -\frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta),$$

где $x = \cos\theta$. Вообще

$$P_n^n(x) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(1-x^2)^{n/2} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\sin^n\theta$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$

3.3.1.4. Общие нелинейные дифференциальные уравнения. Общее уравнение имеет вид

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши решается сведением рассматриваемого уравнения к системе дифференциальных уравнений и применением к ней теоремы существования и единственности п. 3.3.1.1.

Частный случай: уравнение $y^{(n)}(x) = f(x)$.

Общее решение находят путем последовательного интегрирования:

$$y(x) = C_1 + C_2(x-x_0) + \ldots + C_n(x-x_0)^{n-1} + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\ldots\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(t)\,dt\,dx_{n-1}\ldots dx_2\,dx_1;$$

при помощи формулы Коши последнее слагаемое можно записать в следующем виде:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\ldots\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(t)\,dt\,dx_{n-1}\ldots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

В этих выражениях x_0 не является дополнительной постоянной: если в x_0 заданы $y(x_0)$, $y'(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$, то

$$C_k = \frac{1}{(k-1)!}\,y^{(k-1)}(x_0), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пример 37. Решить уравнение $y''' = \ln x$ при условиях $y(1) = y_0$, $y'(1) = y_0'$, $y''(1) = y_0''$.

Частное решение дается формулой

$$y(x) = y_0 + \frac{(x-1)}{1!}y_0' + \frac{(x-1)^2}{2!}y_0'' + \frac{1}{2}\int_1^x (x-t)^2\ln t\,dt = y_0 + \frac{(x-1)}{1!}y_0' + \frac{(x-1)^2}{2!}y_0'' + \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{18};$$

и общее решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3 + C_1 + C_2x + C_3x^2.$$

Пусть левая часть уравнения $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ не зависит явно от y и его производных до $k-1$-го порядка включительно. Заменой $y^{(k)} = z$ это уравнение приводят к уравнению $n-k$-го порядка.

Пример 38. $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$. Замена $y'' = z(x)$ приводит к уравнению Клеро $z - xz' + (z')^3 = 0$. Его общее решение есть $z = C_1x - C_1^3$. Отсюда следует, что $y(x) = C_1\frac{x^3}{6} - C_1^3\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$. Особое решение уравнения Клеро $z = \frac{2\sqrt{3}}{9}x^{3/2}$ дает особое решение исходного уравнения

$$y(x) = \frac{8\sqrt{3}}{315}x^{7/2} + C_1x + C_2.$$

Пусть левая часть уравнения $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ не зависит явно от x. Подстановкой $y' = p(y)$, где y рассматривается как новое независимое переменное, можно свести такое уравнение к дифференциальному уравнению $n-1$-го порядка, так как $\frac{d^ky}{dx^k}$ выражается только через p, $\frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$. В частности,

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \ldots$$

Пример 39. $y^2(y-1)y'' - (y')^3 - y(y-2)(y')^2 = 0$. Преобразованное уравнение имеет вид

$$y^2(y-1)p\frac{dp}{dy} - p^3 - y(y-2)p^2 = 0.$$

Разделив на p (при этом $p = 0$, т. е. $y = C$, является решением), получим дифференциальное уравнение Бернулли (см. пример 11), решение которого имеет вид

$$p = \frac{y^2}{1 + C_1(y-1)}, \text{ т. е. } y' = \frac{y^2}{1 + C_1(y-1)}.$$

После интегрирования приходим к общему интегралу исходного уравнения

$$C_1\ln y - (1 - C_1)\frac{1}{y} = x + C_2.$$

Уравнение $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, в котором f — однородная функция относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, допускает понижение порядка введением новой неизвестной функции $z = y'/y$.

Пример 40. $x^2yy'' = (y - xy')^2$. При замене $z = (\ln y)' = y'/y$ получается линейное уравнение $x^2z' + 2xz = 1$, решение которого имеет вид $z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Общее решение исходного уравнения получим, учитывая, что $(\ln y)' = z$. Тогда $y = C_2e^{\int z(x)dx}$, или $y = C_2xe^{-C_1/x}$.

В уравнении $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, левая часть которого является полной производной, можно понизить порядок.

Пример 41. $y'' - xy' - y = 0$. Так как $\frac{d}{dx}(y' - xy) = y'' - xy' - y = 0$, то $y' - xy = C_1$, откуда

$$y = e^{x^2/2}\left(C_1\int e^{-x^2/2}dx + C_2\right).$$

Пример 42. $yy'' = 2(y')^2$. Умножение обоих частей уравнения на $(yy')^{-1}$ приводит к уравнению $(\ln y')' = (\ln y^2)'$, откуда $\ln y' = \ln y^2 + \ln C_1$, или $y' = C_1y^2$. Общим решением исходного уравнения будет $y = -(C_1x + C_2)^{-1}$.

3.3.1.5. Устойчивость. Пусть $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — система обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть функции f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеют непрерывные частные производные 1-го порядка. Обозначим через $x_i = x_i(t; t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ решение данной системы с начальными значениями x_i^0 при $t = t^0$, т. е. $x_i^0 = x_i$

$(t^0;\ t^0,\ x_1^0,\dots,x_n^0)$. Каждое частное решение системы может быть истолковано как координата движущейся материальной точки (в n-мерном пространстве), зависящая от времени t.

Движение точки с координатами $x_i = x_i(t;\ t^0,\ x_1^0,\dots,x_n^0)$ называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $|x_i^0 - \tilde{x}_i^0| < \delta$ $(i = 1,\dots,n)$ в промежутке $t^0 \leqslant t < \infty$ справедливо неравенство

$$|x_i(t;\ t^0,\ x_1^0,\dots,x_n^0) - x_i(t;\ t^0,\ \tilde{x}_1^0,\dots,\tilde{x}_n^0)| < \varepsilon$$
$$(i = 1,\dots,n).$$

Каждое движение, которое не является устойчивым, называется *неустойчивым*. Решение $x_i = x_i(t;\ t^0,\ x_1^0,\dots,x_n^0)$ называется *невозмущенным*, а $x_i = x_i(t;\ t^0,\ \tilde{x}_1^0,\dots,\tilde{x}_n^0)$ — *возмущенным движением*. Геометрически устойчивость означает, что в каждый момент времени $t \geqslant t^0$ точка траектории возмущенного движения лежит в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущенного движения.

Посредством замены $x_i = \bar{x}_i + x_i(t)$, где $x_i(t) = x_i(t;\ t^0,\ x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$, введем новые координаты $\bar{x}_1,\ \dots,\ \bar{x}_n$. Невозмущенное движение в новых координатах описывается уравнениями $\bar{x}_i(t) = 0$ $(i = 1,\dots,n)$. Пусть эта замена произведена и требуется исследовать устойчивость тривиального решения $\bar{x}_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\dots,n)$ в смысле Ляпунова, т. е. требуется исследовать, находится ли точка, соответствующая возмущенному движению, в ε-окрестности нуля при $t^0 \leqslant t < \infty$. В дальнейшем преобразованную систему будем записывать без черточек над x_i. Тогда для правых частей системы справедливо равенство $f_i(t;\ 0,\dots,0) = 0$. Система $\frac{dx_i}{dt} = f_i(i = 1,\dots,n)$ может быть представлена в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i(t;\ x_1,\ \dots,\ x_n) \quad (i = 1,\ \dots,\ n),$$

причем $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t;\ 0,\dots,0) = \text{const}$ $(i, j = 1,\dots,n)$, т. е. a_{ij} не зависит от t. Система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,\dots,n)$$

называется системой, *линеаризованной* по отношению к $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i$.

Достаточное условие устойчивости тривиального решения дает следующая теорема. Пусть

1) все корни характеристического уравнения линеаризованной системы $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j$, т. е. корни уравнения $\det(a_{ij} - r\delta_{ij}) = 0$, имеют отрицательную действительную часть;

2) все функции $\varphi_i(t;\ x_1,\ x,\dots,x_n)$ удовлетворяют условию $|\varphi_i(t;\ x_1,\dots,x_n)| \leqslant M\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2+\alpha}$, причем M — постоянная и $\alpha > 0$. Тогда тривиальное решение системы $\frac{dx_i}{dt} = f_i$ $(i = 1,\ 2,\dots,n)$ устойчиво. Кроме того, справедливо следующее утверждение: если хотя бы один корень характеристического уравнения $\det(a_{ij} - r\delta_{ij}) = 0$ имеет положительную действительную часть и φ_i удовлетворяют условию 2), то тривиальное решение системы $\frac{dx_i}{dt} = f_i$ неустойчиво.

Важно определить, имеет ли характеристическое уравнение корни с отрицательными действительными частями. Для этого используется следствие из *критерия Рауса — Гурвица*: все корни уравнения

$$f(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 \quad (a_0 > 0)$$

имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда положительны все определители

$$D_1 = a_1,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(где полагают $a_m = 0$ при $m > n$).

3.3.1.6. Операторный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод состоит в том, что посредством интегрального преобразования от дифференциального уравнения переходят к вспомогательному алгебраическому уравнению. Затем находят решения преобразованного уравнения и из них при помощи обратного преобразования получают решения заданного дифференциального уравнения.

В качестве интегрального преобразования часто используют *преобразование Лапласа*

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Сведения об условиях, при которых *изображение* $F(p)$ существует, о свойствах преобразования Лапласа и таблицу изображений можно найти в разделе об интегральных преобразованиях (см. 4.4.3).

Применение операторного метода к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть требуется найти решение задачи Коши

$$Q_n\left(\frac{d}{dt}\right)y = f(t),$$

где

$$Q_n\left(\frac{d}{dt}\right)y = \left(a_0\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n\right)y(t),$$
$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\dots,y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)},$$

a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ – постоянные. Преобразованием Лапласа сведем данное уравнение, используя обозначения $L\{y(t)\} = Y(p)$ и $L\{f(t)\} = F(p)$, к вспомогательному уравнению

$$Q_n(p)\,Y(p) =$$
$$= a_0(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_0' + \ldots + py_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)}) +$$
$$+ a_1(p^{n-2}y_0 + p^{n-3}y_0' + \ldots + py_0^{(n-3)} + y_0^{(n-2)}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}y_0 + F(p),$$

или $Q_n(p)\,Y(p) = M(p) + F(p)$, где $Q_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$. Решение полученного уравнения имеет вид

$$Y(p) = \frac{M(p)}{Q_n(p)} + \frac{F(p)}{Q_n(p)}.$$

Обратное преобразование, проведенное только для второго слагаемого, дает решение дифференциального уравнения с нулевыми начальными значениями.

Пример 43. $y''' - 3y'' + y' - 3y = 6e^{3t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. В этом случае $F(p) = L(6e^{3t}) = \frac{6}{p-3}$, и решение вспомогательного уравнения имеет вид

$$Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 2}{p^3 - 3p^2 + p - 3} + \frac{6}{(p-3)(p^3 - 3p^2 + p - 3)}.$$

Для вычисления обратного преобразования $V(p)$ раскладываем правую часть на простейшие дроби:

$$Y(p) = \frac{1}{25}\left(\frac{29p - 3}{p^2 + 1} + \frac{15}{(p-3)^2} - \frac{4}{p-3}\right).$$

При помощи таблицы преобразования Лапласа по этому изображению находим оригинал (см. 4.4.3.3):

$$y(t) = \frac{3}{5}te^{3t} - \frac{4}{25}e^{3t} + \frac{29}{25}\cos t - \frac{3}{25}\sin t.$$

Применение операторного метода к решению линейных систем с постоянными коэффициентами. Дана задача Коши

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k'(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y(t) = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i(0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при условии $\det(a_{ik}) \neq 0$. Применяя к этой системе преобразование Лапласа, получим для преобразованных функций $Y_i(p) = L(y_i(t))$ систему

$$\sum_{k=1}^{n} (pa_{ik} + b_{ik})\,Y_k(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_{k0},$$

где $F_i(p) = L(f_i(t))$. Из этой вспомогательной системы находим $Y_k(p)$, производим обратное преобразование и получаем, таким образом, решение задачи Коши.

Пример 44. Найти общее решение системы

$$y_1' - y_1 + y_2 = t, \qquad y_2' - 4y_1 + 3y_2 = 2.$$

Положим $y_1(0) = C_1$, $y_2(0) = C_2$, решим вспомогательную систему

$$(p-1)\,Y_1(p) + \qquad Y_2(p) = \frac{1}{p^2} + C_1,$$

$$-4Y_1(p) + (p+3)\,Y_2(p) = \frac{2}{p} + C_2$$

относительно $Y_1(p)$ и $Y_2(p)$; получим, что

$$Y_1(p) = \frac{C_1p^3 + (3C_1 - C_2)p^2 - p + 3}{p^2(p+1)^2},$$

$$Y_2(p) = \frac{C_2p^3 + (2 - C_2 + 4C_1)p^2 - 2p + 4}{p^2(p+1)^2}.$$

Проведя обратное преобразование, получим общее решение

$$y_1(t) = 3t - 7 + e^{-t}((4 + 2C_1 - C_2)t + 7 + C_1),$$

$$y_2(t) = 4t - 10 + e^{-t}((8 - 2C_2 + 4C_1)t + 10 + C_2.$$

3.3.1.7. Краевые задачи и задачи о собственных значениях. Во многих случаях необходимо решать не задачу Коши для дифференциальных уравнений, а искать решение рассматриваемого уравнения, которое в граничных точках отрезка, заданного в области изменения независимых переменных, удовлетворяет определенным условиям, – решать так называемые *краевые задачи.*

Простейшие примеры.

а) Решить уравнение $y'' + y = 0'$ с краевыми условиями $y(0) = y(\pi) = 0$. Эта задача имеет одно нетривиальное решение $y(x) = \sin x$.

б) Решить уравнение $y'' + ay = 0$ с краевыми условиями $y(0) = y(\pi) = 0$. Нетривиальное решение существует только для неотрицательных a, являющихся квадратами целых чисел.

в) Решить уравнение $y'' + y = 0$ с краевыми условиями $y(0) = y(2\pi)$ и $y'(0) = y'(2\pi)$. Имеется два линейно независимых решения: $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = \cos x$.

3.3.1.7.1. Краевые задачи. Функция Грина. Требуется найти на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ решение $y(x)$ следующей *краевой задачи*:

$$L[u] = g(x),$$

$$\text{где } L[u] = f_0(x)y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y$$

(f_0 не обращается в нуль; функции f_0, f_1, f_2, g непрерывны на $a \leqslant x \leqslant b$), с краевыми условиями

$$u_1[y] = h_1, \qquad u_2[y] = h_2,$$

где

$$u_1[y] = a_1^1\,y(a) + a_1^2y'(a) + b_1^1y(b) + b_1^2y'(b),$$

$$u_2[y] = a_2^1y(a) + a_2^2y'(a) + b_2^1y(b) + b_2^2y'(b).$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rang}(A \mid B) = 2;$$

a_i^j, b_i^j и h_i – действительные числа.

Полагая $g(x) = 0$ и $h_1 = h_2 = 0$, получаем *однородную краевую задачу*, которая соответствует данной *неоднородной краевой задаче*. Однородная краевая задача всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородной задачи, то $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ – также решение.

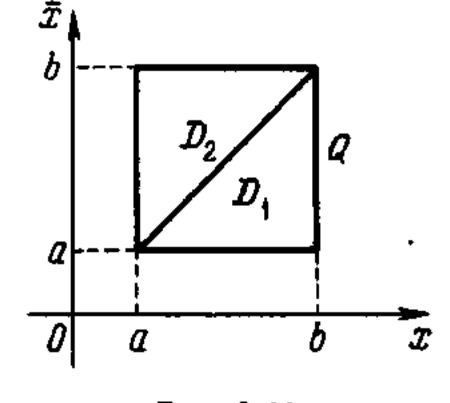


Рис. 3.66

Определение функции Грина $G(x, \bar{x})$ сформулированной краевой задачи (рис. 3.66). Пусть $G(x, \bar{x})$ – функция, определенная в $Q = \{(x, \bar{x}) \mid a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant \bar{x} \leqslant b\}$, со следующими свойствами:

а) В каждом из обоих треугольников $D_1 = \{(x, \bar{x}) \mid a \leqslant \bar{x} \leqslant x \leqslant b\}$ и $D_2 = \{(x, \bar{x}) \mid a \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant b\}$ функция $G(x, \bar{x})$ дважды непрерывно дифференцируема по x и удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$f_0 y'' + f_1 y' + f_2 y = 0.$$

б) Функция $G(x, \bar{x})$ непрерывна в Q.

в) В интервале $a < \bar{x} < b$ справедливо равенство

$$\frac{\partial G(\bar{x}+0, \bar{x})}{\partial x} - \frac{\partial G(\bar{x}-0, \bar{x})}{\partial x} = \frac{1}{f_0(\bar{x})}.$$

г) В интервале $a < \bar{x} < b$ функция $G(x, \bar{x})$, как функция x, удовлетворяет однородным краевым условиям $u_1[G] = 0$ и $u_2[G] = 0$.

Нахождение функции Грина. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения $L[y] = 0$, то положим

$$G(x, \bar{x}) = \begin{cases} A_1(\bar{x}) y_1(x) + A_2(\bar{x}) y_2(x) \text{ в } D_2, \\ B_1(\bar{x}) y_1(x) + B_2(\bar{x}) y_2(x) \text{ в } D_1 \end{cases}$$

и определим $A_1(\bar{x})$, $A_2(\bar{x})$, $B_1(\bar{x})$ и $B_2(\bar{x})$ так, чтобы удовлетворялись требования а) – г). Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то функция Грина существует и определена однозначно.

Решение неоднородной краевой задачи $L[z_1] = g(x)$ при условии $u_1[z_1] = u_2[z_1] = 0$ получают при помощи функции Грина

$$z_1(x) = \int_a^b G(x, \bar{x}) g(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

Решение уравнения $L[z_2] = 0$ при условии $u_1[z_2] = h_1$, $u_2[z_2] = h_2$ получают, предполагая, что $z_2(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, и определяя C_1 и C_2 из краевых условий. Решение u исходной задачи равно $z_1 + z_2$. Таким образом, имеет место следующее утверждение: если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то неоднородная краевая задача разрешима однозначно.

Пример 45. Требуется решить краевую задачу $y'' + k^2 y = x$ при условии $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ $(0 < k < \pi)$.

Вычислим сначала функцию Грина $G(x, \bar{x})$ поставленной краевой задачи. Однородная краевая задача $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ имеет только тривиальное решение; $y_1(x) = \sin kx$, $y_2(x) = \cos kx$ – два линейно независимых решения уравнения $y'' + k^2 y = 0$. Определим функцию Грина, положив

$$G(x, \bar{x}) = \begin{cases} A_1(\bar{x}) \sin kx + A_2(\bar{x}) \cos kx \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant 1 \ (D_2), \\ B_1(\bar{x}) \sin kx + B_2(\bar{x}) \cos kx \text{ для } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant x \leqslant 1 \ (D_1). \end{cases}$$

Условие а) для функции Грина выполнено по построению функции $G(x, \bar{x})$. Условия б) и в) приведем к уравнениям

$$A_1(\bar{x}) - B_1(\bar{x}) = -\frac{1}{k} \cos k\bar{x}, \quad A_2(\bar{x}) - B_2(\bar{x}) = \frac{1}{k} \sin k\bar{x}.$$

Из г) получаем, что

$$B_2(\bar{x}) = -\frac{1}{k} \sin k\bar{x} \text{ и } A_2(\bar{x}) = 0,$$

$$B_1(\bar{x}) = \frac{\sin k\bar{x} \cos k}{k \sin k}$$

и

$$A_1(\bar{x}) = \frac{\sin k\bar{x} \cos k}{k \sin k} - \frac{1}{k} \cos k\bar{x}.$$

Поэтому функция Грина имеет вид

$$G(x, \bar{x}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin k\bar{x} \cos k}{k \sin k} - \dfrac{1}{k} \cos k\bar{x}\right) \sin kx \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant 1, \\ \left(\dfrac{\sin kx \cos k}{k \sin k} - \dfrac{1}{k} \cos kx\right) \sin k\bar{x} \text{ для } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

или

$$G(x, \bar{x}) = \begin{cases} -\dfrac{\sin kx \sin k(1-\bar{x})}{k \sin k} \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant 1, \\ -\dfrac{\sin k\bar{x} \sin k(1-x)}{k \sin k} \text{ для } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Для решения задачи с однородными краевыми условиями $y'' + k^2 y = x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ находим

$$z_1(x) = \int_0^1 G(x, \bar{x}) \bar{x}\, dx = -\int_0^x \frac{\sin k\bar{x} \sin k(1-x)}{k \sin k} \bar{x}\, d\bar{x} - \int_x^1 \frac{\sin kx \sin k(1-\bar{x})}{k \sin k} \bar{x}\, d\bar{x} = \frac{x}{k^2} - \frac{\sin kx}{k^2 \sin k}.$$

Для решения задачи $y'' + k^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ предполагаем, что $z_2(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$, причем C_1 и C_2 надо определить из условий $z_2(0) = 1$ и $z_2(1) = 2$. Получаем

$$z_2(x) = \frac{2 - \cos k}{\sin k} \sin kx + \cos kx.$$

Тогда решение поставленной краевой задачи имеет вид

$$y(x) = z_1(x) + z_2(x) = \frac{x}{k^2} + \left[\frac{2 - \cos k}{\sin k} - \frac{1}{k^2 \sin k}\right] \sin kx + \cos kx.$$

Пусть в дальнейшем выполнены следующие условия: функция f_0 дважды непрерывно дифференцируема, f_1 непрерывно дифференцируема и f_2 непрерывна на рассматриваемом отрезке. Тогда оператор L^*, определенный формулой

$$L^*[y] = (f_0 y)'' - (f_1 y)' + f_2 y,$$

называется *дифференциальным оператором, сопряженным к* L. Для этого дифференциального оператора имеет место следующая *формула Грина*, справедливая для любых дважды непрерывно дифференциальных функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$\int_a^b \{zL[y] - yL^*[z]\}\, dx = [f_0 z y' - y(z f_0)' + f_1 z y]\,\big|_a^b.$$

Если $L[y] = L^*[y]$, то L называется *самосопряженным* оператором. Это имеет место тогда, когда выполняется соотношение $f_0' = f_1$. Формула Грина превращается в этом случае в

$$\int_a^b \{zL[y] - yL[z]\}\, dx = [f_0(zy' - yz')]\,\big|_a^b.$$

Краевая задача называется *самосопряженной*, если

а) $L \equiv L^*$;

б) для каждой системы значений

$$\{y(a), y'(a), y(b), y'(b);\ z(a), z'(a), z(b), z'(b)\},$$

для которой $U_i[y] = 0$ и $U_i[z] = 0$ $(i = 1, 2)$, выполняется условие

$$[f_0(zy' - yz')]\,\big|_a^b = 0.$$

Примеры функций Грина линейных краевых задач Таблица 3.5

$L[y]$	$(a,\ b)$	Краевые условия	$G(x,\ \bar{x})$ $(a < x < \bar{x} < b)$ $G(\bar{x},\ x)$ $(a < \bar{x} < x < b)$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$(0,\ 1)$	$y(0)=0$ $y(1)=0$	$-(1-\bar{x})x$
		$y(0)=0$ $y'(1)=0$	$-x$
		$y(0)+y(1)=0$ $y'(0)+y'(1)=0$	$-\frac{1}{2}(x-\bar{x})-\frac{1}{4}$
	$(-1,\ 1)$	$y(-1)=0$ $y(1)=0$	$\frac{1}{2}(x\bar{x}+\bar{x}-x-1)$
	$(0,\ 1)$	$y'(0)+y(1)=0$ $y'(1)=0$	$G(x,\ \bar{x})=\begin{cases}1+\bar{x}-x, & x<\bar{x}\\ 1, & x\geqslant\bar{x}\end{cases}$
$\frac{d^2y}{dx^2}-y$	$(-\infty,\ \infty)$	y ограничено в $(-\infty,\ \infty)$	$-\frac{1}{2}e^{x-\bar{x}}$
$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y$	$(0,\ 1)$	$y(0)=0$ $y(1)=0$	$-\frac{\sin kx\sin k(1-\bar{x})}{k\sin k}$
	$(-1,\ 1)$	$y(-1)-y(1)=0$ $y'(-1)-y'(1)=0$	$\frac{\cos k(x-\bar{x}+1)}{2k\sin k}$
$\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y$	$(0,\ 1)$	$y(0)=0$ $y(1)=0$	$-\frac{\operatorname{sh}kx\operatorname{sh}k(1-\bar{x})}{k\operatorname{sh}k}$
$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{n^2}{x}y$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$	$(0,\ 1)$	y ограничено в окрестности нуля $y(1)=0$	$\ln\bar{x}$ для $n=0$, $-\frac{1}{2n}\left(\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^n-(x\bar{x})^n\right)$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$
$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right)-\frac{n^2}{1-x^2}y$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$	$(-1,\ 1)$	y ограничено в окрестности точек 1 и -1	$-\frac{1}{2n}\left(\frac{1+x}{1-x}\ \frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)^{n/2}$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$

Условия $L\equiv L^*$ и $f_0(a)\det B-f_0(b)\det A=0$ необходимы и достаточны для того, чтобы заданная краевая задача была самосопряженной. Второе условие выполнено, если краевые условия имеют следующий специальный вид *(краевые условия Штурма)*:

$$U_1[y]=a_1^1y_1(a)+a_1^2y_1'(a),$$
$$U_2[y]=b_2^1y_1(b)+b_2^2y_2'(b).$$

Функция Грина самосопряженной краевой задачи симметрична, т. е. $G(x,\ \bar{x})=G(\bar{x},\ x)$.

Пример 46. **Краевая задача $y''+k^2y=x$, $y(0)=1$, $y(1)=2$ является самосопряженной. Во-первых, справедливо соотношение $L[y]=y''+k^2y=L^*[y]$, во-вторых,**

$$\det A=\det\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=0,\ \det B=\det\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0,$$

и, таким образом, $\det B-\det A=0$. Функция Грина, вычисленная в примере 45, является симметричной:

$$G(x,\ \bar{x})=\begin{cases}-\dfrac{\sin kx\sin k(1-\bar{x})}{k\sin k} & \text{для } 0\leqslant x\leqslant\bar{x}\leqslant 1,\\[2ex] -\dfrac{\sin k\bar{x}\ \sin k(1-x)}{k\sin k} & \text{для } 0\leqslant\bar{x}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

3.3.1.7.2. Задача о собственных значениях. Пусть краевая задача $L[y]=0$ при условии $U_i[y]=0$ $(i=1,\ 2)$ самосопряжена.

Задача. Требуется найти нетривиальные решения (т. е. решения $y(x)\not\equiv 0$) *однородной задачи о собственных значениях* для уравнения $L[y]+\lambda y=$ $=(f_0y')'+f_2y+\lambda y=0$ (λ – комплексное число) при условии, что $U_i[y]=0$ $(i=1,\ 2)$.

Каждое такое решение $y(x)$ называется *собственной функцией*, соответствующей собственному значению λ.

Если $\lambda=0$ не является собственным значением, т. е. при $\lambda=0$ имеется единственное решение $y(x)\equiv 0$, то существует функция Грина $G(x,\ \bar{x})$, и поставленную задачу можно свести к интегральному уравнению с симметричным ядром

$$y(x)=-\lambda\int_a^b G(x,\ \bar{x})\,y(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Свойства собственных значений и собственных функций.

1. Собственные значения действительны, и для каждого собственного значения существует

максимум две линейно независимые собственные функции.

2. Для двух собственных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующих различным собственным значениям, справедливо равенство

$$\int_a^b y_1(x)\,y_2(x)\,dx = 0 \text{ (ортогональность).}$$

3. Собственные значения краевой задачи образуют последовательность действительных чисел

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

стремящуюся к бесконечности.

Пусть собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ соответствуют собственные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots$ Пусть при этом λ_i записано столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Методом ортогонализации можно добиться того, чтобы

$$\int_a^b y_i(x)\,y_j(x)\,dx = \delta_{ij}.$$

4. Каждую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $z(x)$ при условии $U_i[z] = 0$ ($i = 1, 2$) можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям задачи о собственных значениях:

$$z(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu y_\nu(x), \text{ где } C_\nu = \int_a^b z(x)\,y_\nu(x)\,dx.$$

Для *неоднородной задачи* о собственных значениях

$$L[y] + \lambda y = f, \text{ где } U_i[y] = 0 \; (i = 1, 2), \quad (3.42)$$

справедлива следующая *альтернативная теорема.*

а) Если λ не является собственным значением соответствующей однородной задачи о собственных значениях, то задача (3.42) разрешима однозначно.

б) Если λ – собственное значение, то задача (3.42) разрешима тогда и только тогда, когда для собственных функций $y(x)$, соответствующих λ, справедливо равенство $\int_a^b f(x)\,y(x)\,dx = 0$. При этом задача (3.42) разрешима неоднозначно, так как наряду с $u(x)$ решением является также $u(x) + Cy(x)$, где $y(x)$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению λ, C – произвольная постоянная.

Функция $z(x)$ называется *допустимой*, если $z(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и выполняется условие $U_i[z] = 0$ ($i = 1, 2$). Краевая задача называется *определенной*, если для каждой допустимой функции $z(x)$ справедливо неравенство

$$\int_a^b z(x)\,L[z](x)\,dx \leqslant 0.$$

Например, задача о краевых значениях

$$L[y] = (f_0 y')' + f_2 y, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

где $f_0 > 0$ и $f_2 < 0$, является определенной, так как

$$\int_a^b zL[z]\,dx = -\int_a^b f_0(z')^2\,dx + \int_a^b f_2 z^2\,dx \leqslant 0.$$

Все собственные значения определенной задачи о собственных значениях положительны (если $\lambda = 0$ не является собственным значением). Собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ соответствуют собственные функции $y_1, y_2, \ldots, y_l$ (одному собственному значению могут соответствовать две собственные функции). Для собственного значения λ_{k+1} определенной задачи о собственных значениях справедлива оценка

$$\lambda_{k+1} \leqslant -\frac{\int_a^b zL[z]\,dx}{\int_a^b z^2\,dx}$$

для всех допустимых функций z, удовлетворяющих условиям $\int_a^b y_i z\,dx = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, l$.

Собственные значения и собственные функции *задачи Штурма – Лиувилля*

$$L[y] = -(f_0 y')' - f_1 y = \lambda g y, \quad x \in (a, b),$$

где функции f_0, f_1, g дифференцируемы на (a, b), а f_0 и g положительны, при условии, что

$$\begin{aligned} U_1[y] &= a^1 y(a) + a^2 y'(a) = 0, \\ U_2[y] &= b^1 y(b) + b^2 y'(b) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

или

$$\begin{aligned} U_1[y] &= y(a) - y(b) = 0, \\ U_2[y] &= y'(a) - y'(b) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

(*условия периодичности*), обладают следующими свойствами помимо приведенных выше для общих задач.

1. При краевых условиях (3.43) каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция. При краевых условиях (3.44) могут существовать две линейно независимые собственные функции, принадлежащие одному собственному значению (см. пример в) в начале 3.3.1.7).

2. При условиях $g > 0$, $f_0 > 0$, $f_1 \leqslant 0$, $a^1 a^2 \leqslant 0$, $b^1 b^2 \geqslant 0$, $(a^1)^2 + (a^2)^2 > 0$ все собственные значения положительны, исключая случай $f_1(x) \equiv 0$, $a^1 = b^1 = 0$, в котором $\lambda = 0$ есть собственное значение с собственной функцией $y(x) = \text{const}$.

3. Если заменить f_0 и f_1 функциями $\bar f_0$, $\bar f_1$ такими, что $\bar f_0 \geqslant f_0$, $\bar f_1 \geqslant f_1$ ($\bar f \leqslant f_0$, $\bar f_1 \leqslant f_1$), то соответствующие собственные значения возрастут, т. е. $\bar\lambda_k \geqslant \lambda_k$ (уменьшатся, т. е. $\bar\lambda_k \leqslant \lambda_k$). Неравенство $\bar g \leqslant g$ порождает неравенство $\bar\lambda_k \geqslant \lambda_k$, а неравенство $\bar g \geqslant g$ – неравенство $\bar\lambda_k \leqslant \lambda_k$.

4. Расширение интервала $(a; b)$ ведет к уменьшению собственных значений, соответствующих краевым условиям $y(a) = y(b) = 0$ или краевым условиям $y'(a) = y'(b) = 0$.

5. Каждое собственное значение, которое соответствует краевым условиям

$$a^1 y(a) + a^2 y'(a) = a^1 y(b) + a^2 y'(b) = 0,$$

где $a^1/a^2 \geqslant 0$, есть неубывающая функция a^1/a^2.

3.3.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.3.2.1. Основные понятия и специальные методы решения. Пусть дано соотношение

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n}, u''_{x_1x_1}, u''_{x_1x_2}, \ldots, u''_{x_nx_n}, \ldots) = 0.$$

При этом F – функция указанных аргументов x_j, u, u'_{x_j}, $u''_{x_jx_k}$, ... (j, $k = 1, 2, \ldots, n$). Ищется функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая этому соотношению, т. е. такая, что F обращается в нуль тождественно по $x_1, \ldots, x_n$, если вместо u подставить функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, а вместо u'_{x_j}, $u''_{x_jx_k}, \ldots$ – производные

$$u'_{x_j} = \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j}, \quad u''_{x_jx_k} = \frac{\partial^2 u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots$$

Такая функция $u(x_1, x_n)$ называется *решением* или *интегралом дифференциального уравнения в частных производных*. Нашей целью будет не нахождение общего решения, а выделение отдельных частных решений путем наложения определенных дополнительных условий. При этом иногда удается получить представление о совокупности решений. Наивысший порядок входящей в дифференциальное уравнение производной называется *порядком* дифференциального уравнения. Если функция F линейна по совокупности u, u'_{x_j}, $u''_{x_jx_k}, \ldots$, то дифференциальное уравнение называется *линейным уравнением в частных производных*. Линейное уравнение в частных производных n-го порядка в общем случае может быть записано в виде

$$F\left(x_j, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}}\right) = L[u] = \sum_{s=0}^{n} \sum_{\sum\limits_{k=1}^{r} i_k = s} A_{i_1 \ldots i_r}(x_j) \frac{\partial^s u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}} = f(x_j).$$

В аргументах для краткости написано x_j вместо $x_1, \ldots, x_n$, $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ вместо $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ и т. д. Уравнение $L[u] = f(x_j)$ называется линейным *неоднородным*, $L[u] = 0$ – линейным *однородным дифференциальным уравнением*. Если u_1 и u_2 – решения линейного однородного уравнения, то решением является также $C_1u_1 + C_2u_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Каждое решение u (если оно существует) линейного неоднородного уравнения можно представить как сумму частного решения $\tilde{u}$ этого уравнения и общего решения U (т. е. решения, которое в общем случае зависит от n произвольных функций) соответствующего линейного однородного уравнения.

Если функция F линейна по высшим (n-го порядка) производным, т. е. коэффициенты при высших производных зависят лишь от производных u, u'_{x_j}, $u''_{x_jx_k}, \ldots$ до $n-1$-го порядка, то дифференциальное уравнение называется *квазилинейным*; оно имеет вид

$$F\left(x_j, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}}\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} B_{i_1 \ldots i_r}\left(x_j, u, \ldots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}}\right) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{r} i_m = n \; \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}} + B\left(x_j, \ldots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r}}\right) = 0.$$

В уравнениях в частных производных *произвольные элементы общего решения*, т. е. решения, из которого получают все частные решения (возможно, за исключением определенных «особых решений»), являются не константами, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, а произвольными функциями. В общем случае число произвольных функций будет равно порядку дифференциального уравнения. В случае дифференциальных уравнений с n независимыми переменными произвольные функции будут, вообще говоря, функциями $n-1$ переменных.

Пример 47. Уравнение $u''_{x_1x_2} = f(x_1, x_2)$ – линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с заданной функцией $f(x_1, x_2)$. Общее решение имеет вид

$$u(x_1, x_2) = \int_{\mathring{x}_1}^{x_1} \int_{\mathring{x}_2}^{x_2} f(t, s)\,dt\,ds + w(x_1) + v(x_2),$$

где $w(x_1)$ и $v(x_2)$ – произвольные функции.

Пример 48. $au'_{x_1} + bu'_{x_2} = 0$ (a, b – постоянные). Общее решение имеет вид

$$u = w(bx_1 - ax_2),$$

где $w(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 49. Уравнение (3.27) – квазилинейное уравнение в частных производных 2-го порядка по двум независимым переменным.

Пример 50. Уравнение $u''_{xx}u''_{yy} + u'_z = f(x, y, z)$ не является ни линейным, ни квазилинейным уравнением в частных производных по трем независимым переменным.

Для каждого *множества функций* вида $u = f(x_1, x_2, w(g(x_1, x_2)))$, где f и g – заданные функции от x_1, x_2, w и x_1, x_2 соответственно, а $w(t)$ – произвольная функция, может быть найдено такое уравнение в частных производных, что данное множество функций будет *общим решением* этого уравнения. Для доказательства продифференцируем u по x_1 и x_2 и исключим w'. В получившемся дифференциальном уравнении заменим w на функцию от x_1, x_2 и u, разрешив уравнение $u = f(x_1, x_2, w)$ относительно w.

Пример 51. Совокупность поверхностей вращения, которые получаются при вращении плоских кривых вокруг оси u, задается посредством формулы

$$u = w(x_1^2 + x_2^2).$$

Из соотношений $u'_{x_1} = 2x_1w'(x_1^2 + x_2^2)$ и $u'_{x_2} = 2x_2w'(x_1^2 + x_2^2)$ получаем соответствующее уравнение в частных производных 1-го порядка: $x_2u'_{x_1} - x_1u'_{x_2} = 0$.

Система уравнений в частных производных для функций $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ имеет

вид

$$F_i\left(x_j,\ u^{(1)},\dots,u^{(k)},\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_j},\dots,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_j},\ \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_j\,\partial x_l},\dots\right)=0,$$

где $i=1,\ 2,\dots,h$. Если имеется столько же дифференциальных уравнений, сколько неизвестных функций, т. е. $k=h$, то система называется *определенной системой*; если $h<k$, то система называется *недоопределенной*, и, наконец, при $h>k$ — *переопределенной*. Дифференциальное уравнение 2-го порядка $F(x_1,\ x_2,\ u,\ u'_{x_1},\ u'_{x_2},\ u''_{x_1x_1},\ u''_{x_1x_2},\ u''_{x_2x_2})=0$ эквивалентно системе

$$F(x_1,\ x_2,\ u,\ p,\ q,\ p'_{x_1},\ p'_{x_2},\ q'_{x_2})=0,$$

$$-p+u'_{x_1}=0,\qquad -q+u'_{x_2}=0$$

трех дифференциальных уравнений 1-го порядка для трех неизвестных функций u, p и $q(x_1,\ x_2)$.

Система h дифференциальных уравнений с h неизвестными функциями $u^{(1)},\dots,u^{(h)}(t,\ x_1,\dots,x_n)$

$$\frac{\partial^{k_i}u^{(i)}}{\partial t^{k_i}}=$$

$$=F_i\left(t,\ x_j,\ u^{(1)},\dots,u^{(h)},\dots,\frac{\partial^s u^{(l)}}{\partial t^{s_0}\,\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\right)\quad(3.45)$$

$(i=1,\ 2,\dots,h)$ называется *нормальной* по отношению к независимому переменному t, если правые части F_i не содержат производных функций $u^{(l)}$ порядка выше k_l и производных по t порядка выше k_l-1.

З а д а ч а К о ш и д л я н о р м а л ь н ы х с и с т е м у р а в н е н и й. Требуется найти решение $u^{(1)},\dots,u^{(n)}$ системы (3.45), которое при $t=t_0$ удовлетворяет начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{l_i}u^{(i)}}{\partial t^{l_i}}\right|_{t=t_0}=u_{il_i}(x_1,\dots,x_n)$$

$$(l_i=0,\ 1,\dots,k_i-1;\ i=1,\ 2,\dots,h).$$

Теорема Коши — Ковалевской. Если все функции $u_{il_i}(x_j)$ в некоторой окрестности точки (x_j^0) и все функции F_i из (3.45) в некоторой окрестности точки

$$\left(t^0,\ x_j^0,\dots,u^{(l)}(t^0,\ x_j^0),\dots,\ \frac{\partial^s u^{(l)}(t^0,\ x_j^0)}{\partial t^{s_0}\,\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}},\dots\right)$$

можно разложить в степенные ряды, то задача Коши имеет решение, которое в некоторой окрестности точки $(t^0,\ x_j^0)$ можно разложить в степенной ряд. Это решение единственно в классе функций, разложимых в степенной ряд. Отметим, что по этой теореме имеем решение в малом, т. е. в окрестности точки $(t^0,\ x_j^0)$.

П р и м е р 52. Система $u'_x=v'_y,\ v'_x=-u'_y$ нормальна по отношению к x.

П р и м е р 53. Уравнение $u''_{tt}=a^2(u''_{x_1x_1}+u''_{x_2x_2})$ нормально по отношению к t.

С п е ц и а л ь н ы е м е т о д ы и н т е г р и р о в а н и я.

1. Р а з д е л е н и е п е р е м е н н ы х. Во многих случаях решения можно искать в виде

$$u=u(x_1,\dots,x_n)=u_1(x_1)\,u_2(x_2,\dots,x_n)$$

или

$$u=u_1(x_1)+u_2(x_2,\dots,x_n),$$

если после подстановки предполагаемого решения уравнение удается записать в виде

$$F_1\left(x_1,\ u_1,\ \frac{du_1}{dx_1},\ \frac{d^2u_1}{dx_1^2},\dots\right)=$$

$$=F_2\left(x_2,\dots,x_n,\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3},\dots\right).$$

Тогда u_1 и u_2 должны удовлетворять уравнениям

$$F_1\left(x_1,\ u_1,\ \frac{du_1}{dx_1},\ \frac{d^2u_1}{dx_1^2},\dots\right)=C,$$

$$F_2\left(x_2,\dots,x_n,\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3},\dots\right)=C,$$

где C есть произвольная постоянная, которую можно определить из дополнительных условий. Таким образом, для $u_1(x_1)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение, а второе уравнение будет содержать на одно независимое переменное меньше.

П р и м е р 54. $(u'_{x_1})^2+(u'_{x_2})^2=1$. Предположим, что $u(x_1,\ x_2)=u_1(x_1)+u_2(x_2)$. Тогда из исходного уравнения следует

$$\left(\frac{du_1}{dx_1}\right)^2=C,\quad 1-\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)^2=C.$$

Решая эти два обыкновенных дифференциальных уравнения, получим для уравнения в частных производных двупараметрическое семейство решений

$$u(x_1,\ x_2)=ax_1+(1-a^2)^{1/2}x_2+b\qquad(a^2=C).$$

П р и м е р 55. $u''_{x_1x_1}-u'_{x_2}=0$. Предположим, что $u(x_1,\ x_2)=u_1(x_1)u_2(x_2)$. Тогда после разделения переменных

$$\frac{1}{u_1}\frac{d^2u_1}{dx_1^2}=C,\quad \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx_2}=C,$$

и решение имеет вид

$$u(x_1,\ x_2)=\begin{cases}(C_1e^{ax_1}+C_2e^{-ax_1})e^{a^2x_2}, & a^2=C>0,\\ C_1+C_2x_1, & a^2=C=0,\\ (C_1\sin ax_1+C_2\cos ax_1)e^{-a^2x_2}, & a^2=-C>0.\end{cases}$$

2. М е т о д с у п е р п о з и ц и и. Этот метод можно применять для линейных дифференциальных уравнений. Он состоит в получении новых решений из данного семейства решений посредством суммирования или интегрирования.

Если $u(x_1,\ \dots,\ x_n;\ k)$ — семейство решений, зависящее от параметра k, то при определенных предположениях о сходимости ряда или интеграла функция

$$v(x_1,\ \dots,\ x_n)=\sum_k u(x_1,\ \dots,\ x_n;\ k),$$

если k — дискретный параметр, или

$$v(x_1,\ \dots,\ x_n)=\int_a^b u(x_1,\ \dots,\ x_n;\ k)\,dk,$$

если k — непрерывный параметр, также является решением заданного дифференциального уравнения.

Пример 56. $u''_{x_1x_1} - u'_{x_2} = 0$. В предыдущем примере было показано, что

$$u(x_1, x_2; a) = e^{-a^2 x_2} \cos a x_1$$

есть решение, зависящее от непрерывного параметра. Тогда

$$v(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x_2} \cos a x_1 \, da = \left(\frac{\pi}{x_2}\right)^{1/2} e^{-x_1^2/(4x_2)}$$

также является решением.

3.3.2.2. Уравнения в частных производных 1-го порядка. С теоремой Коши – Ковалевской связано предположение о разложимости в степенной ряд, которое во многих случаях оказывается слишком ограничительным. В дальнейшем будем предполагать, что встречающиеся частные производные существуют и непрерывны. Важнейшим результатом, вытекающим из изложенного ниже, является *эквивалентность уравнения в частных производных 1-го порядка системе обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Каждое решение $u = u(x_1, x_2)$ уравнения в частных производных 1-го порядка (с двумя независимыми переменными)

$$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$$

$$\left(p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2},\ (F'_{p_1})^2 + (F'_{p_2})^2 \neq 0\right)$$

может быть представлено как поверхность в трехмерном пространстве. При этом касательная плоскость в фиксированной точке (x_1, x_2, u) поверхности имеет уравнение

$$U - u = p_1(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2);$$

p_1 и p_2 – решения уравнения $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$, если x_1, x_2 и u фиксированы. Огибающая семейства касательных плоскостей в точке (x_1, x_2, u) называется *конусом Монжа* в точке (x_1, x_2, u). Касательная плоскость поверхности решения в точке (x_1, x_2, u) должна касаться построенного в этой точке конуса Монжа вдоль образующей. Направления, которые определяются образующими конуса Монжа, называются *характеристическими направлениями*. Кривая в (x_1, x_2, u)-пространстве, имеющая в каждой точке характеристическое направление, называется *характеристикой* (*фокальной кривой*); она удовлетворяет условиям

$$\frac{dx_1}{ds} = F'_{p_1},\quad \frac{dx_2}{ds} = F'_{p_2},\quad \frac{du}{ds} = p_1 F'_{p_1} + p_2 F'_{p_2}. \tag{3.46}$$

Последнее соотношение называется *условием полосы*, которое выражает тот факт, что функциями $x_1(s)$, $x_2(s)$ и $u(s)$, $p_1(s)$, $p_2(s)$ определена не только пространственная кривая, но одновременно и касательная плоскость в каждой ее точке. Система функций x_1, x_2, u, p_1, p_2, удовлетворяющая системе (3.46) и $F = 0$, называется *фокальной полосой*. Каждая поверхность решения $u(x_1, x_2)$ (интегральная поверхность) содержит характеристические направления, так как поверхность обязательно должна касаться конуса Монжа, и они образуют на поверхности решения фокальные кривые.

Квазилинейное уравнение в частных производных 1-го порядка:

$$a_1(x_1, x_2, u) p_1 + a_2(x_1, x_2, u) p_2 = a(x_1, x_2, u).$$

Конус Монжа вырождается в этом случае в *ось Монжа*, так что в каждой точке существует только одно характеристическое направление. Каждая поверхность $u = u(x_1, x_2)$, образованная однопараметрическим семейством фокальных кривых, есть поверхность решения уравнения в частных производных, и обратно, каждая поверхность решения образуется таким образом. Каждая фокальная кривая, имеющая общую с поверхностью решения точку, целиком лежит на этой поверхности решения.

Общее уравнение в частных производных 1-го порядка:

$$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0.$$

Предположим, что конус Монжа не вырожден. Чтобы фокальная кривая целиком лежала на поверхности решения, для $p_1(s)$ и $p_2(s)$, кроме условий (3,46), должны выполняться соотношения

$$dp_1/ds = -(p_1 F'_u + F'_{x_1}),\quad dp_2/ds = -(p_2 F'_u + F'_{x_2}). \tag{3.47}$$

Система из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений (3.46) и (3.47) называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*. Функция F является интегралом этой системы, т. е. $F = \text{const}$ вдоль интегральной кривой. Каждое решение характеристической системы с $F = 0$ (нужно потребовать выполнения этого равенства только для начального элемента) называется *характеристической полосой*, и соответствующая пространственная кривая $x_1(s)$, $x_2(s)$, $u(s)$ – *характеристической кривой*. Справедливо утверждение: на каждой поверхности решения имеется однопараметрическое семейство характеристических кривых и соответствующих характеристических полос. Если характеристическая полоса имеет общий элемент с поверхностью решения, т. е. общие значения x_1, x_2, u, p_1, p_2, то она целиком принадлежит интегральной поверхности.

3.3.2.2.1. Задача с начальными значениями. Приведенные в 3.3.2.2 результаты легко переносятся на случай n независимых переменных.

Квазилинейное уравнение в частных производных 1-го порядка с n независимыми переменными:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) p_i = a(x_1, \ldots, x_n, u)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0,\quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Пусть задано $n-1$-мерное многообразие начальных значений G в $(x_1, \ldots, x_n, u)$-пространстве:

$$x_i = x_i^0(t_1, \ldots, t_{n-1}),\qquad u = u^0(t_1, \ldots, t_{n-1})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

причем

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_n^0}{\partial t_1} \cdots \dfrac{\partial x_1^0}{\partial t_{n-1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial x_n^0}{\partial t_1} \cdots \dfrac{\partial x_n^0}{\partial t_{n-1}} \end{bmatrix} = n-1 \qquad (3.48)$$

и многообразие не содержит двойных точек проекции на $(x_1, \ldots, x_n)$-пространство (т. е. различным наборам значений $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ соответствуют различные наборы значений $(x_1, \ldots, x_n)$). Искомым будет решение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i = a$, которое содержит начальное многообразие G, т. е. для решения должно тождественно по t_k выполняться равенство

$$u^0 = u(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Для этого решим систему

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \ldots, x_n, u), \qquad \frac{du}{ds} = a(x_1, \ldots, x_n, u)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

с начальными значениями $x_i|_{s=0} = x_i^0$, $u|_{s=0} = u^0$. Решение будет зависеть от s и $t_1, \ldots, t_{n-1}$:

$$x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если определитель

$$D = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(s, t_1, \ldots, t_{n-1})} = \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля на G, т. е. при $s = 0$, то, разрешая в окрестности G уравнения $x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ относительно $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$, получим

$$s = s(x_1, \ldots, x_n), \qquad t_k = t_k(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(k = 1, \ldots, n-1).$$

Подставляя эти функции в $u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, получим искомую интегральную поверхность $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, в предположении $D|_{s=0} \neq 0$ задача о начальных значениях разрешима однозначно.

Случай $D|_{s=0} = 0$. Многообразие G называется *характеристическим* для дифференциального уравнения $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i = a$, если существуют функции $\lambda_k(t_1, \ldots, t_{n-1})$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ такие, что в G справедливы соотношения

$$a_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial x_i^0}{\partial t_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$a(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial u^0}{\partial t_k}.$$

Каждое характеристическое многообразие получается из $n-2$-параметрического семейства *фокальных кривых*, т. е. решений системы $dx_i/ds = F'_{p_i}$, $du/ds = \sum p_j F'_{p_j}$, $i = 1, \ldots, n$, и, обратно, каждое такое семейство кривых образует характеристическое многообразие. Если фокальная кривая имеет одну общую точку с характеристическим многообразием, то она целиком лежит в нем. *Если $D|_{s=0} = 0$, то для разрешимости задачи о начальных значениях необходимо и достаточно, чтобы G было характеристическим многообразием.* В этом случае имеется бесконечно много интегральных поверхностей и G называется *многообразием разветвления* интегральных поверхностей. Чтобы понять это, построим нехарактеристическое начальное многообразие G', которое пересекается с G и однозначно определяет некоторую интегральную поверхность. Тогда G лежит на образованной таким образом интегральной поверхности.

Пример 57. $up_1 + p_2 = 1$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_1}{ds} = u$, $\frac{dx_2}{ds} = 1$, $\frac{du}{ds} = 1$ имеет решение

$$x_1(s) = \frac{1}{2}s^2 + u_0 s + x_{10}, \qquad x_2(s) = s + x_{20}, \qquad u = s + u_0.$$

а) Ищем интегральную поверхность, проходящую через G: $x_1^0 = t^2$, $x_2^0 = t$, $u^0 = t$. Здесь

$$x_1(s, t) = \frac{1}{2}s^2 + ts + t^2, \qquad x_2(s, t) = s + t, \qquad u(s, t) = s + t$$

есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными значениями G. Так как $D|_{s=0} = -t \neq 0$, то $u = x_2$ — единственная интегральная поверхность.

б) Для G: $x_1^0 = \frac{1}{2}t^2$, $x_2^0 = t$, $u^0 = t$ имеем $D|_{s=0} = 0$, но G — характеристическое многообразие при $\lambda_1 = 1$. Если взять G': $x_1^0 = f(t)$, $x_2^0 = t$, $u^0 = 0$ $(f'(t) \neq 0, f(0) = 0)$, то G и G' пересекутся в $(0, 0, 0)$. Интегральная поверхность для G': $x_1 = \frac{1}{2}u^2 + f(x_2 - u)$ содержит G. За счет выбора функции f получаем бесконечно много интегральных поверхностей, содержащих G.

в) Для G: $x_1^0 = \frac{1}{2}t^2$, $x_2^0 = \frac{1}{2}t^2$, $u^0 = 1$ имеем $D|_{s=0} = 0$, но G не является характеристическим многообразием, так как необходимые для этого соотношения $1 = \lambda t$, $1 = \lambda t$, $1 = \lambda \cdot 0$ не выполняются ни для какого λ. Для G не существует интегральной поверхности. Если бы интегральная поверхность существовала, то на G для определенных p_1, p_2 выполнялись бы оба соотношения:

$$up_1 + p_2 - 1|_G = p_1 + p_2 - 1 = 0,$$
$$\left.\frac{\partial u^0}{\partial t} - p_1\frac{\partial x_1^0}{\partial t} - p_2\frac{\partial x_2^0}{\partial t}\right|_G = -p_1 t - p_2 t = 0.$$

Но таких p_1 и p_2 не существует.

Общее уравнение в частных производных 1-го порядка с n независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Пусть соответствующий этому уравнению конус Монжа (огибающая семейства касательных плоскостей к решениям) не вырожден. Пусть $n-1$-мерное начальное многообразие G (3.48) в $(x_1, \ldots, x_n, u)$-пространстве заданием n функций

$$p_i = p_i^0(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

дополняется до многообразия полос, причем

условия полосы

$$\frac{\partial u^0}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial t_k} \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

выполняются тождественно по $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Пусть в дальнейшем соотношение между величинами полос x_i^0, u^0, p_i^0

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) = 0$$

справедливо тождественно по $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Будем искать решение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, содержащее заданное многообразие полос; должны выполняться равенства

$$u^0 = u(x_1^0, \ldots, x_n^0), \qquad p_i^0 = \frac{\partial u(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим для данного уравнения *характеристическую систему*

$$\frac{dx_i}{ds} = F'_{p_i}, \quad \frac{du}{ds} = \sum_{j=1}^{n} p_j F'_{p_j}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -(F'_{x_i} + F'_u p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

На каждой интегральной поверхности уравнения в частных производных $F = 0$ существует однопараметрическое семейство характеристических кривых и соответствующих характеристических полос. Если характеристическая полоса имеет общий с интегральной поверхностью $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ элемент, т. е. значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{u}, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$

$$\left(\bar{u} = u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n),\ \frac{\partial u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} = \bar{p}_i\right),$$

то полоса полностью принадлежит соответствующей интегральной поверхности.

Найдем теперь решение характеристической системы с начальными значениями

$$x_i|_{s=0} = x_i^0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad u|_{s=0} = u^0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad p_i|_{s=0} = p_i^0(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и получим

$$x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad p_i = p_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Справедливо соотношение

$$F(x_1(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), p_1(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots) = 0,$$

так как оно выполнено для $s = 0$ (см. выбор величин полос). Важную роль играет величина

$$D = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(s, t_1, \ldots, t_{n-1})} = \begin{vmatrix} F'_{p_1} & \ldots & F'_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Если $D \neq 0$ вдоль G_1, т. е. для $s = 0$ и в окрестности G_1, то получим

$$s = s(x_1, \ldots, x_n), \ t_k = t_k(x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Подставив эти функции в формулы

$$u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$$

и

$$p_i = p_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

получим

$$u = u(x_1, \ldots, x_n)$$

в качестве единственного решения задачи с начальными значениями с

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Случай $D|_{s=0} = 0$. Здесь важную роль играет понятие *характеристического многообразия полос*: G_1 называется характеристическим многообразием полос, если имеется $n-1$ функций λ_k таких, что соотношения

$$F'_{p_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial x_i^0}{\partial t_k},$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i F'_{p_i} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial u^0}{\partial t_k},$$

$$-(F'_{x_i} + p_i F'_u) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial p_i^0}{\partial t_k}$$

выполнены на G_1. Каждое характеристическое многообразие полос получается из $n-2$-параметрического семейства целиком лежащих в нем характеристических полос, и каждая характеристическая полоса, имеющая общий начальный элемент с характеристическим многообразием полос, целиком лежит в нем.

Если $D|_{s=0} = 0$, то для разрешимости задачи с начальными значениями необходимо и достаточно, чтобы G_1 было характеристическим многообразием полос. В этом случае существует бесконечно много решений, получающихся таким образом, что образуется многообразие G'_1, которое имеет $n-2$-мерное пересечение с G_1 и для которого

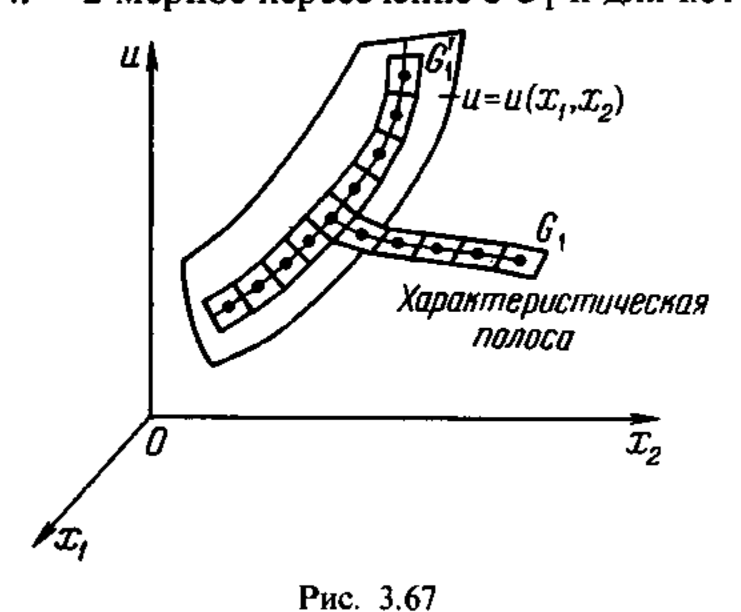


Рис. 3.67

$D \not\equiv 0$. Если решить теперь для G'_1 задачу с начальными значениями, то G_1 будет содержаться в ее решении (рис. 3.67).

Пример 58. $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = p_1 p_2 - u$. Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{ds} = p_2, \quad \frac{dx_2}{ds} = p_1,$$
$$\frac{du}{ds} = 2p_1, \ p_2 = 2u,$$
$$\frac{dp_1}{ds} = p_1, \quad \frac{dp_2}{ds} = p_2,$$

и характеристические полосы описываются равенствами

$$x_1 = p_{20}(e^s - 1) + x_{10},$$
$$x_2 = p_{10}(e^s - 1) + x_{20},$$
$$u = u_0 e^{2s}, \quad p_1 = p_{10}e^s, \quad p_2 = p_{20}e^s.$$

Ищем решение, проходящее через G_1:

$$x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = t, \quad u^0 = t^2,$$
$$p_1^0 = t/2, \quad p_2^0 = 2t.$$

Для G_1 выполняются следующие условия:

а) $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial x_1^0}{\partial t}, \frac{\partial x_2^0}{\partial t}\right) = \operatorname{rang}(0, 1) = 1$ (условие (3.48));

б) $F|_{G_1} = p_1 p_2 - u|_{G_1} = t^2 - t^2 = 0$ (соотношения между величинами полос);

в) $\frac{\partial u^0}{\partial t} - p_1^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial t} - p_2^0 \frac{\partial x_2^0}{\partial t} = 2t - 2t = 0$ (условие полосы).

Решение характеристической системы с начальными значениями из G_1 имеет вид

$$x_1(s, t) = 2t(e^s - 1) + 1,$$
$$x_2(s, t) = \frac{t}{2}(e^s - 1) + t,$$
$$u(s, t) = t^2 e^{2s},$$
$$p_1(s, t) = \frac{t}{2}e^s, \quad p_2(s, t) = 2te^s.$$

Так как $D|_{s=0} = \begin{vmatrix} 2t & 0 \\ t/2 & 1 \end{vmatrix} = 2t \neq 0$, то можно разрешить $x_1 = 2t(e^s - 1) + 1$, $x_2 = \frac{t}{2}(e^s - 1) + t$ относительно s и t:

$$t = \frac{1}{4}(4x_2 - x_1 + 1),$$
$$e^s = \frac{4x_2 + x_1 - 1}{4x_2 - x_1 + 1}.$$

Подставив эти значения в $u = t^2 e^{2s}$, получим решение

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{16}(4x_2 + x_1 - 1)^2.$$

После подстановки в $p_1 = \frac{t}{2}e^s$ и $p_2 = te^s$ получим

$$p_1(x_1, x_2) = \frac{1}{8}(4x_2 + x_1 - 1),$$
$$p_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(4x_2 + x_1 - 1),$$

т. е. выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p_1 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_2.$$

3.3.2.2.2. Полные интегралы. Решение уравнения в частных производных 1-го порядка

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

зависящее от n параметров a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$u = f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$

при условии $\det(f''_{a_i x_j}) \neq 0$ в рассматриваемой области $(x_1, \ldots, x_n)$-пространства называется *полным интегралом*. Очень часто полные интегралы можно получить разделением переменных (см. 3.3.2.1). Если зависящее от параметра a семейство $u = f(x_1, \ldots, x_n; a)$ поверхностей решения дифференциального уравнения имеет огибающую, то она снова есть решение. Огибающая определяется тем, что из условия $f'_a(x_1, \ldots, x_n; a) = 0$ находят a как функцию $x_1, \ldots, x_n$ и подставляют в $u = f(x_1, \ldots, x_n; a)$.

Из полного интеграла построением огибающей можно получить общее решение. Предположим, что $a_i = w_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем w_i — произвольные функции от $n - 1$ переменных t_k. Из $n - 1$ уравнений

$$0 = \sum_{i=1}^{n} f'_{a_i}(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_{n-1}) \frac{\partial w_i}{\partial t_k}$$

найдем t_k как функции $x_1, \ldots, x_n$. Подставив эти функции $t_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, n - 1)$ в выражение

$$u = f(x_1, \ldots, x_n; w_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots \ldots, w_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1})),$$

получим решение, зависящее от n произвольных функций, т. е. общее решение.

Полный интеграл приводит к решению характеристической системы дифференциальных уравнений. Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)$ — полный интеграл уравнения в частных производных $F = 0$. Из соотношений

$$f'_{a_i} = sb_i,$$

где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — произвольные параметры, найдем

$$x_i = x_i(s, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Эти функции, подставленные в правые части соотношений

$$u = f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$
$$p_i = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i},$$

дают $u(s, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ и $p_i(s, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$. Кривые $x_i = x_i(s)$, $u = u(s)$, $p_i = p_i(s)$ являются характеристическими полосами.

Особое решение — это решение дифференциального уравнения, которое получается в результате исключения $p_1, \ldots, p_n$ из $n + 1$ уравнений

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$
$$F'_{p_i}(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Особое решение может быть получено также из полного интеграла построением огибающей. Исключив n параметров $a_1, \ldots, a_n$ из $n + 1$ уравнений

$$f(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) = u,$$
$$f'_{a_i}(x_i, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

... чим ос... решения.

Примеры полных интегралов уравнений в частных производных.

Таблица 3.6

Дифференциальное уравнение	Полный интеграл
$F(p_1, p_2) = 0$ Пример: $p_1^2 + p_2^2 = 1$	$u = a_1x_1 + a_1'x_2 + a_2$ при $F(a_1, a_1') = 0$ $u = a_1x_1 + (1 - a_1^2)^{1/2}x_2 + a_2$
$p_1 = f(x_1, p_2)$ $p_2 = f(x_2, p_1)$ Пример: $p_1 = x_1^2p_2 + x_1e^{p_2}$	$u = \int f(x_1, a_1)\,dx_1 + a_1x_2 + a_2$ $u = \int f(x_2, a_1)\,dx_2 + a_1x_1 + a_2$ $u = \frac{1}{3}x_1^3a_1 + \frac{1}{2}x_1^2e^{a_1} + a_1x_2 + a_2$
$p_1 = f(u, p_2)$ Пример: $u^2(p_1^2 + p_2^2 + 1) = 1$	$x_1 + a_1x_2 = \int \frac{du}{g(u, a_1)} + a_2$ при условии, что $p = g(u, s)$ есть решение уравнения $p = f(u, sp)$ $(x_1 - a_2)^2 + a_1^2x_2^2 + 2a_1x_2(x_1 - a_2) = (1 + a_1^2)(1 - u^2)$ при условии, что $g(u, s) = \frac{1}{u}\left(\frac{1 - u^2}{1 + s^2}\right)^{1/2}$
$F_1(x_1, p_1) = F_2(x_2, p_2)\quad (= a_1)$ или $p_1 = f_1(x_1, a_1)$ $p_2 = f_2(x_2, a_1)$ Пример: $A(x_1)p_1^2 + B(x_2)p_2^2 = a(x_1) + b(x_2)$	$u = \int f_1(x_1, a_1)\,dx_1 + \int f_2(x_2, a_1)\,dx_2 + a_2$ $u = \int\left(\frac{a(x_1) + a_1}{A(x_1)}\right)^{1/2}dx_1 + \int\left(\frac{b(x_2) - a_1}{B(x_2)}\right)^{1/2}dx_2 + a_2$
$u = p_1x_1 + p_2x_2 + f(p_1, p_2)$	$u = a_1x_1 + a_2x_2 + f(a_1, a_2)$

3.3.2.2.3. **Контактные преобразования. Канонические уравнения и канонические преобразования.** В этом пункте вновь рассматриваются уравнения в частных производных 1-го порядка

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{3.49}$$

где

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Наряду с обычными точечными преобразованиями

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

такими, что $\frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$, можно рассматривать контактные преобразования. Преобразование

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n),$$
$$\bar{p}_i = \bar{p}_i(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\bar{u} = \bar{u}(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n),$$

для которого

$$\frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{u}, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)} \neq 0,$$

называется *контактным преобразованием*, если существует такая функция $g \neq 0$, что выполнено соотношение

$$d\bar{u} - \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k\,d\bar{x}_k = g(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)\left(du - \sum_{k=1}^{n} p_k\,dx_k\right),$$

где

$$\bar{p}_k = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

При этих преобразованиях полный дифференциал $du = \sum_{k=1}^{n} p_k\,dx_k$ переходит в полный дифференциал $d\bar{u} = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k\,d\bar{x}_k$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы функции

$$\bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n),$$
$$\bar{p}_i(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n),$$
$$\bar{u}(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

определяли контактное преобразование, для которого справедливо тождество

$$d\bar{u} - \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k\,d\bar{x}_k = g\left(du - \sum_{k=1}^{n} p_k\,dx_k\right),$$

выражается уравнениями

$$[\bar{u}, \bar{x}_i] = 0, \quad [\bar{x}_i, \bar{x}_j] = 0,$$
$$[\bar{p}_i, \bar{p}_j] = 0, \quad [\bar{p}_i, \bar{u}] = g\bar{p}_i,$$
$$[\bar{p}_i, \bar{x}_j] = \delta_{ij}g \quad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n).$$

При этом для двух функций f, $h(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ квадратные скобки определяются равенством

$$[f, h] = \sum_{i=1}^{n} \{f'_{p_i}(h'_{x_i} + p_i h'_u) - h'_{p_i}(f'_{x_i} + p_i f'_u)\}.$$

Это контактное преобразование переводит уравнение (3.49) в новое уравнение

$$\bar{F}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, u, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n) = F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

$$\left(\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\right)$$

с решением $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Возможно, что новое дифференциальное уравнение $\bar{F} = 0$ не содержит производных и, следовательно, не является больше дифференциальным уравнением в собственном смысле.

Пример 59. Преобразование Лежандра $\bar{x}_i = p_i$, $\bar{p}_i = x_i$, $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k - u$ есть контактное преобразование:

$$d\bar{u} - \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k \, d\bar{x}_k = (-1)\left(du - \sum_{k=1}^{n} p_k \, dx_k\right).$$

В дифференциальном уравнении (3.49) можно ввести $u = x_{n+1}$ как независимое переменное и искать семейство решений $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n; C)$ в неявной форме $v(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = C$. При этом вместо $p_i = u'_{x_i}$ в (3.49) следует подставить $-v'_{x_i}/v'_{x_{n+1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, получим дифференциальное уравнение, которое явно не зависит от v. Пусть в дальнейшем полученное таким образом уравнение нормально по отношению к переменному, которое будет обозначено через t (ср. 3.3.2.1). Тогда можно ограничиться исследованием *дифференциального уравнения Гамильтона – Якоби*

$$p + H(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

$(p = u'_t, \; p_i = u'_{x_i})$ для функции u от $n + 1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, t$ (переменное v снова обозначается через u). Система характеристических дифференциальных уравнений, соответствующих этому уравнению Гамильтона – Якоби, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.50}$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3.51}$$

Уравнения (3.50) образуют определенную систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Если из них найти $x_i(t)$ и $p_i(t)$, то $u(t)$ и $p(t)$ получатся из уравнений (3.51) простым интегрированием. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.50), соответствующая функции $H(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n)$ от $2n + 1$ переменных, называется *канонической системой дифференциальных уравнений* или *нормальной системой дифференциальных уравнений*. К системам такого вида приводят многие задачи механики и теоретической физики. Решение нормальной системы (3.50) часто находится проще при помощи соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби.

Теорема Якоби. Если известен полный интеграл $u = f(x_1, \ldots, x_n, t, a_1, \ldots, a_n) + a$ дифференциального уравнения в частных производных

$$p + H(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

причем $\det(f''_{x_i a_j}) \neq 0$, то уравнения

$$f'_{a_i} = b_i, \; f'_{x_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при $2n$ произвольных параметрах a_i и b_i дают $2n$-параметрическое семейство решений канонической системы (3.50).

Пример 60. *Задача двух тел.* Движение двух материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, происходит постоянно в одной плоскости. Поэтому, приняв положение одной из точек за начало координат, можно записать уравнения движения в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{где } U = \frac{k^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Эта система после введения *функции Гамильтона*

$$H(x, y, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - U(x, y)$$

переходит в систему канонических дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

для величин x, y, $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$. Интегрирование этих уравнений эквивалентно задаче нахождения полного интеграла уравнения в частных производных

$$u'_t + \frac{1}{2}[(u'_x)^2 + (u'_y)^2] - \frac{k^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0.$$

В полярных координатах ρ, φ уравнение в частных производных можно записать в виде

$$u'_t + \frac{1}{2}\left[(u'_\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2}(u'_\varphi)^2\right] = \frac{k^2}{\rho};$$

функция

$$u = -a_1 t - a_2 \varphi - \int_{\rho_0}^{\rho} \left(2a_1 + \frac{2k^2}{s} - \frac{a_2^2}{s^2}\right)^{1/2} ds + a$$

является полным интегралом. Его можно получить разделением переменных $-u(\rho, \varphi, t) = u_1(t) + u_2(\rho, \varphi)$ с учетом того, что для уравнения вида $u'_\rho = f(\rho, u'_\varphi)$ выражение $u = \int f(\rho, a_2)\, d\rho + a_2\varphi + a$ есть полный интеграл. Из $u'_{a_1} = -t_0$ и $u'_{a_2} = -\varphi_0$ получается общее решение

$$t - t_0 = -\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{ds}{\left(2a_1 + \frac{2k^2}{s} - \frac{a_2^2}{s^2}\right)^{1/2}},$$

$$\varphi - \varphi_0 = a_2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{ds}{s^2\left(2a_1 + \frac{2k^2}{s} - \frac{a_2^2}{s^2}\right)^{1/2}},$$

причем второе уравнение задает траекторию. Вычислив последний интеграл и используя обозначения $P = \frac{a_2^2}{k^2}$, $\varepsilon^2 = \left(1 + \frac{2a_1a_2^2}{k^4}\right)^{1/2}$, получим уравнение

$$\rho = \frac{P}{1 - \varepsilon^2 \sin(\varphi - \varphi_0)},$$

т. е. при $\varepsilon < 1$ – эллипс, при $\varepsilon = 1$ – параболу и при $\varepsilon > 1$ – гиперболу.

Канонические преобразования. Преобразование

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.52}$$

называется *каноническим преобразованием*, если канонические уравнения (3.50) переходят в канонические уравнения

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \qquad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Это условие должно выполняться для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$.

Преобразование (3.52) является каноническим, если существует функция $G(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ такая, что справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k\, dx_k - \bar{p}_k\, d\bar{x}_k) = dG$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k\, dp_k - \bar{x}_k\, d\bar{p}_k) = dG$$

($\bar{p}_k$, $\bar{x}_k$ должны быть выражены через x_i, p_i по формулам (3.52)). Функция $\bar{H}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ получается из H при подстановке выражений x_i, p_i через $\bar{x}_i$, $\bar{p}_i$ в соответствии с (3.52). Это возможно, так как для канонического преобразования всегда справедливо равенство

$$\frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)} = 1.$$

Пример 61. $n = 1$: $\bar{x} = \sqrt{x}\cos 2p$, $\bar{p} = \sqrt{x}\sin 2p$ – каноническое преобразование, так как для функции $G = \frac{x}{4}(-\sin 4p + 4p)$ имеет место равенство

$$p\,dx - \bar{p}\,d\bar{x} = \left(-\frac{1}{2}\sin 2p\cos 2p + p\right)dx + 2x\sin^2 2p\,dp = dG.$$

Например, канонические уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (2\sqrt{x} - 4x\sin 2p)\cos 2p,$$

$$\frac{dp}{dt} = \sin^2 2p - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin 2p - 1$$

с функцией $H = x(1 - \sin^2 2p) + \sqrt{x}\sin 2p$ переходят в канонические уравнения

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 1, \qquad \frac{d\bar{p}}{dt} = -2\bar{x}$$

с $\bar{H} = \bar{x}^2 + \bar{p}$.

Условия канонических преобразований, записанные при помощи скобок Лагранжа. Преобразование (3.52) является каноническим тогда и только тогда, когда тождественно выполняются соотношения $[x_j, x_k] = 0$, $[x_j, p_k] = \delta_{jk}$, $[p_j, p_k] = 0$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$. При этом *скобки Лагранжа* $[\ ,\ ]$ определены равенствами

$$[x_j, x_k] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_j}\right),$$

$$[x_j, p_k] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_k}\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_j}\right),$$

$$[p_j, p_k] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_j}\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_k}\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_j}\right).$$

Условия канонических преобразований, записанные при помощи скобок Пуассона. Преобразование (3.52) является каноническим тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$(x_j, x_k) = 0, \quad (p_j, p_k) = 0, \quad (x_j, p_k) = \delta_{jk}$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Функции F, $G(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ связаны с преобразованными функциями $\bar{F}$, $\bar{G}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ соотношением $(F, G) = (\bar{F}, \bar{G})$. При этом *скобки Пуассона* $(\ ,\ )$ определены формулой

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)$$

для произвольных непрерывно дифференцируемых функций f и $g(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$. Скобка Пуассона имеет следующие *свойства*:

$$(f, g) = -(g, f), \quad (f, f) = 0, \quad (f, \text{const}) = 0,$$
$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g),$$
$$(f_1 f_2, g) = f_2(f_1, g) + f_1(f_2, g),$$
$$(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0$$

(*тождество Якоби*). Совокупность канонических преобразований от $2n$ переменных образует группу.

3.3.2.3. Уравнения в частных производных 2-го порядка.

3.3.2.3.1. Классификация. Характеристики. Корректно поставленные задачи. Рассматривается *линейное* относительно вторых производных *уравнение в частных производных 2-го порядка*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{3.53}$$

с непрерывными коэффициентами a_{ij}. Произведем невырожденное преобразование переменных

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad \frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

тогда коэффициенты a_{ij} преобразуются в рассматриваемой точке $(x_i^0, \ldots, x_n^0)$ как коэффициенты квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_ip_j$ в случае невырожденного линейного преобразования $p_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}q_j$, где

$$A_{ji} = \frac{\partial x_j(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i},$$

$$\bar{a}_{ij}(\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0) = \sum_{l,k=1}^{n} a_{lk}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, A_{il}A_{jk}.$$

Дифференциальному уравнению (3.53) *сопоставляется квадратичная форма* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0)p_ip_j$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Из линейной алгебры известно, что эта форма линейным преобразованием $p_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}q_j$ может быть приведена к каноническому виду

$$\sum_{l=1}^{r} q_l^2 - \sum_{l=r+1}^{m} q_l^2, \qquad m \leqslant n.$$

При этом числа r и m не зависят от вида линейного преобразования. Согласно этому, получаются следующие типы дифференциальных уравнений в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

эллиптический тип: $m = n$, $r = 0$ или $r = n$;

гиперболический тип: $m = n$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$;

нормальный гиперболический тип: $m = n$, $r = 1$ или $r = n-1$;

параболический тип: $m < n$;

нормальный параболический тип: $m = n-1$, $r = 0$ или $r = m$.

Эта классификация зависит от выбора точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Например, *уравнение Трикоми* $-yu''_{xx} + u''_{yy} = 0$ является уравнением *смешанного типа*: при $y > 0$ — эллиптическое, при $y = 0$ — параболическое, при $y < 0$ — гиперболическое.

Если коэффициенты a_{ij} постоянны и линейное преобразование $p_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}q_j$ приводит квадратичную форму, соответствующую уравнению, к каноническому виду, то преобразование независимых переменных $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$ приводит дифференциальное уравнение также к каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}_i^2} - \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}_i^2} + \bar{F}\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_n}\right) = 0.$$

Пример 62. *Уравнение колебаний* ($g > 0$, $p > 0$)

$$g\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) - qu + F(t, x_1, \ldots, x_n)$$

для $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ вследствие равенства $\operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ является гиперболическим дифференциальным уравнением; при этом g, p и q определяются свойствами колеблющейся среды, а функция $F(t, x_1, \ldots, x_n)$ выражает интенсивность внешнего возмущения.

Частные случаи:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x)$ — *одномерное волновое уравнение* описывает малые *поперечные колебания струны*;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(t, x, y)$ — *двумерное волновое уравнение* описывает *колебания мембраны* постоянной плотности;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(t, x, y, z)$ — *трехмерное волновое уравнение* описывает *распространение звука* в однородной среде и распространение электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют также плотность и давление газа, потенциал скорости, компоненты напряженности электрического и магнитного полей и их потенциалы. Для краткости часто пишут:

$$\Box_a u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\,\Delta u,$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, и называют $\Box_a$ *оператором Даламбера* и Δ — *оператором Лапласа*.

Пример 63. Дифференциальное *уравнение распространения тепла и диффузии в среде* ($g > 0$, $p > 0$)

$$g\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) - qu + F(t, x_1, \ldots, x_n)$$

(*уравнение диффузии*) является параболическим. Если p, q — постоянные величины, то получаем *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\Delta u + f.$$

Пример 64. Для стационарных процессов, т. е. в случае, когда

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n),$$
$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n),$$

уравнение колебаний

$$-\operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) + qu = F(x_1, \ldots, x_n)$$

есть эллиптическое дифференциальное уравнение. Частными случаями являются

$\Delta u = -f(x_1, \ldots, x_n)$ — *уравнение Пуассона*,

$\Delta u = 0$ — *уравнение Лапласа*.

Если искать решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\,\Delta u = f$$

при $f = \bar{f}(x_1, \ldots, x_n)e^{iwt}$ в виде $u(t, x_1, \ldots, x_n) = \bar{u}(x_1, \ldots, x_n)e^{iwt}$, то для $\bar{u}$ получается *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta\bar{u} + k^2\bar{u} = -\frac{1}{a^2}\bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \left(k^2 = \frac{w^2}{a^2}\right)$$

— эллиптическое дифференциальное уравнение.

Характеристики (характеристические поверхности). Пусть функция $w(x_1, \ldots, x_n)$ ($n \geqslant 2$) имеет непрерывные частные производные 1-го порядка, обладает тем свойством, что на поверхности $w = 0$ выполнено соотношение $\operatorname{grad} w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\right) \neq 0$, и удовлетворяет диф-

ференциальному уравнению 1-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0. \qquad (3.54)$$

Поверхность $w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется *характеристической поверхностью* уравнения (3.53), а уравнение (3.54) – *характеристическим уравнением* для (3.53). При $n = 2$ характеристические поверхности превращаются в *характеристические линии.*

Пусть каждая поверхность семейства $w(x_1, \ldots, x_n) = c$, $a < c < b$, является характеристической поверхностью уравнения (3.53). Так как $\operatorname{grad} w \neq 0$, то это семейство заполняет область G: через каждую точку области G проходит ровно одна характеристическая поверхность. Если функция w дважды непрерывно дифференцируема, то можно произвести преобразование координат $\bar{x}_1 = w(x_1, \ldots, x_n)$, которое вследствие (3.54) ведет к $a_1 = 0$ в G.

Пример 65. *Волновому уравнению* $u''_{tt} = a^2 \sum_{i=1}^{n} u''_{x_i x_i}$ соответствует характеристическое уравнение $(w'_t)^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} (w'_{x_i})^2$.

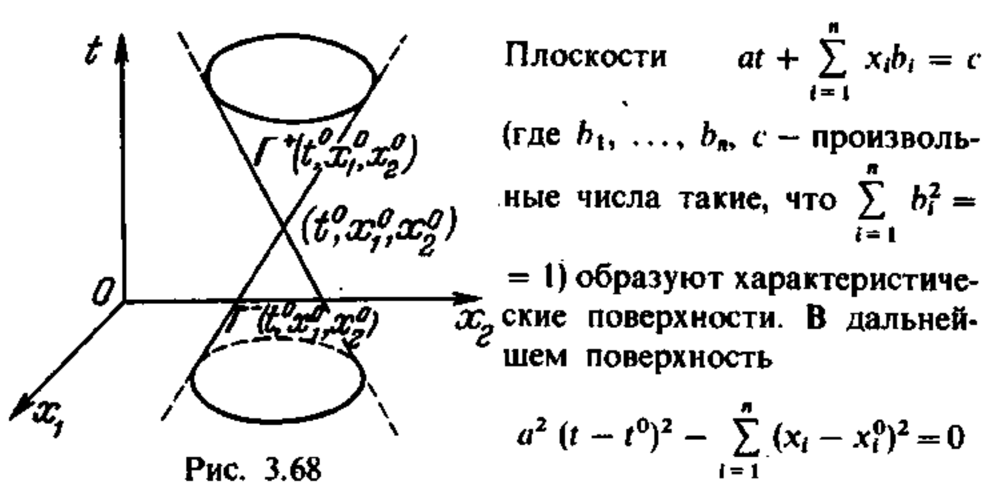


Рис. 3.68

Плоскости $at + \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = c$ (где $b_1, \ldots, b_n$, c – произвольные числа такие, что $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$) образуют характеристические поверхности. В дальнейшем поверхность

$$a^2 (t - t^0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 = 0$$

называется *характеристическим конусом* с вершиной в точке $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Часть характеристического конуса, для которой $a(t - t^0) > \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2\right)^{1/2}$, обозначается $\Gamma^+(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а часть, для которой $a(t - t^0) < \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2\right)^{1/2}$, обозначается $\Gamma^-(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (рис. 3.68).

Пример 66. *Уравнение теплопроводности* $u'_t = a^2 \sum_{i=1}^{n} u''_{x_i x_i}$ имеет характеристическое уравнение $\sum_{i=1}^{n} (w'_{x_i})^2 = 0$ и характеристические плоскости $w = t - c = 0$.

Пример 67. *Уравнение Лапласа* $\sum_{i=1}^{n} u''_{x_i x_i} = 0$ имеет характеристическое уравнение $\sum_{i=1}^{n} (w'_{x_i})^2 = 0$. Так как из условия $\operatorname{grad} w \neq 0$ следует, что $w = c$, то уравнение Лапласа не имеет действительных характеристических поверхностей.

Канонические формы уравнений с двумя независимыми переменными. Рассмотрим уравнение

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3.55)$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами A, B, C, которые не обращаются в нуль одновременно. Пусть $A \neq 0$ в рассматриваемой области (x, y)-плоскости (в противном случае $C \neq 0$; в случае $A = C = 0$ преобразование $\bar{x} = x + y$, $\bar{y} = x - y$ приводит к дифференциальному уравнению с $A \neq 0$). Если после замены переменных $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ коэффициенты $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{C}(\bar{x}, \bar{y})$ обращаются в нуль, то для функций $\bar{x}(x, y)$ и $\bar{y}(x, y)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + l_1(x, y) \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + l_2(x, y) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = 0,$$

где (3.56)

$$l_{1,2} = \frac{1}{A}(B \pm (B^2 - AC)^{1/2}) = \frac{1}{A}(B \pm \sqrt{D}),$$

$$D = B^2 - AC.$$

Классификация дифференциальных уравнений.

1. $D > 0$ – *гиперболическое дифференциальное уравнение.* Семейство кривых $w(x, y) = c$ такое, что $w'_y \neq 0$, изображает характеристики уравнения (3.53) только тогда, когда выражение $w(x, y) = c$ есть полный интеграл одного из двух обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dy}{dx} = l_1(x, y)$, $\frac{dy}{dx} = l_2(x, y)$. Оба полных интеграла $h_1(x, y) = C_1$ и $h_2(x, y) = C_2$ этих дифференциальных уравнений (таких, что $h'_{1y} \neq 0$, $h'_{2y} \neq 0$) определяют два семейства характеристик уравнения (3.55). Если эти два семейства характеристик рассматривать как координатные линии, то получим

$$\bar{x} = h_1(x, y), \qquad \bar{y} = h_2(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = 0,$$

так как $B(x, y) \neq 0$. Замена переменных $\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \bar{y}$, $\bar{\bar{y}} = \bar{x} - \bar{y}$ дает эквивалентную каноническую форму

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{\bar{x}}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{\bar{y}}^2} + \bar{\bar{F}}\left(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{u}}, \frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{\bar{x}}}, \frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{\bar{y}}}\right) = 0.$$

Пример 68. *Уравнение Трикоми* $yu''_{xx} + u''_{yy} = 0$. $A = y$, $B = 0$, $C = 1$; тогда $D = -y > 0$ в $G = \{(x; y) \mid x^2 + (y + 4)^2 \leqslant 9\}$. Имеем $l_1(x, y) = (-y)^{1/2}$ и $l_2(x, y) = -(-y)^{-1/2}$, и общий интеграл уравнения $dy/dx = (-y)^{-1/2}$ есть $C_1 = \frac{3}{2}x + (-y)^{3/2}$, а общий интеграл уравнения $dy/dx = -(-y)^{-1/2}$ есть $C_2 = \frac{3}{2}x - (-y)^{3/2}$. Преобразование $\bar{x} = \frac{3}{2}x + (-y)^{3/2}$, $\bar{y} = \frac{3}{2}x - (-y)^{3/2}$ приводит уравнение Трикоми в области G к нормальному виду

$$\bar{u}''_{\bar{x}\bar{y}} - \frac{1}{6(\bar{x} - \bar{y})}(\bar{u}'_{\bar{x}} - \bar{u}'_{\bar{y}}) = 0.$$

2. $D \equiv 0$ – *параболическое дифференциальное уравнение.* В этом случае оба дифференциальных уравнения (3.56) совпадают, так как $l_1 = l_2 = B/A$. Единственное семейство характеристик можно определить из уравнения $dy/dx = B/A$ при помощи общего интеграла $h(x, y) = c$ такого, что $h'_y \neq 0$. Преобразованием координат $\bar{x} = h(x, y)$, $\bar{y} = x$ дифференциальное уравнение (3.55) приводится к

нормальному виду:

$$\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2} + F\left(\bar x,\ \bar y,\ \bar u,\ \frac{\partial \bar u}{\partial \bar x},\ \frac{\partial \bar u}{\partial \bar y}\right) = 0.$$

Пример 69. $y^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + x^2 u''_{yy} + xu'_x + u = 0$. $A = y^2$, $B = xy$, $C = x^2$ и $D = 0$; тогда $l_1 = x/y$ и $y^2 - x^2 = c$ есть общий интеграл дифференциального уравнения $dy/dx = x/y$. Преобразование $\bar x = y^2 - x^2$, $\bar y = x$ приводит к нормальной форме этого дифференциального уравнения:

$$\bar u''_{\bar y\bar y} - 2\bar u'_{\bar x} - \frac{1}{\bar x + \bar y^2}(\bar y \bar u'_{\bar y} + \bar u) = 0.$$

3. $D < 0$ — *эллиптическое дифференциальное уравнение.* В этом случае $l_1(x,\ y)$ и $l_2(x,\ y)$ — комплексно сопряженные. Преобразование

$$\bar x = \frac{h_1(x,\ y) + h_2(x,\ y)}{2},$$

$$\bar y = \frac{h_1(x,\ y) - h_2(x,\ y)}{2i},$$

где $h_1(x,\ y) = C_1$ и $h_2(x,\ y) = C_2$ суть комплексно сопряженные общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dy}{dx} = l_1(x,\ y)$ и $\frac{dy}{dx} = l_2(x,\ y)$, приводит дифференциальное уравнение (3.55) к нормальному виду:

$$\frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar x^2} + \frac{\partial^2 \bar u}{\partial \bar y^2} + \bar F\left(\bar x,\ \bar y,\ \bar u,\ \frac{\partial \bar u}{\partial \bar x},\ \frac{\partial \bar u}{\partial \bar y}\right) = 0.$$

В этом случае действительных характеристик не существует.

Пример 70. *Уравнение Трикоми* $yu''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в области G: $x^2 + (y-4)^2 \leqslant 9$. Из $\frac{dy}{dx} = i(y)^{-1/2}$ или $\frac{dy}{dx} = -i(y)^{-1/2}$ следует, что $h_1(x,\ y) = y^{3/2} - i\frac{3}{2}x$ или $h_2(x,\ y) = y^{3/2} + i\frac{3}{2}x$. Преобразование $\bar x = y^{3/2}$, $\bar y = -\frac{3}{2}x$ приводит к нормальному виду уравнения Трикоми в G:

$$\bar u''_{\bar y\bar y} + \bar u''_{\bar x\bar x} + \frac{1}{3\bar x}u'_{\bar x} = 0.$$

Корректные постановки задач для отдельных типов дифференциальных уравнений 2-го порядка. Пусть исследуемое дифференциальное уравнение в рассматриваемой области G не меняет свой тип.

Гиперболические дифференциальные уравнения. Пусть область G лежит в $(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$-пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$. Гиперболические дифференциальные уравнения описывают колебательные процессы. Для гиперболических дифференциальных уравнений имеет смысл *задача Коши*: найти в G при $t > 0$ дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + F\left(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \quad (3.57)$$

(на коэффициенты налагаются такие условия, чтобы это дифференциальное уравнение было гиперболично) и начальным условиям

$$u(0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = u_0(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

$$\frac{\partial u(0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)}{\partial t} = u_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

(где u_0 и u_1 — заданные функции). Задача Коши может быть сформулирована более общим образом. Пусть задана поверхность S: $t = w(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ такая, что

$$1 \neq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_{i0}\frac{\partial w}{\partial x_i},$$

т. е. S не является характеристикой, и функции u_0, u_1 заданы на S. Ищется решение уравнения (3.57) в области $t > w(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющее в S условиям

$$u\Big|_S = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1$$

($\partial/\partial n$ — производная по нормали к S). При этих условиях все производные искомой функции по $t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ можно вычислить на поверхности S из дифференциального уравнения и начальных значений.

Эллиптические дифференциальные уравнения. Пусть G — ограниченная область в $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$-пространстве $\mathbf{R}^n$. Эллиптические дифференциальные уравнения описывают статические состояния. Поэтому ищутся решения дифференциальных уравнений, которые на границе ∂G области G удовлетворяют условиям вида $\left(fu + g\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\partial G} = h$. Функции $f,\ g,\ h$ заданы и непрерывны на ∂G, причем $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $f + g > 0$. Такая задача называется *краевой задачей*.

Различают:

краевые условия 1-го рода: $u|_{\partial G} = h$;

краевые условия 2-го рода: $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G} = h$;

краевые условия 3-го рода: $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + fu\right)\Big|_{\partial G} = h$.

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами* 1-*го*, 2-*го* и 3-*го рода.* Для уравнения Лапласа $\Delta u = F(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ краевая задача 1-го рода называется *задачей Дирихле*, а краевая задача 2-го рода — *задачей Неймана.*

Параболические дифференциальные уравнения. Параболические уравнения описывают процессы диффузии. Для этих дифференциальных уравнений, например для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\left(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \text{ при } \sum \xi_i^2 > 0,\ \xi_i \in \mathbf{R}\right),$$

ставятся задачи с начальным условием

$$u(0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = u_0(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

u_0 — заданная функция на гиперплоскости $t = 0$ в $(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$-пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$.

Для гиперболического уравнения (3.57) имеет смысл рассматривать также *смешанную задачу*.

Пусть G – ограниченная область в $(x_1, \ldots, x_n)$-пространстве и Z_T – цилиндр над областью G, т. е.

$$Z_T = \{(t, x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, (x_1, \ldots, x_n) \in G\}.$$

Ищем функцию $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ в Z_T, удовлетворяющую начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u(0, x_1, \ldots, x_n) = u_0(x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1, \ldots x_n) \end{aligned}\right\} \text{на } \bar{G}\ (\bar{G} \text{ – замыкание } G)$$

и краевому условию

$$\left.\left(fu + g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{S_T} = h(t, x_1, \ldots, x_n)$$

(S_T – боковая поверхность цилиндра Z_T). При этом на ∂G должно быть выполнено условие совместности

$$\left.\left(fu_0 + g\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = h\,|_{t=0}.$$

Аналогичная смешанная задача может быть поставлена и для параболических уравнений.

Рассматриваемые задачи должны удовлетворять следующим физическим соображениям:

1) Решение должно существовать.

2) Решение должно быть однозначно определено.

3) Решение должно непрерывным образом зависеть от данных задачи.

Задача, удовлетворяющая этим требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

3.3.2.3.2. Общие методы построения решений. *Метод Фурье* решения смешанной задачи для гиперболических или параболических дифференциальных уравнений так же, как и в случае некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений, состоит в применении разделения переменных и принципа суперпозиции (см. 3.3.2.1). Разыскиваются так называемые формальные решения, т. е. решения в виде бесконечных рядов, в которых каждый член является решением дифференциального уравнения и удовлетворяет краевым или начальным условиям. При соответствующих предположениях о дифференцируемости коэффициентов уравнения, начальных и краевых условий можно добиться сходимости рядов.

Однородное гиперболическое дифференциальное уравнение. Ищем решение $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ задачи

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu \quad (r(x_1, \ldots, x_n) > 0)$$

с эллиптическим оператором

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in G, \tag{3.58}$$

начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x_1, \ldots, x_n)$$

и краевыми условиями

$$\left.\left(hu + g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0 \text{ при } t > 0.$$

При этом G – ограниченная область $(x_1, \ldots, x_n)$-пространства и ∂G – граница G. В дальнейшем предполагается, что собственные значения λ_k оператора L положительны, причем $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, а соответствующие собственные функции $f_k(x_1, \ldots, x_n)$, определяемые равенством $Lf_k = \lambda_k r f_k$ и такие, что $\left.hf_k + g\frac{\partial f_k}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0$, действительны и в пространстве $L_2(G)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_G f_1 f_2 r\, dx_1 \ldots dx_n$$

образуют полную ортонормированную систему (см. 3.3.2.3.4 и 3.3.2.3.5).

Формальное решение поставленной задачи:

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t) f_k(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.59}$$

причем коэффициенты a_k, b_k выбраны так, что

$$u_0(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_1, \ldots, x_n),$$

$$u_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, b_k f_k(x_1, \ldots, x_n),$$

т. е.

$$\begin{aligned} a_k &= \int_G u_0 f_k r\, dx_1 \ldots dx_n, \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_G u_1 f_k r\, dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Формальное решение может быть записано также в виде

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t + e_k) f_k(x_1, \ldots, x_n),$$

где $d_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$, $\sin e_k = a_k/d_k$, $\cos e_k = b_k/d_k$. Здесь каждый член ряда определяет гармоническое колебание с амплитудой $d_k f_k$ и частотой $\sqrt{\lambda_k}$.

Неоднородное гиперболическое дифференциальное уравнение. Пусть вместо уравнения (3.58) имеем неоднородное дифференциальное уравнение

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(t, x_1, \ldots, x_n).$$

Кроме того, выполняются те же самые условия и предположения, как и в случае однородного гиперболического дифференциального уравнения. *Формальное решение* имеет вид

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(s) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\, ds\right\} f_k,$$

где

$$c_k(t) = \int\limits_G F(t, x_1, \ldots, x_n) f_k(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{3.61}$$

Заметим, что первые два слагаемых в фигурных скобках дают решение однородного уравнения с начальными значениями u_0 и u_1, третье же слагаемое дает решение неоднородного уравнения с $u_0 = u_1 = 0$. В частном случае

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = Cr(x_1, \ldots, x_n) f_l(x_1, \ldots, x_n) \sin\sqrt{\lambda_l}\, t$$

при $u_0 = u_1 = 0$ решение этой задачи имеет вид

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{C}{2\sqrt{\lambda_l}}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_l}\, t}{\sqrt{\lambda_l}} - t\cos\sqrt{\lambda_l}\, t\right) f_l(x_1, \ldots, x_n).$$

Параболическое дифференциальное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$r\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in G,$$

при условии

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, \ldots, x_n), \left(hu + g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial G} = 0 \quad \text{при } t > 0.$$

Пусть для L выполняются те же самые предположения, что и в случае однородного гиперболического дифференциального уравнения. *Формальное решение* имеет вид

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{a_k e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t c_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)}\, ds\right\} f_k(x_1, \ldots, x_n).$$

При этом a_k и c_k задаются формулами (3.60) и (3.61).

Эллиптическое дифференциальное уравнение. Ищется решение $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ эллиптического уравнения

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + F(t, x_1, \ldots, x_n)$$

в области $z_l = \{(t, x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in G, 0 < t < l\}$ с

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, \ldots, x_n), \quad u|_{t=l} = u_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in G,$$

$$\left(hu + g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial G} = 0, \qquad 0 < t < l.$$

Формальное решение этой краевой задачи имеет вид

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}\, l} + b_k\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}\, t}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}\, l} - \int\limits_0^l G_k(t, s) c_k(s)\, ds\right\} f_k,$$

где a_k и c_k вычисляются по формулам (3.60) и (3.61), а b_k — по формуле

$$b_k = \int\limits_G u_1 f_k r\, dx_1 \ldots dx_n;$$

$G_k(t, \bar{t})$ — функция Грина краевой задачи $-v''(t) + \lambda_k v(t) = 0$ при условии $v(0) = v(l) = 0$ (см. табл. 3.5 в 3.3.1.7.1).

Пример 71. *Колебание закрепленной струны длины l.* Найти решение гиперболического дифференциального уравнения

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u'_t|_{t=0} = u_1(x)$ и краевыми условиями $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$.

В этом примере G совпадает с интервалом $0 < x < l$, L определяется формулой $Lv = -a^2\dfrac{d^2v}{dx^2}$ и соответствующая задача о собственных значениях $Lv = \lambda v$ при $v(0) = v(l) = 0$ имеет положительные собственные значения $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k a}{l}\right)^2$ с собственными функциями $f_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi k x}{l}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Формальное решение задается рядом

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\frac{\pi k a}{l}t + b_k\sin\frac{\pi k a}{l}t\right\}\sin\frac{\pi k x}{l},$$

где

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\, dx,$$

$$b_k = \frac{\sqrt{2l}}{\pi k a}\int\limits_0^l u_1(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\, dx,$$

или рядом

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} d_k\sin\frac{\pi k x}{l}\sin\left(\frac{\pi k a}{l}t + e_k\right),$$

где $d_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$, $\sin e_k = a_k/d_k$, $\cos e_k = b_k/d_k$.

Если u_0 дважды непрерывно дифференцируема, а u_1 непрерывно дифференцируема, то ряд для $u(t, x)$ равномерно сходится. Если u_0 четырежды непрерывно дифференцируема, а u_1 трижды непрерывно дифференцируема, то почленным дифференцированием можно доказать, что $u(t, x)$ есть решение поставленной задачи.

Каждое гармоническое колебание образует стоячую волну с собственной частотой $\dfrac{\pi k a}{l}$ и амплитудой $d_k\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi k x}{l}$. Точки нулевой амплитуды $x_{0n} = \dfrac{n}{k}l$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, k)$ называются *узловыми точками*, а точки $x_{mn} = \dfrac{2n+1}{2k}l$ $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$ — *точками максимальной амплитуды* или *пучностями*. Гармоническое колебание с $\lambda_1 = \left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2$ называется *основным тоном*: прочие гармонические колебания с λ_2, λ_3, … — *обертонами*. Суммарное действие отдельных тонов дает *тембр* звука струны.

Пример 72. *Распространение тепла в конечном стержне.* Найти решение параболического уравнения

$$u'_t = a^2 u''_{xx}$$

с начальным условием $u|_{t=0} = u_0(x)$ и краевыми условиями $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$; G, L, λ_k, f_k имеют тот же смысл, что и в примере 71; $c_k = 0$, так как $F(t, x) = 0$. Формальное решение

имеет вид

$$u(t, x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-(\pi^2k^2a^2t)/l^2}\sin\frac{\pi kx}{l},$$

где $a_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx.$

Пример 73. Продольные колебания стержня с одним свободным и одним закрепленным концом, на который в начальный момент времени действует постоянная сила p. Найти решение гиперболического уравнения

$$u''_{tt}=a^2u''_{xx}$$

с начальными условиями $u|_{t=0}=u_0(x)$, $u'_t|_{t=0}=u_1(x)$ и краевыми условиями $u'_x|_{x=0}=0$ (свободный конец), $u'_x|_{x=l}=pd$.

После введения новой неизвестной функции $\bar u=u-\frac{x^2pd}{2l}$ поставленная задача переходит в задачу

$$\bar u''_{tt}=a^2\bar u''_{xx}+\frac{a^2pd}{l}$$

с начальными условиями $\bar u|_{t=0}=u_0(x)-\frac{x^2pd}{2l}$, $\bar u'_t|_{t=0}=u_1(x)$ и однородными краевыми условиями

$$\bar u'_x|_{x=0}=0,\quad \bar u'_x|_{x=l}=0;$$

G – интервал $0<x<l$. Задача о собственных значениях $-a^2\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda y$ при условиях $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ и $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l}=0$ имеет неотрицательные собственные значения $\lambda_k=\left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2$ и соответствующие собственные функции $f_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi kx}{l}$. Формальное решение задается рядом

$$u(t,x)=\frac{x^2pd}{2l}+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar a_k\cos\frac{\pi ka}{l}t+b_k\sin\frac{\pi ka}{l}t\right)\cos\frac{\pi kx}{l};$$

при этом

$$\bar a_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\left[u_0(x)-\frac{px^2d}{2l}\right]\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$

$$b_k=\frac{\sqrt{2l}}{\pi ka}\int_0^l u_1(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx.$$

При вычислении членов ряда получаем $c_k(t)=0$, $k\geqslant 1$.

Пример 74. *Колебания закрепленной мембраны.* Найти решение гиперболического уравнения

$$u''_{tt}=a^2(u''_{xx}+u''_{yy})$$

с начальными условиями $u|_{t=0}=u_0(x, y)$, $u'_t|_{t=0}=u_1(x, y)$ и краевым условием $u|_{\partial G}=0$ для прямоугольника $G_R=\{(x,y)\,|\,0<x<p, 0<y<q\}$ или для круга $G_K=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<p^2\}$.

Задачу о собственных значениях для прямоугольника: $-a^2(v''_{xx}+v''_{yy})=\lambda v$ при условии $v|_{\partial G_R}=0$ – решим, предполагая, что $v(x, y)=v_1(x)v_2(y)$, и получим в качестве собственных значений $\lambda_{kl}=\pi^2a^2\left(\frac{k^2}{p^2}+\frac{l^2}{q^2}\right)$ и в качестве ортонормированных собственных функций

$$f_{kl}(x, y)=\frac{2}{\sqrt{pq}}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q}\qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда решение поставленной задачи для области G_R имеет вид

$$u(t, x, y)=\frac{2}{\sqrt{pq}}\sum_{k,\,l=1}^{\infty}\left\{a_{kl}\cos\left(\pi a\sqrt{\frac{k^2}{p^2}+\frac{l^2}{q^2}}\,t\right)+\right.$$

$$\left.+\,b_{kl}\sin\left(\pi a\sqrt{\frac{k^2}{p^2}+\frac{l^2}{q^2}}\,t\right)\right\}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q},$$

где

$$a_{kl}=\frac{2}{\sqrt{pq}}\int_0^p\int_0^q u_0(x, y)\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q}dx\,dy,$$

$$b_{kl}=\frac{2\sqrt{pq}}{\pi a\sqrt{k^2q^2+l^2p^2}}\int_0^p\int_0^q u_1(x, y)\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q}dx\,dy.$$

Задача о собственных значениях для круга: $-a^2(v''_{xx}+v''_{yy})=\lambda v$ при условии $v|_{\partial G_K}=0$ – имеет собственные значения $\lambda_{kl}=\mu_{kl}^2\frac{a^2}{p^2}$ и соответствующие собственные функции

$$f_{kl}(x, y)=\frac{1}{p\sqrt{\pi}\,|J'_k(\mu_{kl})|}J_k\left(\mu_{kl}\frac{\rho}{p}\right)e^{ik\varphi},$$

где $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ $(k=0, 1, \ldots;\ l=1, 2, \ldots)$, причем μ_{kl} – положительные корни уравнения $J_k(t)=0$ ($J_k(t)$ – функция Бесселя 1-го рода k-го порядка, см. 3.3.2.3.4). Формальное решение поставленной задачи записывается в виде ряда

$$u(t, x, y)=\frac{1}{\pi p^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(a_{kl}\cos\left(\frac{\mu_{kl}a}{p}t\right)+\right.$$

$$\left.+\,b_{kl}\sin\left(\frac{\mu_{kl}a}{p}t\right)\right)\frac{J_k\left(\mu_{kl}\frac{\rho}{p}\right)}{(J'_k(\mu_{kl}))^2}e^{ik\varphi},$$

где

$$a_{kl}=\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}u_0(x, y)J_k\left(\mu_{kl}\frac{\rho}{p}\right)e^{-ik\varphi}\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$b_{kl}=\frac{p}{a\mu_{kl}}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}u_1(x, y)J_k\left(\mu_{kl}\frac{\rho}{p}\right)e^{-ik\varphi}\rho\,d\rho\,d\varphi$$

(см. 3.3.2.3.4).

Пример 75. *Смешанная задача для двумерного уравнения теплопроводности.* Найти решение параболического дифференциального уравнения

$$u'_t=a^2(u''_{xx}+u''_{yy})$$

при условиях $u|_{t=0}=u_0(x, y)$ и $u|_{\partial G_R}=0$ в области $G_R=\{(x, y)\,|\,0<x<p;\ 0<y<q\}$. Собственные функции и собственные значения оператора $Lv=-a^2(v''_{xx}+v''_{yy})$ приведены в примере 74:

$$f_{kl}=\frac{2}{\sqrt{pq}}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q}\quad\text{и}\quad \lambda_{kl}=\pi^2a^2\left(\frac{k^2}{p^2}+\frac{l^2}{q^2}\right).$$

Формальное решение дается рядом

$$u(t, x, y)=\frac{2}{\sqrt{pq}}\sum_{k,\,l=1}^{\infty}a_{kl}e^{-\pi^2a^2(k^2/p^2+l^2/q^2)t}\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q},$$

где

$$a_{kl}=\frac{2}{\sqrt{pq}}\int_0^p\int_0^q u_0(x, y)\sin\frac{\pi kx}{p}\sin\frac{\pi ly}{q}dx\,dy.$$

Пример 76. *Задача Дирихле для прямоугольника:*

$$G_R = \{(x, y) \mid 0 < x < p;\ 0 < y < q\}.$$

Найти решение эллиптического дифференциального уравнения

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

при условии $u(0, y) = u_0(y)$, $u(p, y) = u_1(y)$ и $u(x, 0) = v_0(x)$, $u(x, q) = v_1(x)$.

Сначала решается задача с краевыми условиями

$$u(0, y) = u(p, y) = 0 \text{ и } u(x, 0) = v_0(x),\ u(x, q) = v_1(x).$$

Решение задачи о собственных значениях: $Lv = -\dfrac{d^2v}{dx^2} = \lambda v$ при условии $v(0) = v(p) = 0$ – имеет вид $f_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{p}}\sin\dfrac{\pi kx}{p}$ и $\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{p^2}$. При этом формальное решение получается в виде ряда

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi kx}{p}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi kq}{p}} \left\{a_k \operatorname{sh}\frac{\pi k(q-y)}{p} + b_k \operatorname{sh}\frac{\pi ky}{p}\right\},$$

где

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p v_0(x)\sin\frac{\pi kx}{p}\,dx, \quad b_k = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p v_1(x)\sin\frac{\pi kx}{p}\,dx.$$

Аналогично решается задача с краевыми условиями

$$u(0, y) = u_0(y),\ u(p, y) = u_1(y),\ u(x, 0) = u(x, q) = 0.$$

Сумма двух этих решений дает формальное решение поставленной задачи.

Операторный метод. Так же как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении уравнений в частных производных можно с успехом применять операторный метод, который основан на переходе от искомой функции к ее изображению (см. 3.3.1.6). Часто применяют *преобразование Лапласа*:

$$\bar{f}(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

При этом искомую функцию считают функцией одного из независимых переменных и рассматривают остальные переменные как параметры. Для определения изображения искомой функции получают, таким образом, дифференциальное уравнение (вспомогательное уравнение), которое содержит на одно независимое переменное меньше, чем исходное уравнение. В частности, если исходное уравнение имело два независимых переменных, то в качестве вспомогательного уравнения получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Если из полученного вспомогательного уравнения удается найти изображение искомой функции, то сама она или находится по таблице изображений, или получается по формуле обращения (см. 4.4.3).

Пример 77. Одномерное уравнение теплопроводности при постоянной температуре на концах стержня:

$$a^2u''_{xx} - u'_t = 0 \text{ при } x_0 < x < x_1,\quad t > 0,$$

с начальным условием $u|_{t=0} = u_0$ (u_0 – постоянная) и краевыми условиями $u|_{x=x_0} = A$, $u|_{x=x_1} = B$ (A, B – постоянные). Вспомогательное уравнение для функции

$$\bar{u}(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t, x)\,dt$$

имеет вид

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{1}{a^2}(p\bar{u} - u_0) = 0.$$

При $u_0 = 0$ коэффициенты $c_1(p)$ и $c_2(p)$ в общем решении вспомогательного уравнения $\bar{u}(p, x) = c_1(p)e^{x\sqrt{p}/a} + c_2(p)e^{-x\sqrt{p}/a}$ вычисляются из преобразованных краевых условий $\bar{u}(p, x_0) = A/p$ и $\bar{u}(p, x_1) = B/p$. Если $x_0 = 0$ и $A = 0$, то получим

$$\bar{u}(p, x) = B\frac{\operatorname{sh}\dfrac{x\sqrt{p}}{a}}{p\operatorname{sh}\dfrac{x_1\sqrt{p}}{a}}$$

и затем после обратного преобразования

$$u(t, x) = B\left\{\frac{x}{x_1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}e^{-(k\pi a/x_1)^2 t}\sin\frac{\pi kx}{x_1}\right\}.$$

Пример 78. Пусть стержень длины l находится в состоянии покоя и его конец $x = 0$ закреплен. В момент времени $t = 0$ на свободный конец стержня действует сила F. Найти решение гиперболического уравнения

$$u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0 \text{ для } 0 < x < l,\quad t > 0$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = 0$, $u'_t|_{t=0} = 0$ и краевыми условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=l} = F/E$ (E – модуль упругости). Вспомогательное уравнение имеет вид $\dfrac{d^2\bar{u}}{dx^2} = \dfrac{p^2}{a^2}\bar{u}$ с условиями $\bar{u}|_{x=0} = 0$ и $\left.\dfrac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=l} = \dfrac{F}{pE}$. В качестве решения преобразованной задачи получим

$$\bar{u}(p, x) = \frac{Fa}{p^2E}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{xp}{a}}{\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}};$$

после обратного преобразования находим решение поставленной задачи:

$$u(t, x) = \frac{Fx}{E} - \frac{8Fl}{\pi^2E}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

3.3.2.3.3. Гиперболические дифференциальные уравнения. Случай двух независимых переменных. Каноническая форма линейных гиперболических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными имеет вид

$$u''_{xy} = f(x, y, u, u'_x, u'_y) \tag{3.62}$$

с характеристиками $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Предположим, что функция f непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условию Липшица (например, условие Липшица выполняется, если f имеет непрерывные частные производные по u, p и q):

$$|f(x, y, u, p, q) - f(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \leqslant M\{|u - \bar{u}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|\}.$$

Тогда справедливы следующие теоремы существования и единственности для соответствующих корректно поставленных задач.

а) Задача с начальными значениями. Существует однозначное решение уравнения (3.62) с начальными условиями $u(x, \varphi(x)) = u_0(x)$ и $\partial u/\partial n(x, \varphi(x)) = u_1(x)$, где $y = \varphi(x)$ – заданная кри-

вая C такая, что $\varphi'(x) \neq 0$, $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к C и u_0, u_1 – произвольно заданные непрерывные функции на кривой C такие, что производная u_0' существует и непрерывна. Решение $u(x_0, y_0)$ зависит только от начальных значений на отрезке C_0 кривой C, отсеченном характеристиками P_0B_0 и P_0A_0. Изменение начальных данных вне C_0 не влияет на решение в точке

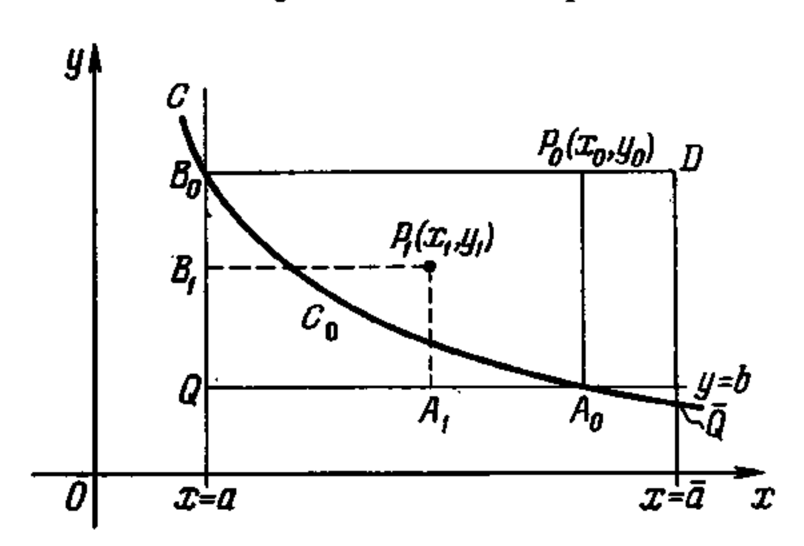


Рис. 3.69

P_0. Отрезок C_0 называется *областью зависимости* решения в точке P_0 (рис. 3.69).

б) Задача с начальными значениями на характеристиках. Пусть функция $h(x)$ непрерывно дифференцируема на характеристике $y = b$, а функция $g(y)$ – на $x = a$ с условием совместности $h(a) = g(b)$. Тогда существует единственное решение уравнения (3.62), принимающее заданные значения на характеристиках $x = a$ или $y = b$:

$$u(x, b) = h(x), \; u(a, y) = g(y).$$

Область зависимости решения в точке P_1 состоит из $\overline{B_1Q} \cup \overline{A_1Q}$, т. е. изменение начальных значений h, g вне $\overline{B_1Q} \cup \overline{A_1Q}$ не влияет на решение в точке P_1 (см. рис. 3.69).

в) Смешанная задача. Пусть $u_0(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на C: $y = \varphi(x)$, а $g(y)$ – на характеристике $x = \bar{a}$, причем выполнено условие совместности $u_0(\bar{a}) = g(\varphi(\bar{a}))$. Тогда существует однозначное решение уравнения (3.62) в области вида B_0QDB_0 (см. рис. 3.69), которое на C и на $x = \bar{a}$ принимает заданные значения

$$u(x, \varphi(x)) = u_0(x), \; u(\bar{a}, y) = g(y).$$

Формулу решения в явном виде для задачи с начальными значениями на кривой или на характеристиках для дифференциального уравнения

$$Lu = h(x, y),$$

где

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u,$$

получают *методом Римана*.

Предполагается, что функции a, b непрерывно дифференцируемы и c, h – непрерывные функции.

Сопряженное к L *дифференциальное* выражение определяется формулой

$$Mv = \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + cv.$$

Если $a = b = 0$, то $Lu = Mu$ и оператор L называется *самосопряженным*. Функция $G(x, y; x_0, y_0)$ должна, кроме аргументов x, y, зависеть еще от параметров x_0, y_0 и удовлетворять следующим условиям:

1) G как функция x, y удовлетворяет сопряженному дифференциальному уравнению $MG = 0$;

2) $G_x'(x, y_0; x_0, y_0) - b(x, y_0)G(x, y_0; x_0, y_0) = 0$ (для $y = y_0$),

$G_y'(x_0, y; x_0, y_0) - a(x_0, y)G(x_0, y; x_0, y_0) = 0$ (для $x = x_0$);

3) $G(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$.

Значения функции G на характеристиках $x = x_0$ и $y = y_0$ определяются из условий 2) и 3). Тогда G определяется однозначно из задачи с начальными условиями на характеристиках для уравнения $Mv = 0$. Такая функция G называется *функцией Римана*, соответствующей дифференциальному оператору L. Для функции Римана $G(x, y; x_0, y_0)$, соответствующей L, и функции Римана $H(x, y; x_0, y_0)$, соответствующей M, справедлив так называемый *закон взаимности*:

$$H(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y),$$

т. е. функция Римана дифференциального оператора L переходит в функцию Римана сопряженного дифференциального оператора M, если поменять местами параметры и аргументы. Если L – самосопряженный оператор, то функция Римана симметрична по отношению к (x, y) и (x_0, y_0). При помощи функции Римана получают *формулу представления решения задачи с начальными значениями* для $Lu = h(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ (см. рис. 3.69 и п. а)):

$$2u(P_0) = u(A_0)G(A_0; P_0) + u(B_0)G(B_0; P_0) - \int\limits_{\smile B_0A_0} ((u_x'G - uG_x' + 2buG)y_n + (u_y'G - uG_y' + 2auG)x_n)\,ds + 2\iint\limits_{\Sigma} hG\,dx\,dy,$$

если C представимо в виде $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – длина дуги и $x' \cdot y' \neq 0$, а x_n, y_n – компоненты единичной нормали к C, внешней по отношению к области $\Sigma = B_0A_0P_0B_0$. Правая часть этой формулы может быть определена через начальные данные

$$u(x(s), y(s)) = u_0(s), \; \frac{\partial u}{\partial n}(x(s), y(s)) = u_1(s),$$

так как, зная u и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ вдоль C, мы знаем также u_x' и u_y' вдоль C.

Формула представления решения для задачи с начальными значениями на характеристиках (см. рис. 3.69 и п. б)) имеет вид

$$u(P_1) = u(Q)G(Q; P_1) - \int\limits_{y_1}^{b} G(u_y' + au)_{x=a}\,dy - \int\limits_{a}^{x_1} G(u_x' + bu)_{y=b}\,dx + \iint\limits_{S} Gh\,dx\,dy,$$

где S – прямоугольник $P_1B_1QA_1$.

Пример 79. Вычислим функцию Римана для уравнения $Lu \equiv u_{xy}'' - \dfrac{1}{4}u = 0$. Оператор L является самосопряженным.

т. е. функция G симметрична. Если обратить внимание на второе и третье условия для функции Римана, то можно предположить, что $G = g(z)$, где $z = (x - x_0)(y - y_0)$, $g(0) = 1$.

Обе характеристики в точке $P_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению $z = 0$. Функция $g(z)$ является решением уравнения $z\dfrac{d^2g}{dz^2} + \dfrac{dg}{dz} - \dfrac{1}{4}g = 0$ при условии $g(0) = 1$ или, если сделать замену $z = r^2$, решением модифицированного уравнения Бесселя

$$r^2\frac{d^2g}{dr^2} + r\frac{dg}{dr} - r^2g = 0.$$

Отсюда $g = I_0(\sqrt{z})$ и $G(x, y; x_0, y_0) = I_0(\sqrt{(x - x_0)(y - y_0)})$ есть искомая функция Римана ($I_0(t)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка (см. 3.3.1.3.4)).

Пример 80. Дифференциальное уравнение распространения электрического тока по проводам (*телеграфное уравнение*) имеет вид

$$au''_{tt} + 2bu'_t + cu = u''_{xx},$$

причем $a > 0$, b и c — постоянные. Для новой неизвестной функции $\bar{u}$, определяемой соотношением $u = \bar{u}e^{-bt/a}$, получим уравнение

$$\bar{u}''_{tt} = m^2\bar{u}''_{xx} + n^2\bar{u} \quad \left(m^2 = \frac{1}{a},\ n^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}\right),$$

которое заменой независимых переменных $\bar{x} = \dfrac{n}{m}(mt + x)$, $\bar{y} = \dfrac{n}{m}(mt - x)$ приводится к виду $\bar{u}''_{\bar{x}\bar{y}} - \dfrac{1}{4}\bar{u} = 0$. Из формулы представления получается решение исходного уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям $\bar{u}|_{t=0} = u_0(x)$, $\bar{u}'_t|_{t=0} = u_1(x)$. Таким образом, подставив в формулу представления функцию Римана $G = I_0(\sqrt{(x - x_0)(y - y_0)})$ из примера 79 и возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - mt) + u_0(x + mt)) + \frac{1}{2}\int_{x-mt}^{x+mt}\left(u_1(s)\frac{1}{m}I_0\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2 - (s - x)^2}\right) - u_0(s)\frac{ntI_1((n/m)\sqrt{m^2t^2 - (s - x)^2})}{\sqrt{m^2t^2 - (s - x^2)}}\right)ds.$$

Частный случай: $a = 1/p^2$, $b = c = 0$. Тогда $m = p$, $n = 0$ и в силу того, что $I_0(0) = 1$, $I_1(0) = 0$, получим решение уравнения $u''_{tt} - p^2u''_{xx} = 0$ с начальными условиями $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u'_t|_{t=0} = u_1(x)$ в следующем виде (*формула Даламбера*):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\{u_0(x - pt) + u_0(x + pt)\} + \frac{1}{2p}\int_{x-pt}^{x+pt}u_1(s)\,ds.$$

Дифференциальное уравнение колеблющейся струны, или одномерное волновое уравнение,

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.63)$$

имеет характеристики $x \pm at = \text{const}$ (рис. 3.70) и преобразованием $\bar{t} = x - at$, $\bar{x} = x + at$ может быть приведено к каноническому виду $\bar{u}''_{\bar{t}\bar{x}} = 0$. Уравнение (3.63) имеет *общее решение*

$$u(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at),$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Функция $f_2(x - at)$ описывает возмущение, которое исходит из точки x_0 в момент времени $t = 0$ и к моменту времени t приходит в точку $x = x_0 + at$ (рис. 3.71).

Отсюда следует, что эта функция описывает волну, которая распространяется вправо со скоростью a. Аналогично $f_1(x + at)$ описывает волну,

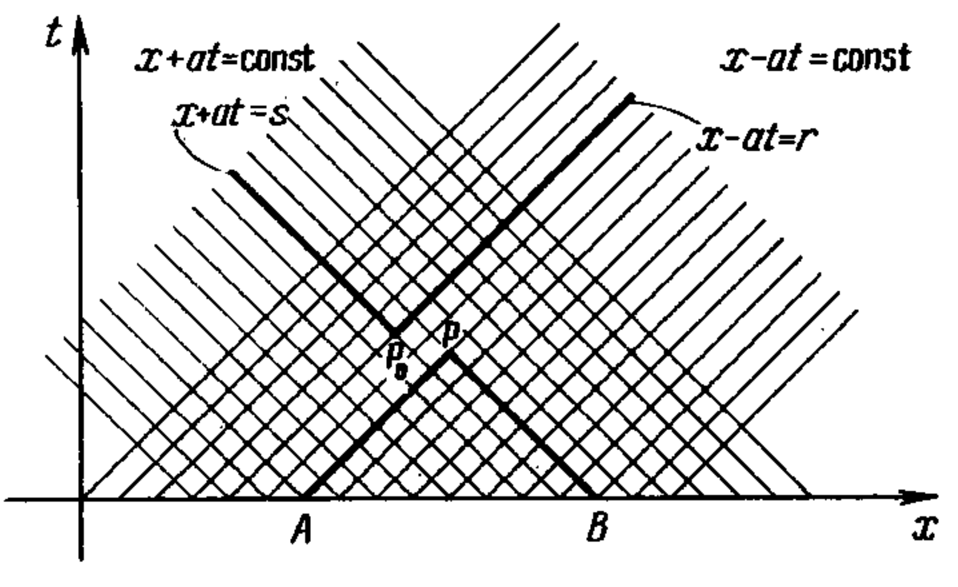


Рис. 3.70

распространяющуюся влево со скоростью a. Общее решение уравнения (3.63) есть суперпозиция этих двух волн.

Решение задачи с начальными значениями на кривой C: $t = 0$ с начальными условиями $u(0, x) = u_0(x)$, $\dfrac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x)$ имеет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x - at) + u_0(x + at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(s)ds$$

(*решение Даламбера*, см. пример 80). Это решение

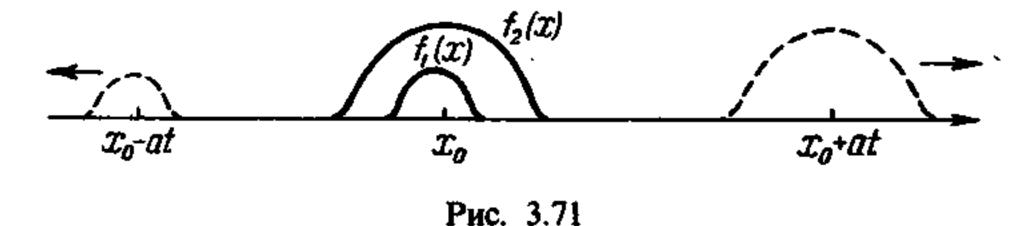


Рис. 3.71

показывает, что *область зависимости AB* решения u в точке P отсекается обеими характеристиками, проходящими через P, на оси x (см. рис. 3.70).

Задача о закрепленной струне. Найти решение уравнения (3.63) с начальными условиями $u(0, x) = u_0(x)$, $u'_t(0, x) = u_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и краевыми условиями $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Пусть при этом u_0 дважды и u_1 один раз непрерывно дифференцируемы и выполнены условия совместности $u_0(0) = u_0(l) = 0$ и $u_1(0) = u_1(l) = 0$. Если продолжить начальные значения u_0 и u_1 посредством формул $u_0(-x) = -u_0(x)$ и $u_1(-x) = u_1(x)$ на отрезок $[-l, l]$, а затем периодически на всю ось x, то при дополнительных условиях $u''_0(0) = u''_0(l) = 0$, $u'_1(0) = u'_1(l) = 0$ функция u_0 на оси x дважды, а функция u_1 один раз непрерывно дифференцируемы, и решение этой задачи дается решением Даламбера. Если исследовать эту задачу с точки зрения колебаний, то удобно использовать метод Фурье (см. пример 71).

Задача с данными на характеристиках. Пусть на $x - at = r$ задана функция $h(t)$ и на $x + at = s$ — функция $g(t)$ (см. рис. 3.70), и пусть они дважды непрерывно дифференцируемы. Будем искать такое решение уравнения (3.63), чтобы $u(r + at, t) = h(t)$ и $u(s - at, t) = g(t)$. При этом справедливо условие совместности $h\left(\dfrac{s - r}{2a}\right) = g\left(\dfrac{s - r}{2a}\right)$. Подобрав со-

ответствующим образом функции f_1 и f_2 в общем решении уравнения (3.63), получим решение этой задачи:

$$u(t,\ x) = \\ = h\left(\frac{x+at-r}{2a}\right) + g\left(\frac{s-x+at}{2a}\right) - h\left(\frac{s-r}{2a}\right).$$

Задача с начальными значениями для неоднородного одномерного волнового уравнения $u''_{tt} - a^2u''_{xx} = f(t,\ x)$ имеет решение

$$u(t,\ x) = \frac{1}{2}(u_0(x-at) + u_0(x+at)) + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(s)\,ds + \frac{1}{2a}\iint_K f(s,\ r)\,ds\,dr,$$

где $K = \{(s,\ r)\,|\,0 \leqslant s \leqslant t,\ |r-x| \leqslant a\,|t-s|\}$ (принцип Дюамеля).

Случай более чем двух независимых переменных. Решение задачи о начальных значениях для двумерного волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$ при условиях $u(0,\ x_1,\ x_2) = u_0(x_1,\ x_2)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\ x_1,\ x_2) = u_1(x_1,\ x_2)$ дается *формулой Пуассона*

$$u(t,\ x_1,\ x_2) = \frac{1}{2\pi a}\left(\iint\limits_{K_{at}^{(x_1,\ x_2)}} \frac{u_1(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)}{\sqrt{a^2t^2-\bar{r}^2}}\,d\bar{x}_1\,d\bar{x}_2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{K_{at}^{(x_1,\ x_2)}} \frac{u_0(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)}{\sqrt{a^2t^2-\bar{r}^2}}\,d\bar{x}_1\,d\bar{x}_2\right)\right) \quad (3.64)$$

($\bar{r}^2 = (\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{x}_2 - x_2)^2$). При этом предполагается, что u_0 трижды и u_1 дважды непрерывно дифференцируемы. Область $K_{at}^{(x_1,\ x_2)}$ есть круг в ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$)-плоскости с центром (x_1, x_2) и радиусом at.

Пусть $M_t^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}[f]$ обозначает среднее значение функции $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ на сфере $S_t^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}$ радиуса t с центром (x_1, x_2, x_3):

$$M_t^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}[f] = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_1 + t\cos\varphi\sin\theta, \\ x_2 + t\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 + t\cos\theta)\cos\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Решение задачи о начальных значениях для трехмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)$$

при условиях $u(0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = u_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\dfrac{\partial u(0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial t} = u_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$ (u_0 трижды и u_1 дважды непрерывно дифференцируемы) дается *формулой Кирхгофа*

$$u(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = \\ = tM_{at}^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}[u_1] + \frac{\partial}{\partial t}\left(tM_{at}^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}[u_0]\right). \quad (3.65)$$

Истолкование формул (3.64) *и* (3.65). Пусть начальные возмущения u_0 и u_1 отличны от нуля лишь в каждой области G вблизи начала координат. Решение (3.64) показывает, что вне области, ограниченной огибающей E таких окружностей $S_{at}^{(x_1,\ x_2)}$, что $(x_1,\ x_2) \in G$, имеет место состояние покоя; напротив, решение внутри области, ограниченной огибающей, в общем случае не равно нулю

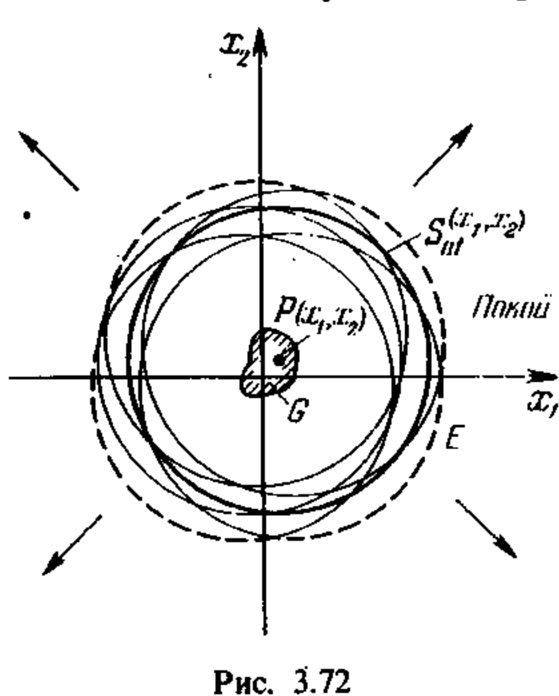


Рис. 3.72

(рис. 3.72). Решение имеет только внешний волновой фронт.

Формула (3.65) показывает, что в общем случае в области, ограниченной огибающей E_1 и лежащей вне области, ограниченной E_2, решение не равно нулю. В области, ограниченной E_2, и вне области, ограниченной E_1, имеет место состояние покоя (рис. 3.73). В этом случае решение имеет четкий внешний и внутренний волновой фронт.

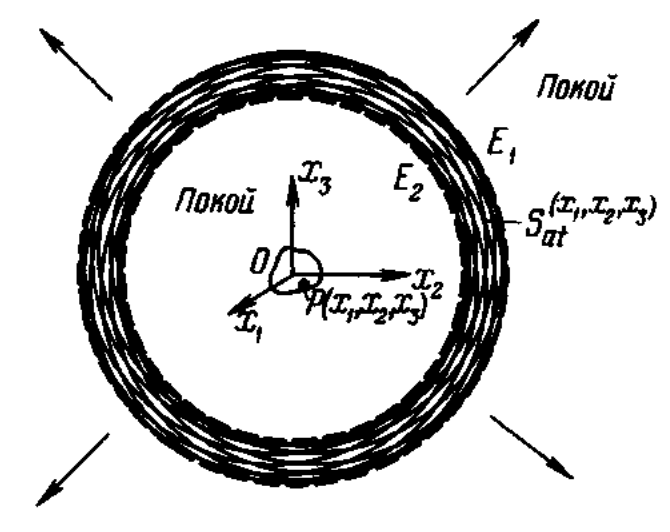


Рис. 3.73

Неоднородное волновое уравнение $u''_{tt} - a^2\Delta u = f(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Как и в случае неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение складывается из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного волнового уравнения. Для того чтобы получить частное решение неоднородного уравнения, пользуются *принципом Дюамеля*: решают задачу с начальными значениями $\bar{u}''_{tt} - a^2\Delta\bar{u} = 0$ при условии $\bar{u}(0,\ x_1,\ldots,\ x_n;\ s) = 0$ и $\bar{u}'_t(0,\ x_1,\ldots,\ x_n;\ s) = f(s,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ для однородного волнового уравнения с параметром s. Тогда функция

$$u(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \int_0^t \bar{u}(t-s,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ s)\,ds$$

представляет собой частное решение неоднородного волнового уравнения с однородными начальными условиями. Таким образом, общее решение

трехмерного волнового уравнения получается в виде

$$u(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3) =$$
$$= tM_{at}^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}[u_1] + \frac{\partial}{\partial t}\left(tM_{at}^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}[u_0]\right) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{K_{at}^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}} \frac{f\left(t - \frac{\bar r}{a},\ \bar x_1,\ \bar x_2,\ \bar x_3\right)}{\bar r} d\bar x_1\, d\bar x_2\, d\bar x_3,$$

где $\bar r^2 = \sum_{i=1}^{3} (\bar x_i - x_i)^2$. В случае двумерного волнового уравнения к решению однородного уравнения нужно прибавить частное решение неоднородного уравнения, например,

$$\frac{1}{2\pi a}\iiint\limits_K \frac{f(\bar t,\ \bar x_1,\ \bar x_2)\, d\bar t\, d\bar x_1\, d\bar x_2}{(a^2(\bar t - t)^2 - (\bar x_1 - x_1)^2 - (\bar x_2 - x_2)^2)^{1/2}},$$

где K — область $(\bar x_1,\ \bar x_2,\ \bar t)$-пространства, определяемая неравенствами

$$0 \leqslant \bar t \leqslant t,\ (\bar x_1 - x_1)^2 + (\bar x_2 - x_2)^2 \leqslant a^2(\bar t - t)^2.$$

Выражение

$$\iiint\limits_{K_{at}^{(x_1,\ x_2,\ x_3)}} \frac{f(t - \frac{\bar r}{a},\ \bar x_1,\ \bar x_2,\ \bar x_3)}{\bar r} d\bar x_1\, d\bar x_2\, d\bar x_3$$

называется *запаздывающим потенциалом*, так как функция f берется не в момент времени t, а в более ранний момент времени.

При рассмотрении смешанной задачи в случае волнового уравнения следует обратиться к 3.3.2.3.2. Такие задачи часто можно решать методом Фурье.

Частные решения одномерного волнового уравнения $u_{tt}'' - a^2 u_{xx}'' = 0$ имеют вид

$$u(t,\ x) = C\cos(\omega t + C_1)\cos(kx + C_2) \quad (\omega = ka),$$
$$u(t,\ x) = C_1\cos(\omega t \mp kx) + C_2\sin(\omega t \mp kx) =$$
$$= C\cos(\omega t \mp kx + c).$$

Частные решения двумерного и трехмерного волнового уравнения $u_{tt}'' - a^2\,\Delta u = 0$ имеют вид

$$u(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \bar u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\, e^{\pm i\omega t} \quad (\omega = ka),$$

где $\bar u$ есть решение уравнения Гельмгольца $\Delta\bar u + k^2\bar u = 0$ с произвольной постоянной k (ср. частное решение уравнения Гельмгольца; см. 3.3.2.3.4). Отсюда получаются следующие частные решения:

$$u(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3) =$$
$$= A\cos(\omega t \mp (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3) + c)$$
$$(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2;\quad \omega = ka),$$
$$u(t,\ \rho,\ \varphi,\ z) =$$
$$= Z_m(\rho\sqrt{k^2 - K^2})\cos(\omega t \mp Kz \mp m\varphi + c)$$
$$(m = 0,\ 1,\ \ldots;\quad \omega = ka),$$
$$u(t,\ \rho,\ \theta,\ \varphi) = \frac{1}{\rho} J_{j+1/2}(k\rho)\, Y_j(\theta,\ \varphi)\cos(\omega t + c)$$
$$(j = 0, 1, \ldots;\ \omega = ka),$$
$$u(t,\ \rho,\ \theta,\ \varphi) = \frac{A}{\rho}\cos(\omega t \mp k\rho + c) \quad (\omega = ka),$$
$$u(t,\ \rho,\ \theta,\ \varphi) =$$
$$= A\left[\frac{1}{k\rho^2}\cos(\omega t \mp k\rho) \mp \frac{1}{\rho}\sin(\omega t \mp k\rho)\right]\cos\theta$$
$$(\omega = ka),$$
$$u(t,\ \rho,\ \varphi) =$$
$$= Z_m(k\rho)\,[A\cos m\varphi + B\sin m\varphi]\,[A^1\cos\omega t +$$
$$+ B^1\sin\omega t] \quad (m = 0, 1, \ldots;\ \omega = ka).$$

Здесь $(\rho,\ \varphi,\ z)$ — цилиндрические координаты: $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$, $x_3 = z$; $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ — сферические координаты: $x_1 = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $x_2 = \rho\sin\varphi \times \sin\theta$, $x_3 = \rho\cos\theta$ в $\mathbf{R}^3$; $(\rho,\ \varphi)$ — полярные координаты: $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$ в $\mathbf{R}^2$; $Z_m(x)$ — цилиндрические функции (решение дифференциального уравнения Бесселя) и $J_{j+1/2}$ — сферические функции Бесселя (ср. 3.3.1.3.4), Y_j — шаровая функция (см. 3.3.2.3.4), k — произвольная постоянная.

3.3.2.3.4. Эллиптические дифференциальные уравнения. Исследуется задача о собственных значениях *задачи Штурма — Лиувилля*

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu = \lambda u, \quad (x_1, \ldots, x_n)\in G, \tag{3.66}$$

с краевыми условиями

$$\left.\left(fu + g\,\frac{\partial u}{\partial u}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{3.67}$$

(например, при $p \equiv 1$ и $q \equiv 0$ $Lu = -\Delta u$); при этом G — ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂G и $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к ∂G. Пусть для $(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\bar G = G\bigcup\partial G$ справедливы следующие условия:

$$p(x_1,\ \ldots,\ x_n) > 0,\quad q(x_1,\ \ldots,\ x_n) \geqslant 0,$$

p непрерывно дифференцируема и q непрерывна. Пусть для $(x_1, \ldots, x_n)\in\partial G$ выполняются неравенства $f(x_1,\ \ldots,\ x_n) \geqslant 0$, $g(x_1,\ \ldots,\ x_n) \geqslant 0$, $f + g > 0$ и f, g непрерывны. Ищем нетривиальные решения u (т. е. ненулевые), которые дважды непрерывно дифференцируемы в G и непрерывно дифференцируемы в $\bar G$.

Для L справедливы *первая формула Грина*

$$\iint\limits_G v\, Lu\, dx_1\ldots dx_n = \iint\limits_G p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_1\ldots dx_n -$$
$$- \int\limits_{\partial G} pv\,\frac{\partial u}{\partial n}dS + \iint\limits_G quv\, c\,dx_1\ldots dx_n$$

и *вторая формула Грина*

$$\iint\limits_G (vLu - uLv)\, dx_1\ldots dx_n = \int\limits_{\partial G} p\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS;$$

при этом предполагается, что u, v дважды непре-

рывно дифференцируемы в G и один раз – в $\bar{G}$; dS есть элемент поверхности границы ∂G.

Оператор L эрмитов (*самосопряженный*), т. е. выполняется равенство $\iint\limits_G uLv\,dx_1\dots dx_n = \iint\limits_G vLu\,dx_1\dots dx_n$ для всех $u, v \in D$, где функция u, удовлетворяющая краевым условиям (3.67), содержится в множестве функций D, если она дважды непрерывно дифференцируема в G, один раз – в $\bar{G}$ и если $\iint\limits_G (Lu)^2\,dx_1\dots dx_n < \infty$.

L – положительный оператор, т. е. $(Lu,\ u) = \iint\limits_G uLu\,dx_1\dots dx_n \geqslant 0$ для всех $u \in D$. Это свойство следует из неравенства

$$\iint\limits_G uLu\,dx_1\dots dx_n \geqslant p_0 \iint\limits_G \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\dots dx_n,$$

где

$$p_0 = \min_{(x_1,\ \dots,\ x_n)\in G} p(x_1,\ \dots,\ x_n),\ u \in D.$$

Нетривиальное решение задачи о собственных значениях задачи Штурма – Лиувилля (3.66), (3.67) называется *собственной функцией*, а соответствующее ей λ – *собственным значением*.

Свойства собственных функций и собственных значений поставленной задачи таковы:

а) Собственные значения оператора L неотрицательны.

б) Собственные функции оператора L, принадлежащие различным собственным значениям, взаимно ортогональны, т. е. из $Lu = \lambda u$ и $L\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$ при $\lambda \neq \bar{\lambda}$ следует, что

$$\iint\limits_G u\bar{u}\,dx_1\dots dx_n = 0.$$

в) $\lambda = 0$ только тогда является собственным значением оператора L, когда $q = 0$ и $f = 0$. При этом $\lambda = 0$ – простое собственное значение (т. е. существует только одна собственная функция для этого собственного значения) и $u_0 = \mathrm{const}$ – соответствующая ему собственная функция.

Для выявления дальнейших свойств заменим краевые условия (3.67). Будем считать, что

$$u\,|_{\partial G} = 0 \text{ или } \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + fu\right)\right|_{\partial G} = 0 \quad (f \geqslant 0). \quad (3.68)$$

г) Множество собственных значений оператора L счетно и не имеет конечных точек накопления. Для каждого собственного значения может существовать только конечное число собственных функций.

Таким образом, собственные значения можно расположить в возрастающем порядке $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$ с $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$; при этом λ_k пишется столько раз, сколько линейно независимых собственных функций соответствует этому собственному значению. Собственные функции обозначаются как $u_1,\ u_2,\ \dots$ и удовлетворяют условиям $Lu_k = \lambda_k u_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ и $u_k \in D$. Можно предполагать, что собственные функции ортонормированы:

$$\iint\limits_G u_k u_l\,dx_1\,dx_2\dots dx_n = \delta_{kl}.$$

д) Каждая функция $u \in D$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям оператора L:

$$u(x_1,\ \dots,\ x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x_1,\ \dots,\ x_n),$$

где

$$c_k = \iint\limits_G u u_k\,dx_1\dots dx_n. \quad (3.69)$$

е) Система собственных функций оператора L плотна в $L_2(G)$.

ж) Если $u \in D$, то ряд (3.69) можно почленно продифференцировать по x_i. Полученные при этом ряды сходятся в $L_2(G)$ к $\partial u/\partial x_i$, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_G \left(\sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\dots dx_n = 0.$$

з) Если подставить вместо p и q функции $\bar{p}$ и $\bar{q}$ такие, что $\bar{p} \geqslant p$, $\bar{q} \leqslant q$, то это приведет к возрастанию собственных значений, т. е. к $\bar{\lambda}_k \geqslant \lambda_k$. Аналогично для $\bar{p} \leqslant p$ и $\bar{q} \geqslant q$ получаем $\bar{\lambda}_k \leqslant \lambda_k$.

и) Расширение области G влечет за собой уменьшение собственных значений (при краевых условиях $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0$ или $u\,|_{\partial G} = 0$).

к) Каждое собственное значение λ_k, которое связано с краевыми условиями вида $\left.\left(fu + g\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0$, где $f/g \geqslant 0$, есть неубывающая функция f/g.

Замечание. Все результаты остаются в силе, если задача Штурма – Лиувилля имеет вид

$$Lu = \lambda\rho u, \quad \left.\left(fu + g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0,$$

где функция ρ положительна и непрерывна в $\bar{G}$. Вместо элемента объема $dx_1\dots dx_n$ в этом случае вводят элемент объема $\rho(x_1,\ \dots,\ x_n)\,dx_1\ \dots\ dx_n$.

Для вычисления собственных значений и собственных функций часто применяют метод Фурье, который основан на разделении переменных (см. 3.3.2.1 и 3.3.2.3.2).

Пример 81. Пусть поставлена задача Штурма – Лиувилля

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u\,|_{\partial G} = 0$$

для области $G = \{(x,\ y)\,|\,x^2 + y^2 < R^2\}$ в $(x,\ y)$-пространстве. В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \rho < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, дифференциальное уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2} = \lambda\tilde{u}$$

при условии, что $\tilde{u}(R,\ \varphi) = 0$, и при дополнительных условиях на $\tilde{u}(\rho,\ \varphi)$: $\tilde{u}(\rho,\ \varphi)\,|_{\rho=0}$ ограничена и $\tilde{u}(\rho,\ \varphi) = \tilde{u}(\rho,\ \varphi + 2\pi)$. Полагая $\tilde{u}(\rho,\ \varphi) = v(\varphi)\,w(\rho)$, получим $-v'' = \mu v$ (при условии $v(\varphi) = v(\varphi + 2\pi)$) и $\rho(\rho w')' + (\rho^2\lambda - \mu)w = 0$ (при условии $w(0) \neq \infty$, $w(R) = 0$). Из первой задачи о собственных значениях для v легко вычислить $\mu_k = k^2$ и собственные функции

$$v_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\varphi, \\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\varphi. \end{cases}$$

Преобразование $\rho\sqrt{\lambda} = \bar\rho$ приводит дифференциальное уравнение для w к дифференциальному уравнению для бесселевых функций

$$\bar\rho \frac{d}{d\bar\rho}\left(\bar\rho \frac{d\bar w}{d\bar\rho}\right) + (\rho^2 - k^2)\bar w = 0;$$

учитывая условие $\bar w(0) \neq \infty$, получим решение $w(\rho) = J_k(\sqrt{\lambda}\,\rho)$ ($J_k(t)$ – функция Бесселя 1-го рода k-го порядка; ср. 3.3.1.3.4). Здесь $J_k(\sqrt{\lambda}\,R) = 0$, т. е. $\sqrt{\lambda}\,R = \mu_{kj}$, где μ_{kj} ($j = 1, 2, \ldots$) – положительные корни функции Бесселя $J_k(t)$. В качестве собственных значений и нормированных собственных функций при $\mu_k = k^2$ получаем

$$\lambda_{kj} = \frac{1}{R^2}\mu_{kj}^2, \quad w_{kj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{R\,|J_k'(\mu_{kj})|} J_k\left(\mu_{kj}\frac{\rho}{R}\right).$$

Таким образом, собственные значения и собственные функции поставленной задачи о собственных значениях равны

$$\lambda_{kj} = \frac{1}{R^2}\mu_{kj}^2,$$

$$u_{kj}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{R\,|J_k'(\mu_{kj})|} J_k\left(\mu_{kj}\frac{\rho}{R}\right)\begin{cases}\sin k\varphi,\\ \cos k\varphi.\end{cases}$$

Гармонические функции. Функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, которая в области G пространства $\mathbf{R}^n$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется *гармонической функцией* в G.

Некоторые виды гармонических функций.

В декартовых координатах при $n = 3$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3}$$

(k_i – произвольные комплексные числа такие, что $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$),

$$u(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + b_1x_1)(a_2 + b_2x_2)(a_3 + b_3x_3)$$

(a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) – произвольные числа);

при $n = 2$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

$$u(x_1, x_2) = e^{\pm k(x_1 + ix_2)},$$

$$u(x_1, x_2) = (a_1 + b_1x_1)(a_2 + b_2x_2)$$

(k, a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные числа).

В цилиндрических координатах при $n = 3$:

$$x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi,\ x_3 = z,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Разделение переменных $u = u_1(\varphi)\,u_2(\rho)\,u_3(z)$ приводит к трем уравнениям:

$$\frac{d^2u_1(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2u_1(\varphi) = 0, \tag{3.70}$$

$$\frac{d^2u_2(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_2(\rho)}{d\rho} + \left(K^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)u_2(\rho) = 0,$$

$$\frac{d^2u_3(z)}{dz^2} - K^2u_3(z) = 0, \tag{3.71}$$

причем требование $u_1(\varphi) = u_1(\varphi + 2\pi)$ учтено условием, что m – целое; K – произвольная постоянная. Тогда

$$u(\varphi, \rho, z) = e^{\pm Kz}Z_m(K\rho)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi),$$

$$u(\varphi, \rho, z) = e^{\pm Kz}Z_0(K\rho)(a + b\varphi),$$

$$u(\varphi, \rho, z) = (A + Bz)\left(\alpha\rho^m + \frac{\beta}{\rho^m}\right)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi),$$

$$u(\varphi, \rho, z) = (A + Bz)(\alpha + \beta\ln\rho)(a + b\varphi)$$

(a, b, A, B, α, β – произвольные параметры), $Z_m(x)$ – цилиндрические функции (решения дифференциального уравнения Бесселя). Если потребовать, чтобы гармоническая функция u была ограниченной при $\rho = 0$, то вместо $Z_m(x)$ надо подставить функцию Бесселя $J_m(x)$ (ср. 3.3.1.3.4).

В сферических координатах при $n = 3$:

$$x_1 = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ x_2 = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 = \rho\cos\theta,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Разделение переменных $u = u_1(\varphi)\,u_2(\cos\theta)\,u_3(\rho)$ приводит к уравнениям

$$\frac{d^2u_1(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2u_1(\varphi) = 0, \tag{3.72}$$

$$(1 - s^2)\frac{d^2u_2(s)}{ds^2} - 2s\frac{du_2(s)}{ds} + \left[j(j+1) - \frac{m^2}{1 - s^2}\right]u_2(s) = 0, \tag{3.73}$$

$$\frac{d^2u_3(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du_3(\rho)}{d\rho} - \frac{j(j+1)}{\rho^2}u_3(\rho) = 0$$

($s = \cos\theta$; $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm j$; $j = 0, 1, 2, \ldots$),

причем следует потребовать регулярности u_2 для $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Тогда

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(A\rho^j + \frac{B}{\rho^{j+1}}\right)P_j^m(\cos\theta)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi)$$

с многочленами Лежандра $P_j^m(s)$ (см. 3.3.1.3.4),

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(A\rho^j + \frac{B}{\rho^{j+1}}\right)Y_j(\theta, \varphi) \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

с шаровыми функциями

$$Y_j(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{j} P_j^m(\cos\theta)(a_m\cos m\varphi + b_m\sin m\varphi).$$

При $n = 2$:

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$u(\rho, \varphi) = \left(A\rho^m + \frac{B}{\rho^m}\right)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi),$$

$$u(\rho, \varphi) = A + B\ln\rho$$

(A, B, a, b – произвольные параметры; $m = 0, 1, 2, \ldots$).

Специальные решения уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$.

В декартовых координатах x_1, x_2, x_3:

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)} \quad (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2),$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = (a + bx_1)e^{i(k_2x_2 + k_3x_3)} \quad (k_2^2 + k_3^2 = k^2),$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = (a + bx_1)(A + Bx_2)e^{ikx_3}.$$

В цилиндрических координатах:

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi, \quad x_3 = z.$$

Разделение переменных (в предположении, что $u(\rho, \varphi, z) = u_1(\varphi)u_2(\rho)u_3(z)$) приводит к дифференциальному уравнению (3.70) для $u_1(\varphi)$, к (3.71) для $u_3(z)$ и к уравнению

$$\frac{d^2u_2(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_2(\rho)}{d\rho} + \left((K^2 + k^2) - \frac{m^2}{\rho^2}\right)u_2(\rho) = 0$$

для $u_2(\rho)$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и K – произвольная постоянная. Тогда

$$u(\rho, \varphi, z) = e^{\pm kz}Z_m(\rho\sqrt{k^2 + K^2})(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$u(\rho, \varphi, z) = e^{\pm i\lambda z}Z_m(\rho\sqrt{k^2 - \lambda^2})(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi) \quad (K = \lambda i),$$

$$u(\rho, \varphi, z) = (A + Bz)Z_0(k\rho)(a + b\varphi).$$

В сферических координатах:

$$x_1 = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad x_2 = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad x_3 = \rho\cos\theta.$$

Разделение переменных (в предположении $u(\rho, \varphi, \theta) = u_1(\varphi)u_2(\cos\theta)u_3(\rho)$) приводит к дифференциальному уравнению (3.72) для $u_1(\varphi)$, к (3.73) для $u_2(s)$, где $s = \cos\theta$, и к уравнению

$$\frac{d^2u_3(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du_3(\rho)}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{j(j+1)}{\rho^2}\right)u_3(\rho) = 0$$

для $u_3(\rho)$. Тогда

$$u(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}J_{j+1/2}(k\rho)Y_j(\theta, \varphi),$$

$$u(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\rho}e^{\pm ik\rho},$$

где $Y_j(\theta, \varphi)$ – шаровые функции и $J_{j+1/2}$ – сферические функции Бесселя (ср. 3.3.1.3.4).

Шаровые функции. Под *шаровой функцией* Y_l порядка $l = 0, 1, \ldots$ понимают каждую *однородную гармоническую функцию* степени l, заданную на единичной сфере $S_1 \subset \mathbf{R}^n$. Шаровыми функциями в $\mathbf{R}^2$ являются тригонометрические функции

$$Y_l(\varphi) = a_l\cos l\varphi + b_l\sin l\varphi \quad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

а однородные гармонические многочлены имеют вид

$$u_l(x_1, x_2) = \rho^l(a_l\cos l\varphi + b_l\sin l\varphi) = a_l\operatorname{Re}(z^l) + b_l\operatorname{Im}(z^l),$$

где $z = x_1 + ix_2$.

Шаровые функции $Y_l(\theta, \varphi)$ в $\mathbf{R}^3$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_l}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_l = 0.$$

Функция Y_l является шаровой функцией l-го порядка тогда и только тогда, когда она дифференцируема произвольное число раз и удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Функции Φ и P (в предположении $Y_l(\theta, \varphi) = P(\cos\theta)\Phi(\varphi)$) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.74}$$

$$(1 - s^2)\frac{d^2P}{ds^2} - 2s\frac{dP}{ds} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - s^2}\right)P = 0,$$

$$s = \cos\theta, \tag{3.75}$$

причем условие $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ учтено тем, что $m = 0, 1, 2, \ldots$ При $m = 0$ уравнение (3.75) есть дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра, а при $m > 0$ – дифференциальное уравнение соответствующих функций Лежандра (ср. 3.3.1.3.4). Функции

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi & \text{при } m = 0, 1, 2, \ldots, l, \\ P_l^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi & \text{при } m = -1, -2, \ldots, -l \end{cases}$$

($l = 0, 1, 2, \ldots$) – шаровые функции в $\mathbf{R}^3$.

Шаровые функции l-го порядка ($m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$) линейно независимы, и каждая линейная комбинация

$$Y_l(\theta, \varphi) = \sum_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

вновь является шаровой функцией.

Шаровые функции Y_l^m образуют в пространстве $L_2(S_1)$ ортогональную и полную систему функций. Справедлива формула

$$\int_{S_1}(Y_l^m)^2\,dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(Y_l^m(\theta, \varphi))^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\frac{1 + \delta_{0m}}{2l+1}\frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!}.$$

Помимо указанных шаровых функций $Y_l(\theta, \varphi)$ других шаровых функций l-го порядка не существует.

Каждая функция $f \in L_2(S_1)$ может быть разложена по шаровым функциям в ряд

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(\theta, \varphi),$$

причем $Y_l(\theta, \varphi)$ вычисляются при помощи формулы Лапласа:

$$Y_l(\theta, \varphi) = \frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\bar\theta, \bar\varphi)P_l(\cos\bar\alpha)\sin\bar\theta\,d\bar\theta\,d\bar\varphi;$$

$\bar\alpha$ обозначает угол между направлением (θ, φ) и направлением $(\bar\theta, \bar\varphi)$. Кроме того, справедлива интегральная формула

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_l(\bar\theta, \bar\varphi)P_k(\cos\bar\alpha)\sin\bar\theta\,d\bar\theta\,d\bar\varphi = \frac{4}{2l+1}Y_l(\theta, \varphi)\delta_{lk}.$$

Свойства гармонических функций.

а) Для гармонической функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо следующее представление при $n \geqslant 3$:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \iint\limits_{\partial G} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y;$$

при $n = 2$:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y;$$

при этом $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $|x-y|$ — евклидово расстояние между x и y: $|x-y| = ((x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$, а

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

есть площадь поверхности n-мерной единичной сферы.

Каждая *гармоническая функция аналитична*, т. е. в каждой точке G ее можно разложить в сходящийся степенной ряд.

б$_1$) Если функция $u(x)$ гармонична в открытом шаре K_R^x с центром $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и радиусом R и непрерывна в замкнутом шаре $\bar{K}_R^x$, то ее значение в центре шара равно среднему значению по поверхности шара S_R^x:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{S_R^x} u(x-y)\, dS_y.$$

б$_2$) Пусть для функции $u(x)$, непрерывной в G, выполнено следующее условие. Предположим, что для каждой точки $x \in G$ существует число $r_0(x) > 0$ такое, что для всех $r < r_0$ справедливо соотношение

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S_r^x} u(x-y)\, dS_y.$$

Тогда функция $u(x)$ гармонична в G.

в) Если функция $u(x) \not\equiv \text{const}$ гармонична в G и непрерывна в $\bar{G}$, то в области G она не может принимать ни максимального, ни минимального значения, т. е. справедливо неравенство

$$\min_{x \in \partial G} u(x) < u(y) < \max_{x \in \partial G} u(x), \qquad y \in G.$$

Принцип максимума: гармоническая в области функция достигает максимального значения на границе области.

в$_1$) Если $u|_{\partial G} = 0$, то $u(x) \equiv 0$ в G.

в$_2$) Если функция u является гармонической в области $\mathbf{R}^n \setminus \bar{G}$, непрерывной в $\mathbf{R}^n \setminus G$ и $\lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$, то

$$|u(y)| \leqslant \max_{x \in \partial G} |u(x)|, \qquad y \in \mathbf{R}^n \setminus \bar{G}.$$

Если, в частности, $u|_{\partial G} = 0$, то $u \equiv 0$ в $\mathbf{R}^n \setminus \bar{G}$.

в$_3$) Если последовательность функций $u_1, u_2, \ldots$, гармонических в области G и непрерывных в $\bar{G}$, сходится равномерно на границе ∂G области G, то последовательность равномерно сходится в $\bar{G}$.

г) Если функция $u(x)$ является гармонической в $G \setminus \{0\}$ и удовлетворяет соотношению

при $n \geqslant 3$:

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{u(x)}{|x|^{n-2}} = 0,$$

при $n = 2$:

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{u(x)}{\ln |x|} = 0,$$

то ее можно доопределить в точке $x = 0$ так, что полученная функция будет гармонической в области G.

д) Если последовательность функций $u_1, u_2, \ldots$, гармонических в области G, слабо сходится к непрерывной функции u в G, т. е. $\lim\limits_{k \to \infty} \iint\limits_G u_k v\, dx_1 \ldots dx_n = \iint\limits_G uv\, dx_1 \ldots dx_n$ для всех бесконечно дифференцируемых в G функций v с компактным носителем в G, то u — функция, гармоническая в G.

е) Если функция u является гармонической в $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$|u(x)| \leqslant c(1 + |x|)^m, \quad x \in \mathbf{R}^n, \ m \geqslant 0, \ c \geqslant 0,$$

то u — (гармонический) многочлен степени, не большей чем m.

ж) Посредством *преобразования Кельвина* (отражение относительно сферы S_R^0 в $\mathbf{R}^n$:

$$\bar{x}_i = \frac{R^2}{|x|^2} x_i \ \text{ или } \ x_i = \frac{R^2}{|\bar{x}|^2} \bar{x}_i$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$) можно получить изображение Кельвина функции $u(x)$

при $n = 3$:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \frac{R}{|\bar{x}|} u\left(\frac{R^2}{|\bar{x}|^2} \bar{x} \right);$$

при $n = 2$:

$$\bar{u}(\bar{x}) = u\left(\frac{R^2}{|\bar{x}|^2} \bar{x} \right).$$

Если $u(x)$ — функция, гармоническая при $|x| > R$, то $\bar{u}(\bar{x})$ — функция, гармоническая в $K_R^0 \setminus \{0\}$.

з) Для функции $u(x) \geqslant 0$, гармонической в шаре K_R^0 и непрерывной в $\bar{K}_R$, справедливо *неравенство Гарнака*

$$\frac{R(R - |x|)}{(R + |x|)^2} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R(R + |x|)}{(R - |x|)^2} u(0) \ \text{ при } |x| < R.$$

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в $\mathbf{R}^3$.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$: найти функцию, гармоническую в G, которая непрерывна в $\bar{G}$ и на границе ∂G области G совпадает с заданной непрерывной функцией u_0.

Задача Неймана для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$: найти функцию, гармоническую в G, которая

непрерывна в $\bar{G}$ и на границе ∂G области G имеет заданную непрерывную производную по нормали u_1 (здесь G – ограниченная область с достаточно гладкой границей).

Аналогичные постановки задач получаются для уравнения Пуассона $\Delta u = -f$. Если f непрерывно дифференцируема в G и непрерывна в $\bar{G}$, то краевые задачи для уравнения Пуассона сводятся к соответствующим краевым задачам для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$ посредством замены $u(x) = v(x) + V(x)$, где для функции

$$V(x) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{f(y)}{|x-y|}dy_1\,dy_2\,dy_3$$

выполняется равенство $\Delta V = -f$.

Задача Дирихле для $\Delta u = 0$ и для $\Delta u = -f$ разрешима однозначно. Задача Неймана для $\Delta u = 0$ и $\Delta u = -f$ разрешима однозначно с точностью до аддитивной постоянной, если выполнено условие $\int\limits_{\partial G} u_1\,dS + \iiint\limits_G f\,dx = 0$.

Функция Грина задачи Дирихле. Функция $G(x, \bar{x})$ называется *функцией Грина* оператора Δu в области G, если она обладает следующими свойствами:

1. При всех $\bar{x}\in G$ функция $G(x, \bar{x})$ имеет вид

$$G(x, \bar{x}) = \frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|} + g(x, \bar{x}).$$

Функция $g(x, \bar{x})$ гармонична в G и непрерывна в $\bar{G}$ относительно x.

2. Если $\bar{x}\in G$, то $G(x, \bar{x})|_{x\in\partial G} = 0$.

Свойства функции Грина.

а) Функция $G(x, \bar{x})$ – гармоническая в $G\setminus\{\bar{x}\}$ и непрерывная в $\bar{G}\setminus\{\bar{x}\}$ по переменному x.

б) Для $x, \bar{x}\in G$, $\bar{x}\neq x$, выполнено неравенство

$$0 < G(x, \bar{x}) < \frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|}.$$

в) Если ∂G – достаточно гладкая поверхность (например, если параметрическое представление ∂G непрерывно дифференцируемо без особых точек), то существует и однозначно определена функция Грина $G(x, \bar{x})$; $G(x, \bar{x}) = G(\bar{x}, x)$.

Для построения функции Грина в областях со свойствами симметрии часто применяют принцип отражения.

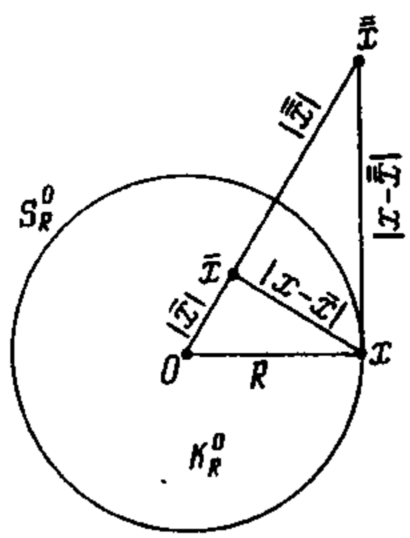


Рис. 3.74

Пример 82. Найти функцию Грина для шара K_R^0. Пусть $\bar{\bar{x}}$ – точка, симметричная $\bar{x}$ относительно S_R^0. Тогда $\bar{\bar{x}} = \frac{R^2}{|\bar{x}|^2}\bar{x}$. Будем искать функцию Грина в виде

$$G(x, \bar{x}) = \frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|} - \frac{A}{4\pi|x-\bar{\bar{x}}|}.$$

Коэффициент A подбирают так, чтобы $G(x, \bar{x})|_{x\in\partial G} = 0$. Из подобия треугольников $(Ox\bar{x})$ и $(x\bar{x}\bar{\bar{x}})$, $x\in S_R^0$ (рис. 3.74), следует, что $\frac{R}{|\bar{x}|} = \frac{|x-\bar{\bar{x}}|}{|x-\bar{x}|}$. Если выбрать $A = \frac{R}{|\bar{x}|}$, то условие $G|_{x\in\partial G} = 0$ будет выполнено. Искомая функция Грина имеет вид

$$G(x, \bar{x}) = \frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|} - \frac{R|\bar{x}|}{4\pi||\bar{x}|^2x - R^2\bar{x}|}.$$

Пример 83. Найти функцию Грина для полупространства $x_3 > 0$. Точка $\bar{\bar{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, -\bar{x}_3)$ симметрична точке $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ относительно плоскости $x_3 = 0$.

Для функции $G(x, \bar{x}) = \frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|} - \frac{A}{4\pi|x-\bar{\bar{x}}|}$ условие $G(x, \bar{x})|_{x\in\partial G} = 0$ выполнено при $A = 1$. Тогда $G(x, \bar{x}) = \frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|} - \frac{1}{4\pi|x-\bar{\bar{x}}|}$ есть искомая функция Грина.

Если решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = -f$ дифференцируемо достаточное число раз на границе ∂G области G, то оно представимо формулой

$$u(x) = -\iint\limits_{\partial G}\frac{\partial G(x, \bar{x})}{\partial n_{\bar{x}}}u_0(\bar{x})\,dS_{\bar{x}} + \iiint\limits_G G(x, \bar{x})f(\bar{x})\,d\bar{x}, \quad x\in G.$$

Формула Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{|\bar{x}|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\bar{x}|^3}u_0(\bar{x})\,dS_{\bar{x}}$$

для $|x| < R$ дает решение задачи Дирихле для шара K_R^0: $\Delta u = 0$, $u|S_R^0 = u_0$, где функция u_0 непрерывна на S_R^0.

Краевая задача $-\Delta u = \lambda u + f(x)$, $u|_{\partial G} = 0$, где f непрерывно дифференцируема в G и непрерывна в $\bar{G}$, эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda\iiint\limits_G G(x, \bar{x})u(\bar{x})\,d\bar{x} + \iiint\limits_G G(x, \bar{x})f(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Наименьшему собственному значению задачи $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_{\partial G} = 0$ принадлежит только одна (с точностью до положительного множителя) собственная функция $u_1(x)$, для которой при $x\in G$ выполняется неравенство $u_1(x) > 0$.

Краевые задачи для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^2$. Действительная или мнимая часть аналитической в комплексной плоскости функции удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbf{R}^2$.

Рассматриваются те же самые краевые задачи, что и в $\mathbf{R}^3$. При этом *задача Дирихле* однозначно разрешима для произвольной непрерывной функции u_0, заданной на ∂G. *Задача Неймана* разрешается однозначно с точностью до аддитивной постоянной, если выполнено условие разрешимости $\int\limits_{\partial G} u_0\,dS = 0$.

Функция Грина задачи Дирихле $\Delta u = 0$, $u|_{\partial G} = u_0$ для области G есть функция $G(z, \bar{\bar{z}})$ со следующими свойствами (пишут $u(x_1, x_2) \equiv u(z)$, где $z = x_1 + ix_2$):

1) $G(z, \bar{\bar{z}}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\bar{\bar{z}}|} + g(z, \bar{\bar{z}})$, причем $g(z, \bar{\bar{z}})$ – функция, гармоническая в G и непрерывная в $\bar{G}$ по z;

2) $G(z, \bar{\bar{z}})|_{z\in\partial G} = 0$.

Для функции Грина справедливо неравенство

$$0 \leqslant G(z, \bar{\bar{z}}) \leqslant \frac{1}{2\pi}\ln\frac{d}{|z-\bar{\bar{z}}|}, \qquad z\in\bar{G},\ \bar{\bar{z}}\in G;$$

где d – диаметр области G. Кроме того, справедливы все другие свойства, указанные для функции Грина в $\mathbf{R}^3$.

Функция

$$G(z, \bar{\bar{z}}) = -\frac{1}{2\pi}\ln|w(z, \bar{\bar{z}})| = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}(\ln(w(z, \bar{\bar{z}})))$$

является функцией Грина задачи Дирихле для односвязной области G, где

$$w(z, \bar{\bar{z}}) = \frac{w(z) - w(\bar{\bar{z}})}{1 - \bar{w}(\bar{\bar{z}})\,w(z)}$$

($\bar{w}$ обозначает функцию, комплексно сопряженную по отношению к функции $w = w(z)$, отображающей G в единичный круг). Задача Дирихле для круга $|z| < R$ решается по *формуле Пуассона*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\bar{\bar{z}}| = R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - \bar{\bar{z}}|^2} u_0(\bar{\bar{z}})\, dS_{\bar{\bar{z}}} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\bar{\bar{z}}| = R} \frac{\bar{\bar{z}} + z}{\bar{\bar{z}} - z} u_0(\bar{\bar{z}})\,\frac{d\bar{\bar{z}}}{\bar{\bar{z}}}\right\},$$

а для односвязной области G с краевой функцией u_0 – по формуле

$$u(z) =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} u_0(\bar{\bar{z}})\,\frac{w(\bar{\bar{z}}) + w(z)}{w(\bar{\bar{z}}) - w(z)}\,\frac{w'(\bar{\bar{z}})}{w(\bar{\bar{z}})}\,d\bar{\bar{z}}\right\}, \quad z \in G.$$

3.3.2.3.5. Параболические дифференциальные уравнения. *Уравнение теплопроводности*

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \qquad (3.76)$$

есть простой пример параболического дифференциального уравнения. Важнейшие свойства проявляются уже в случае $n = 1$ и справедливы для произвольного n.

Так называемая *первая краевая задача* (смешанная задача) является типичной задачей для параболических дифференциальных уравнений: найти функцию $u(t, x)$, которая в области $G = \{(t, x) \mid t_0 < t < T,\ \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (3.77)$$

непрерывна на $G \bigcup \partial G$ и на $\Gamma = \partial G \setminus \{(T, x) \mid \varphi_1(T) < x < \varphi_2(T)\}$ (изображена на рис. 3.75 жирной линией) принимает значения, определяемые заданной непрерывной функцией f.

Рис. 3.75

Важно заметить, что решение ищется для $t > 0$, если значения искомой функции заданы при $t = 0$. В общем случае при $t < 0$ задача не имеет решения. Уравнение (3.77) существенно изменяется, если t заменить на $-t$. Это легко объяснимо из физических соображений, так как уравнение (3.77) описывает необратимые процессы. При $t < 0$ задача поставлена некорректно, если краевые условия относятся к $t = 0$.

Имеет место принцип минимакса: каждое решение $u(t, x)$ уравнения (3.77), определенное и непрерывное на $G \bigcup \partial G$, принимает наибольшее и наименьшее значения на Γ, т. е. либо на нижней, либо на боковых линиях, ограничивающих G.

Отметим два следствия.

1. Решение первой краевой задачи уравнения теплопроводности однозначно определено в G.

2. Решение первой краевой задачи уравнения теплопроводности непрерывным образом зависит от заданной на Γ функции f.

Наряду с поставленной краевой задачей часто исследуют задачу с начальными значениями (задачу Коши): найти функцию $u(t, x)$, непрерывную и ограниченную при $t \geqslant 0$, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (3.77), а при $t = 0$ – начальному условию $u|_{t=0} = u_0(x)$, где $u_0(x)$ при всех x определена, непрерывна и ограничена.

Решение этой задачи определено однозначно и непрерывным образом зависит от функции $u_0(x)$. *Интеграл Пуассона*

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\bar{x})}{\sqrt{t}} e^{-(x - \bar{x})^2/(4ta^2)}\, d\bar{x}$$

дает решение задачи с начальными значениями.

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности (3.76) также разрешима однозначно. При этом краевую задачу следует формулировать так: найти функцию $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, непрерывную в замкнутой области, которая внутри нее удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.76), а на $t = 0$ и боковых поверхностях совпадает с заданной функцией f (рассматриваемая замкнутая область ограничивается плоскостями $t = 0$ и $t = T$, а ее боковая поверхность может быть представлена в виде объединения конечного числа гладких поверхностей, вектор нормали которых нигде не параллелен оси t).

Аналогичные результаты получим, если условие $u = f$ на границе заменить на условие $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = f$.

Указанные выше результаты могут быть перенесены на параболическое дифференциальное уравнение общего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x_1, \ldots, x_n)\,u +$$

$$+ d(t, x_1, \ldots, x_n),$$

если в каждой точке $(t, x_1, \ldots, x_n)$ рассматриваемой области квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\,p_i p_j$$

положительно определена и коэффициенты a_{ij}, b_i, c и d дифференцируемы достаточное число раз.

Частными решениями одномерного уравнения теплопроводности являются

$$u(t, x) = e^{\pm ikx - k^2a^2t},$$

$$u(t, x) = A + Bx,$$

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4a^2t)} \qquad (t > 0)$$

(k, A, B — произвольные постоянные). Функция

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = u_k(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-k^2a^2t}$$

есть частное решение n-мерного уравнения теплопроводности, если $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ есть решение уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2u = 0$ (см. 3.3.2.3.4). Другими частными решениями уравнения (3.76) являются:

при $n = 3$

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-r^2/(4a^2t)}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

при $n = 2$

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{t} e^{-r^2/(4a^2t)}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

3.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.4.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие комплексного числа представляет собой расширение понятия действительных чисел. Многие правила арифметики действительных чисел могут быть перенесены на комплексные числа. Например, биномиальная теорема или теория определителей оказываются справедливыми в области комплексных чисел. Вообще на комплексную область могут быть перенесены многие разделы действительного анализа. Так возник комплексный анализ, в основе которого лежит теория аналитических функций.

Исторически комплексные числа обязаны своим возникновением главным образом попыткам найти решения алгебраических уравнений.

3.4.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. СФЕРА РИМАНА. ОБЛАСТИ

3.4.2.1. Определение комплексных чисел. Поле комплексных чисел. *Комплексным числом* a называют упорядоченную пару $a = (\alpha, \beta)$ действительных чисел со следующими свойствами:

1) Два комплексных числа $a_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $a_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ равны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\beta_1 = \beta_2$.

2) Сумма двух комплексных чисел $a_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $a_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ определяется следующим образом:

$$a_1 + a_2 = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2).$$

3) Произведение двух комплексных чисел $a_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $a_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ определяется следующим образом:

$$a_1 \cdot a_2 = (\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1). \qquad (3.78)$$

4) Деление двух комплексных чисел $a_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ и $a_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ определяется как действие, обратное умножению:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(\alpha_1, \beta_1)}{(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2, \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}, \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\right) \qquad (3.79)$$

при $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Действительные числа содержатся в множестве комплексных чисел, а именно, все они являются парами вида $(\alpha, 0)$; условимся в дальнейшем писать $(\alpha, 0) = \alpha$.

Пары вида $(0, \beta)$ называют (*чисто*) *мнимыми числами*.

Пара $i = (0, 1)$ имеет специальное название — *мнимая единица*. По правилу 3)

$$i^2 = -1.$$

Запись $(0, \beta)$ для чисто мнимого числа эквивалентна записи $i\beta$ (так как $(0, 1)(\beta, 0) = (0 \cdot \beta - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot \beta) = (0, \beta)$).

Каждое комплексное число $a = (\alpha, \beta)$ можно записать в виде суммы действительного числа $\alpha = (\alpha, 0)$ и чисто мнимого числа $i\beta = (0, \beta)$:

$$a = (\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha + i\beta.$$

При этом $\alpha = \operatorname{Re} a$ называется *действительной частью* комплексного числа a, а $\beta = \operatorname{Im} a$ — *мнимой частью* a.

Итак:

1*) Два комплексных числа равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

2*) $a_1 + a_2 = (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2).$

3*) $a_1 \cdot a_2 = (\alpha_1 + i\beta_1) \cdot (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$

4*) $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + i(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + i\frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Пример 1.

$$\frac{(-1 + 5i)^2(3 - 4i)}{1 + 3i} + \frac{10 + 7i}{5i} = \frac{(1 - 10i - 25)(3 - 4i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} + \frac{(10 + 7i)\, i}{5i \cdot i} =$$

$$= \frac{-2(12 + 5i)(3 - 13i - 12)}{10} + \frac{-7 + 10i}{-5} = \frac{43 + 201i}{5} + \frac{7 - 10i}{5} = 10 + 38{,}2i.$$

Таким образом, вычисления с комплексными числами сводятся к выполнению действий над действительными числами. Сложение и умножение при этом коммутативны и ассоциативны. Кроме того, для них имеет силу дистрибутивный закон:

$$a_1(a_2 + a_3) = a_1a_2 + a_1a_3.$$

Комплексные числа образуют поле с нулевым элементом $0 = (0, 0)$ и единичным элементом $1 = (1, 0)$.

3.4.2.2. Сопряженные комплексные числа. Модуль комплексного числа. Под комплексным числом, *сопряженным* к $a = \alpha + i\beta$, понимают комплексное число $\bar{a}$, которое отличается от a только знаком мнимой части: $\bar{a} = \alpha - i\beta$. При этом имеют место следующие соотношения:

$\bar{\bar{a}} = a$;

$a = \bar{a}$ тогда и только тогда, когда a — действительное число;

$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}$, $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, $\overline{(a/b)} = \bar{a}/\bar{b}$, $a \cdot \bar{a} = \alpha^2 + \beta^2$;

$\operatorname{Re} a = \alpha = (a + \bar{a})/2$ — *действительная часть* a;

$\operatorname{Im} a = \beta = (a - \bar{a})/2i$ — *мнимая часть* a.

Модуль $|a|$ комплексного числа a есть неотрицательное действительное число:

$$|a| = \sqrt{a \cdot \bar{a}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Если a — действительное число, то модуль совпадает с абсолютной величиной $|a|$. На модуль комплексных чисел могут быть перенесены различные неравенства для абсолютных величин. Так, для любых комплексных чисел a, b, a_k, b_k верны соотношения

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

$|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (*неравенство треугольника*),

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$$

(*неравенство Коши — Буняковского*).

3.4.2.3. Геометрическая интерпретация. Поставим в соответствие комплексному числу $a = \alpha + i\beta$ на плоскости точку A, которая имеет абсциссу $x = \alpha$ и ординату $y = \beta$ относительно прямоугольной декартовой системы координат: $A(\alpha, \beta)$ (о числе a также говорят как о точке). Если $\vec{OA} = (\alpha, \beta)$ — радиус-вектор точки A, то он также может быть использован в качестве геометрической интерпретации числа a (рис. 3.76). Таким образом, множество точек плоскости, или множество радиус-векторов соответствующих им, взаимно однозначно соответствует множеству комплексных чисел. Вся плоскость называется *комплексной плоскостью*. Точки оси абсцисс — *действительной оси* — соответствуют действительным, а точки оси ординат — *мнимой оси* — чисто мнимым комплексным числам. Комплексное число $\bar{a}$, сопряженное к a, изображается точкой $\bar{A}$ — зеркальным образом точки A относительно действительной оси (см. рис. 3.76).

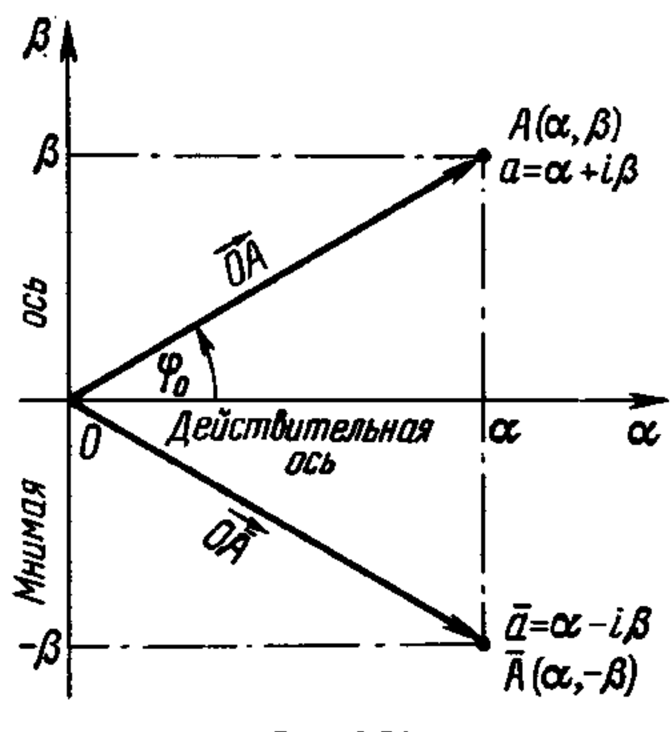


Рис. 3.76

Длина радиус-вектора $\vec{OA}$ комплексного числа $a = \alpha + i\beta$ равна $|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ — модулю этого числа, $|a - b|$ равен расстоянию между соответствующими точками a и b.

Геометрическое сложение: наглядная интерпретация сложения (вычитания) двух комплексных чисел $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$ осуществляется при помощи соответствующих радиус-векторов $\vec{OA} = (\alpha, \beta)$, $\vec{OB} = (\gamma, \delta)$: сумме (разности)

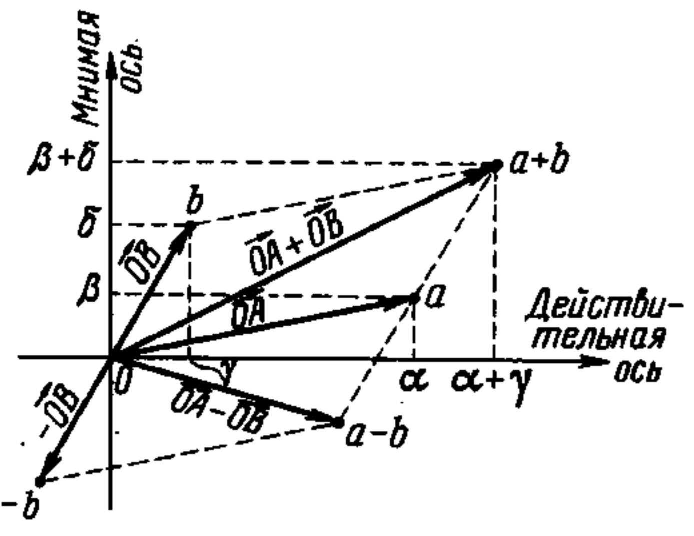


Рис. 3.77

$a \pm b = (\alpha \pm \gamma) + i(\beta \pm \delta)$ чисел a и b соответствует радиус-вектор $\vec{OA} \pm \vec{OB} = (\alpha \pm \gamma, \ \beta \pm \delta)$ (см. рис. 3.77 и 2.4.4.1).

3.4.2.4. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. *Аргументом* комплексного числа $a = \alpha + i\beta$ ($\operatorname{Arg} a$) называют угол φ_0 (в радианах) между радиус-вектором $\vec{OA} = (\alpha, \beta)$ и положительным направлением действительной оси (см. рис. 3.76), определяемый с точностью до слагаемого, кратного 2π. *Главное значение* аргумента: $\arg a = \varphi$, $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$; имеем: $\operatorname{Arg} a = \arg a + 2k\pi$. Например, $\arg(1 + i) = \pi/4$.

Справедливы равенства: $\alpha = |a| \cos\varphi_0$, $\beta = |a| \sin\varphi_0$ (см. рис. 3.76).

Тригонометрическая форма комплексного числа a:

$$a = |a|(\cos(\varphi_0 + 2k\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2k\pi))$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тригонометрические и показательные функции связаны *формулой Эйлера* $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (см. 3.4.5). Отсюда

$$a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |a| e^{i\varphi}.$$

Таким образом, для каждого комплексного числа возможны три представления: *алгебраическое, тригонометрическое* и *показательное*.

Пример 2. $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$, или $1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3 + 2k\pi) + i\sin(\pi/3 + 2k\pi)] = 2e^{(\pi/3 + 2k\pi)i}$ (если не ограничиваться одним главным значением $\arg a = \varphi_0 = \pi/3$).

Модуль комплексных чисел вида $e^{i\varphi}$ равен 1. Следовательно, в плоскости комплексных чисел они располагаются на окружности радиуса 1. Число $0 = 0 + i \cdot 0$ имеет неопределенный аргумент и, следовательно, допускает представление $0 = |0|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (φ любое).

Если $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $b = |b|(\cos\psi + i\sin\psi)$, то

$$a \cdot b = |a||b|[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)] = |a|\cdot|b|\,e^{i(\varphi+\psi)}, \quad (3.80)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)] = \frac{|a|}{|b|}e^{i(\varphi-\psi)}. \quad (3.81)$$

Геометрическая интерпретация: радиус-вектор произведения $a \cdot b$ получается поворотом радиуса-вектора a на угол φ против часовой стрелки и растяжением в $|b|$ раз. Аналогично интерпретируется деление (рис. 3.78).

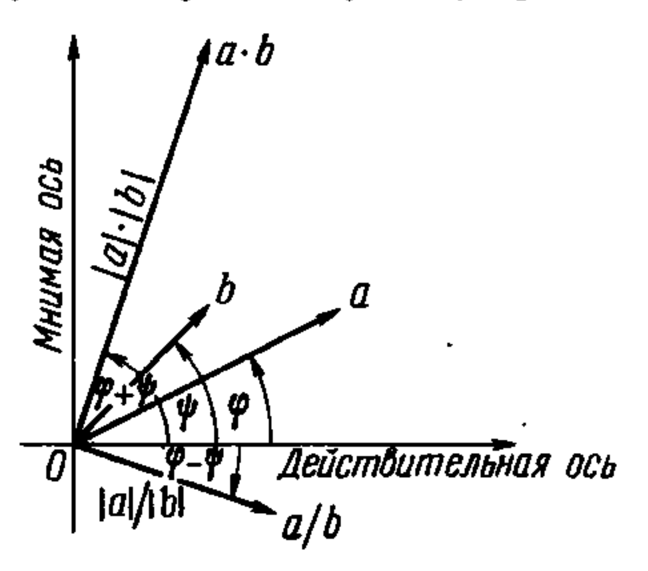


Рис. 3.78

3.4.2.5. Степени, корни.

1) *Натуральный показатель степени.* Возведение комплексного числа a в n-ю степень (n — натуральное число) производится по *формуле Муавра*

$$a^n = [|a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |a|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|^n e^{in\varphi},$$

которую можно вывести из формулы умножения (3.80).

В частности, $i^0 = 1$, $i^1 = 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -1$, $i^4 = 1$, $i^{4n+k} = i^k$ (k — целое число).

Формула бинома, как и формула геометрической прогрессии, верна.

2) *Отрицательный целый показатель степени.* Полагаем $a^n = 1/a^{-n}$ ($n < 0$). Тогда для a^n, как следует из формулы (3.81), может быть использована формула Муавра.

3) *Дробный показатель степени.* Показатель степени имеет вид $n = 1/m$, m — натуральное число. Возведение a в степень $1/m$ называют также *извлечением корня m-й степени* из a; каждое комплексное число w такое, что $w^m = a$, называют *корнем m-й степени* из a:

$$w = \sqrt[m]{a} = a^{1/m}.$$

Вычисление $a^{1/m}$ также осуществляется по формуле Муавра, но теперь для $n = 1/m$. Однако, в то время как все рассмотренные до сих пор вычислительные операции имели однозначные результаты, операция $\sqrt[m]{a}$ дает m различных результатов (корней):

$$w_k = \sqrt[m]{|a|}\left[\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{m}\right],$$

т. е. $\sqrt[m]{a}$ определяет m различных чисел:

$$\sqrt[m]{a} = a^{1/m} = \{w_k | k = 0, 1, \ldots, m-1\} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}\}.$$

Для любого целого числа n имеет место равенство $w_{k+nm} = w_k$, так что, кроме уже указанных корней w_k, никаких других, отличных от них, быть не может. Решение $w_0 = \sqrt[m]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi_0}{m} + i\sin\frac{\varphi_0}{m}\right)$ уравнения $w^m = a$ называют *главным значением* $\sqrt[m]{a}$.

Так как все w_k имеют одинаковый модуль $\sqrt[m]{|a|}$, то они в соответствии со значениями аргументов $\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{m}$ ($k = 0, 1, \ldots, m-1$) лежат в вершинах правильного m-угольника с центром в

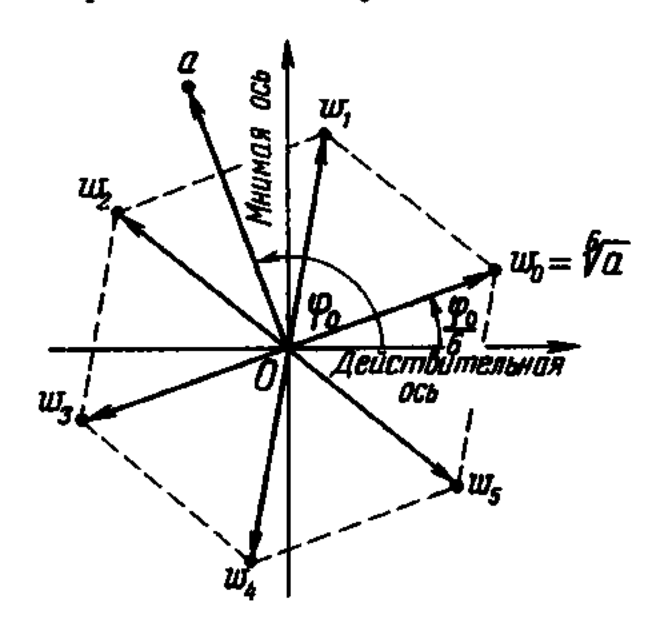


Рис. 3.79

начале координат. На рис. 3.79 изображено шесть значений $\sqrt[6]{a} = \{w_k;\ k = 0, 1, \ldots, 5\}$.

Пример 3. Для уравнения $w^3 = 8i$ имеем $\sqrt[3]{|8i|} = \sqrt[3]{8} = 2$, $\operatorname{Arg} 8i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, следовательно,

$$\sqrt[3]{8i} = \left\{2\left[\cos\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{3}\right]: k = 0, 1, 2\right\} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}.$$

Эти три корня лежат в углах равностороннего треугольника на расстоянии 2 от начала координат. Главное значение равно $\sqrt{3} + i$.

Уравнение $w^2 = 1$ имеет решение $\sqrt{-1} = \{i, -i\}$; главное значение равно $+i$.

3.4.2.6. Сфера Римана. Кривые Жордана. Области. Комплексная плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой называется *расширенной* или *замкнутой комплексной плоскостью.* Расширение комплексной плоскости одной-единственной точкой описывается при помощи числовой сферы Римана.

Пусть плоскость ξ, η в декартовой системе координат ξ, η, ζ, рассматриваемая как комплексная числовая плоскость, касается своим началом (0, 0) единичной сферы (сферы единичного диаметра). Эта точка называется *южным полюсом*

S; диаметрально противоположная ей точка N — *северным полюсом*. Если комплексное число $a = \alpha + i\beta$ задано на плоскости (ξ, η) точкой $P(\alpha, \beta)$, то точку пересечения $P'(\xi, \eta, \zeta)$ отрезка PN со сферой можно рассматривать как новое геометрическое представление числа a (рис. 3.80). Таким

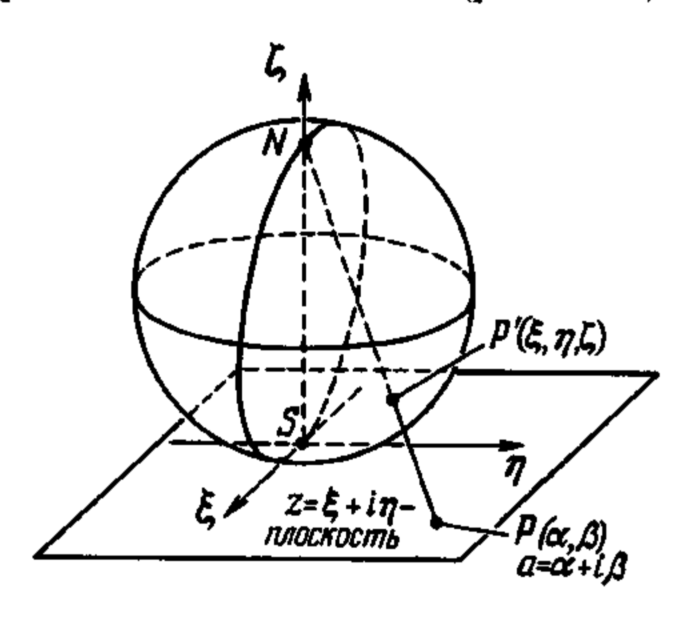


Рис. 3.80

образом, каждому комплексному числу однозначно соответствует одна точка единичной сферы, которая в этом случае называется *сферой Римана*. Если последовательность точек на плоскости «удаляется» в бесконечность, то последовательность изображений точек на сфере стремится к северному полюсу N. Точка N соответствует бесконечно удаленной точке числовой плоскости.

Построенное выше отображение плоскости на сферу называется *стереографической проекцией*. Стереографическая проекция сохраняет углы и записывается посредством следующих формул:

$$\xi = \frac{\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}, \quad \eta = \frac{\beta}{1+\alpha^2+\beta^2},$$
$$\zeta = \frac{\alpha^2+\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}.$$

Непрерывной кривой называют множество точек $z = x + iy$ комплексной плоскости, если $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $-\infty \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant +\infty$ есть параметрическое непрерывное представление кривой на плоскости x, y. Например, комплексное параметрическое представление эллипса с полуосями a, b и с центром в начале координат имеет вид

$$z = z(t) = a\cos t + ib\sin t \qquad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

а представление окружности с центром в точке $z_1 = \alpha + i\beta$ и радиусом r имеет вид

$$z = (\alpha + r\cos t) + i(\beta + r\sin t) = z_1 + re^{it}$$
$$(0 \leqslant t < 2\pi).$$

Кривой Жордана называется непрерывная кривая без кратных точек. Это означает, что различным значениям параметра t (за исключением, быть может, начального и конечного значения) функцией $z = z(t)$ ставятся в соответствие различные точки z кривой. Если начальная и конечная точки кривой совпадают, то кривая называется *замкнутой*. Эллипс и окружность являются примерами замкнутых жордановых кривых.

(*Открытой*) *δ-окрестностью* точки a называют множество всех точек z, для которых $|z - a| < \delta$, $\delta > 0$.

(*Открытой*) *областью* G замкнутой комплексной плоскости называется связное открытое множество, т. е. множество точек этой плоскости таких, что: 1) для любых точек a, $b \in G$ существует непрерывная кривая, соединяющая их и целиком лежащая в G; 2) если $c \in G$, то существует δ-окрестность точки c, целиком лежащая в G (рис. 3.81). *Границей* области G называется множество точек, которые не принадлежат G, но в любой произвольно

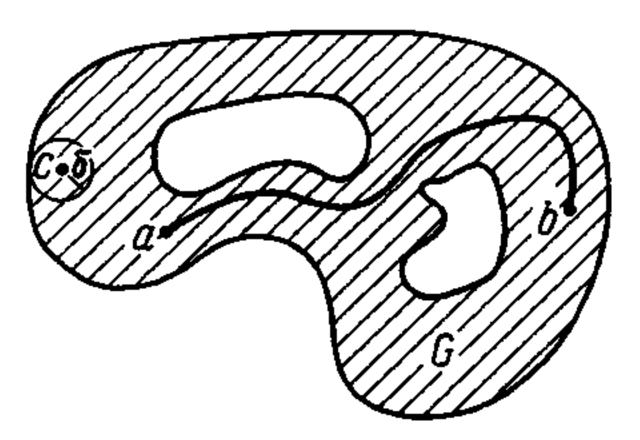


Рис. 3.81

малой δ-окрестности которых всегда лежат точки из G.

Область G конечной числовой плоскости называют *односвязной*, если ее внутренние точки по отношению к любой замкнутой кривой Жордана, лежащей в G, принадлежат G; в противном случае область *многосвязна*: кольцевая область *двухсвязна*, область G на рис. 3.81 *трехсвязна*. *Замкнутой областью* называется объединение множества точек области G и ее границы ∂G. Обозначение: $\bar{G} = G \bigcup \partial G$.

3.4.3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Если каждому значению переменного $z = x + iy$ из множества D расширенной числовой плоскости по правилу f сопоставляется определенное значение переменного $w = u + iv$ из множества W расширенной числовой плоскости, то f называется *комплексной* (или *комплекснозначной*) *функцией* комплексного переменного z; D — *область определения*, $f(D) \subset W$ — *область значений* функции f. Обозначение: $w = f(z)$.

Связь с функциями действительного переменного: так как $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$, то каждой числовой паре (x, y) такой, что $x + iy \in D$, в силу функциональной зависимости f ставится в соответствие пара (u, v) такая, что $u + iv \in W$, т. е. u и v являются действительными функциями действительных переменных x, y: $u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Функция $w = f(z)$ может быть записана в виде

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z).$$

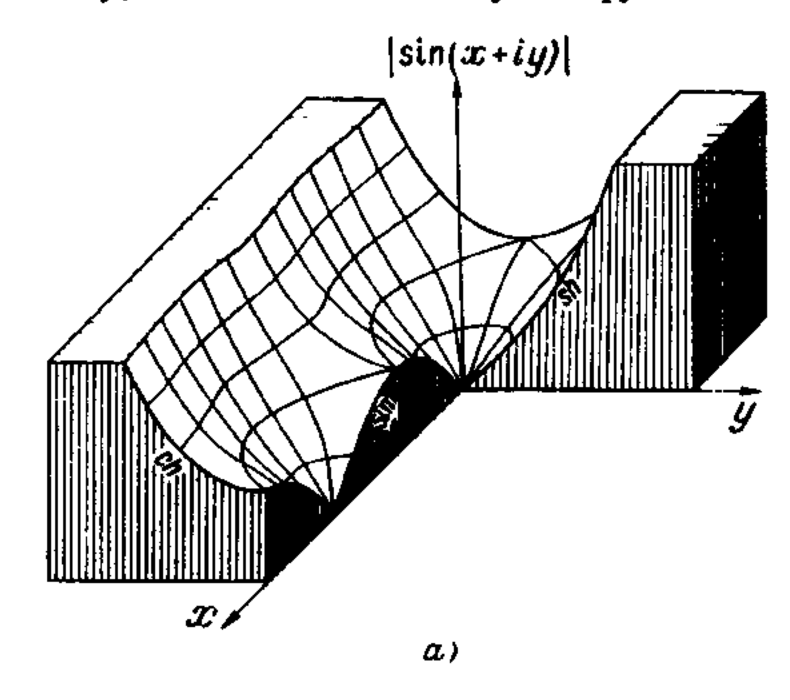
В различных вопросах теории и приложений функций комплексного переменного существенное значение имеет *модуль функции*

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} = \varphi(x, y).$$

Поверхность $|w| = \varphi(x, y)$, где $|w|$ — аппликата, восставленная в точке $z = x + iy$, называется *рельефом функции* (рис. 3.82) *). Так как модуль

*) Рельеф многих функций приведен в книге: Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1977.

функции – величина неотрицательная, то ее рельеф находится всегда над областью определения D функции f, за исключением нулей функции.



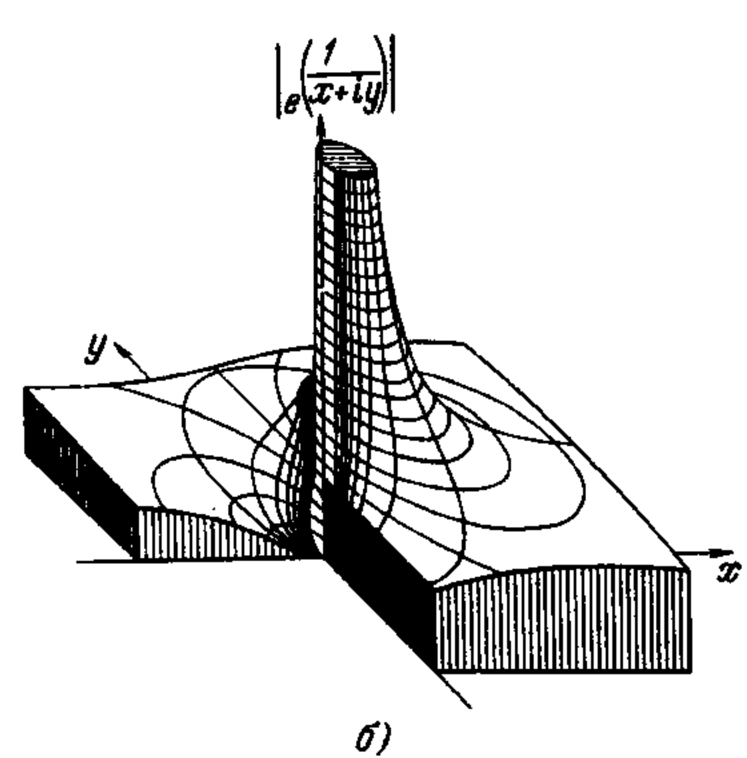


Рис. 3.82

Нулем функции f называется такое значение z_0 независимого переменного z, для которого $|f(z_0)| = 0$, и, следовательно, $f(z_0) = 0$.

Функция $w = f(z)$ называется *ограниченной* в области $G \subseteq D$, если существует такое положительное число M, что $|f(z)| < M$ для любой точки z в этой области.

Предел и *непрерывность* функции комплексного переменного определяются аналогично соответствующим понятиям для функций действительного переменного.

Если представить $f(z)$ в виде $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, то запись $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$, где $z_0 = x_0 + iy_0$, $a = \alpha + i\beta$, эквивалентна следующей:

$$\lim_{(x,\, y) \to (x_0,\, y_0)} u(x, y) = \alpha \quad \text{и} \quad \lim_{(x,\, y) \to (x_0,\, y_0)} v(x, y) = \beta.$$

Это позволяет определить предел $f(z)$ через пределы действительной $\operatorname{Re} f(z)$ и мнимой $\operatorname{Im} f(z)$ частей.

Пример 4.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|} = \lim_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} \frac{(x + iy)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,\, y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \lim_{(x,\, y) \to (0,0)} 2\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= 0 + i0 = 0.$$

Функция $f(z)$ *непрерывна в точке* z_0, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в этой точке как функции двух действительных переменных. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Как и для функций действительных переменных, для рассматриваемых функций справедливы теоремы о непрерывности суммы, произведения, отношения непрерывных функций и сложной функции от непрерывных функций. Согласно этому, многочлен от z непрерывен во всей z-плоскости, рациональная функция от z непрерывна в ее области определения.

3.4.4. ВАЖНЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

3.4.4.1. Рациональные функции. *Целые рациональные функции* (*многочлены m-й степени*):

$$w = P_m(z) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu$$

(c_ν – комплексные коэффициенты, $c_m \neq 0$). Многочлен $P_m(z)$ можно однозначно записать как произведение:

$$P_m(z) = c_m (z - z_1)^{\nu_1} (z - z_2)^{\nu_2} \ldots (z - z_k)^{\nu_k},$$

где $\sum\limits_{\rho=1}^{k} \nu_\rho = m$, а $z_1, \ldots, z_k$ – нули многочлена с кратностями $\nu_1, \ldots, \nu_k$ соответственно (*основная теорема алгебры*).

Дробно-рациональные функции вводятся как отношение двух многочленов $w = \dfrac{Q_n(z)}{P_m(z)}$. Они определены для всех z, для которых $P_m \neq 0$. *Деление с остатком* для неправильных дробно-рациональных функций ($m \leqslant n$) осуществляют так же, как и для функций действительного переменного. *Разложение на простейшие дроби* правильных дробно-рациональных функций ($m > n$) имеет вид

$$\frac{Q_n(z)}{P_m(z)} = \sum_{\rho=1}^{k} \sum_{\tau=1}^{\nu_\rho} \frac{A_{\rho\tau}}{(z - z_\rho)^\tau};$$

коэффициенты $A_{\rho\tau}$ находятся, как и в действительном случае. Важной рациональной функцией является *дробно-линейная* функция $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ (см. 3.4.11).

3.4.4.2. Показательная и логарифмическая функции. Натуральная показательная функция – *показательная функция* с основанием e:

$$w = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

определена во всей плоскости z. Имеет место *формула Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{3.82}$$

(где $\cos z$ и $\sin z$ определены в 3.4.4.3). Из нее следует представление для e^z:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y);$$

с другой стороны, для любых z_1 и z_2 справедливы

Некоторые элементарные функции

Функция $f(z)$	$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$	$\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$	Модуль $\lvert f(z)\rvert$	Главное значение аргумента*) $\arg(f(z))$
z	x	y	$\sqrt{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
z^2	x^2-y^2	$2xy$	x^2+y^2	$\operatorname{arctg}\frac{2xy}{x^2-y^2}$
$\frac{1}{z-a}$ $(a=\alpha+i\beta)$	$\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$	$\frac{-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}$	$\operatorname{arctg}\frac{y-\beta}{\alpha-x}$
$\frac{1}{z^2}$	$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg}\frac{2xy}{y^2-x^2}$
$\sqrt{z}$	$\pm\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^{1/2}$	$\pm\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^{1/2}$	$\sqrt[4]{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg}(\sqrt{\rho^2+1}-\rho),\ \rho=\frac{x}{\lvert y\rvert}$
$\operatorname{Ln} z$	$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$	$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2k\pi$ *)	$\sqrt{u^2+v^2}$	$\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$
e^z	$e^x\cos y$	$e^x\sin y$	e^x	$y+2n\pi$, n — целое такое, что $-\pi<y+2n\pi\leqslant+\pi$
$\sin z$	$\sin x\operatorname{ch} y$	$\cos x\operatorname{sh} y$	$\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$	$\operatorname{arctg}[\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{th} y]$
$\cos z$	$\cos x\operatorname{ch} y$	$-\sin x\operatorname{sh} y$	$\sqrt{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$	$\operatorname{arctg}[-\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{th} y]$
$\operatorname{sh} z$	$\operatorname{sh} x\cos y$	$\operatorname{ch} x\sin y$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+\sin^2 y}$	$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{cth} x]$
$\operatorname{ch} z$	$\operatorname{ch} x\cos y$	$\operatorname{sh} x\sin y$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+\cos^2 y}$	$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{th} x]$
$\operatorname{tg} z$	$\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$	$\frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$	$\frac{(-\cos^2 2x+\operatorname{ch}^2 2y)^{1/2}}{\lvert\cos 2x+\operatorname{ch} 2y\rvert}$	$\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2y}$

*) К значению $\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$ в случае $u<0$ и $v\geqslant 0$ (соответственно $v<0$) следует прибавлять число $+\pi$ (соответственно $-\pi$).

**) B_n — числа Бернулли.

Таблица 3.7

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Разложение в ряд функции $f(z)$ в окрестности $z = 0$ или $z = 1$	Нули z_0 m: порядок нуля	Особенности z_s m: порядок особенности
z	$z_0 = 0,\ m = 1$	Полюс в $z_s = \infty,\ m = 1$
z^2	$z_0 = 0,\ m = 2$	Полюс в $z_s = \infty,\ m = 2$
$-\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} z^n,\ \lvert z \rvert < \lvert a \rvert \neq 0$	$z_0 = \infty,\ m = 1$	Полюс в $z_s = a,\ m = 1$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n,\ \lvert z - 1 \rvert < 1$	$z_0 = \infty,\ m = 2$	Полюс в $z_s = 0,\ m = 2$
$\pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (z-1)^n,\ \lvert z - 1 \rvert < 1$	$z_0 = 0,\ m = 1$ – точка ветвления порядка 2	Точка ветвления порядка 2: $z_s = 0,\ m = 1$; точка ветвления порядка 2: $z_s = \infty,\ m = 1$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n,\quad \lvert z - 1 \rvert < 1$, – разложение $\operatorname{Ln} z$ для $k = 0$	$z_0 = 1,\ m = 1$ для $k = 0$	$z_s = 0,\ \infty$ – точки ветвления порядка $m = \infty$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,\ \lvert z \rvert < \infty$	$e^z \neq 0,\ \lvert z \rvert < \infty$	$z_s = \infty$ – существенно особые точки
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ \lvert z \rvert < \infty$	$z_0 = k\pi,\ m = 1$	
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ \lvert z \rvert < \infty$	$z_0 = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi,\ m = 1$	
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ \lvert z \rvert < \infty$	$z_0 = k\pi i,\ m = 1$	
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n},\ \lvert z \rvert < \infty$	$z_0 = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi i,\ m = 1$	
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)\,2^{2n}}{(2n)!} B_n z^{2n-1} = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \ldots,$ $\lvert z \rvert < \frac{\pi}{2}$ **)	$z_0 = k\pi,\ m = 1$	$z_s = \infty$ – предельная точка полюсов; $z_s = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi$ – полюс, $m = 1$

формулы:
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

(теорема сложения для показательной функции);
$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y, \quad |e^z| = e^x,$$
$$\arg e^z = y + 2\pi k$$
(k определяется условием $-\pi < y + 2\pi k \leqslant \pi$).

Функция e^z является периодической с *периодом* $2\pi i$. Область значений W функции e^z охватывает всю плоскость, кроме ее начала – точки O. Множество $E = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$ является однолистной областью функции e^z; его образ есть вся плоскость, разрезанная вдоль отрицательной части действительной оси.

Натуральный логарифм. Функция, обратная функции $w = e^z$ в ее однолистной области E, называется *главной ветвью натурального логарифма:*
$$\ln z = \ln|z| + \varphi_0 i, \qquad -\pi < \varphi_0 \leqslant \pi.$$

Другие ветви представляют собой обратные к e^z функции в полосах, которые получаются из E при помощи параллельного переноса на $2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Обратное отображение натуральной показательной функции во всей комплексной плоскости обозначают $\operatorname{Ln} z$: если $z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$, то
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z) \quad \text{при} \quad z \neq 0.$$

Таким образом, $\operatorname{Ln} z$ состоит из множества ветвей функции:
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \varphi_0 i + 2k\pi i, \quad \text{где} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример 5. $\ln(-1) = \ln|-1| + \pi i = \pi i$,

$\operatorname{Ln} 1 = \ln|1| + 2k\pi i = 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,

$\ln(-i) = \ln|-i| - \pi i/2 = -\pi i/2$.

Для натурального логарифма справедливы все формулы, которые имеют силу для действительных чисел, если только в этих формулах используются правильно выбранные ветви.

Общая показательная функция есть многозначная функция, включающая в себя отдельные ветви функции:
$$w = a^z = e^{z \ln a}.$$

Главную ветвь получают, когда берут главную ветвь $\operatorname{Ln} a$.

3.4.4.3. Тригонометрические и гиперболические функции. Для любого z
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}),$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}),$$
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$
$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Функции $\sin z$, $\cos z$ имеют период 2π, а функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$.

Для любого z справедливы соотношения
$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z,$$
$$\operatorname{sh} iz = i \sin z, \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

В частности, отсюда вытекают формулы для действительного y:
$$\sin yi = i \operatorname{sh} y, \qquad \cos yi = \operatorname{ch} y,$$
$$\operatorname{sh} yi = i \sin y, \qquad \operatorname{ch} yi = \cos y.$$

Формулы, имеющие место для тригонометрических и гиперболических функций действительного переменного (ср. 2.5.2.1), справедливы и для функций комплексного переменного. В частности, вычисление $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ при $z = x + iy$ производится согласно теоремам сложения для $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ и т. д.

Пример 6. $\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$; следовательно,
$$\operatorname{Re} \cos z = \cos(\operatorname{Re} z) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z),$$
$$\operatorname{Im} \cos z = -\sin(\operatorname{Re} z) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} z).$$

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются формулами
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Отображение $w = \sin z$ однозначно отображает полосу $E = \{z \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2\}$ плоскости z на комплексную плоскость w, разрезанную вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$.

Отображение, обратное $w = \sin z$ в области E, дает главную ветвь $\operatorname{Arcsin} z$, определенную на комплексной числовой плоскости, разрезанной указанным способом.

Аналогично получаются обратные функции для других тригонометрических и гиперболических функций.

Эти отображения можно выразить через Ln при помощи следующих формул:
$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(i(z + \sqrt{z^2 - 1})),$$
$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$
$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z},$$
$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},$$
$$\operatorname{Arcctg} z = +\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i},$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Их главные значения выражаются теми же формулами, только вместо Ln подставляют главную ветвь логарифма $\ln$, например:
$$\arcsin z = -i \ln(i(z + \sqrt{z^2 - 1})),$$
$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}.$$

В табл. 3.7 приведены выражения для действительной и мнимой частей, модуля и аргумента, а также некоторые другие сведения об элементарных функциях комплексного переменного.

3.4.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.4.5.1. Производная. Функция $w = f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется *дифференцируемой в точке* z_0, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Этот предел называется *производной* функции $w = f(z)$ в точке z_0. Обозначение: $f'(z_0)$, $(df/dz)(z_0)$, $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$. Если функция $f(z)$ дифференцируема в каждой точке z области G, то она называется *дифференцируемой в области* G и ее производная обозначается w', $f'(z)$, $\frac{df(z)}{dz}$, df/dz (геометрический смысл производной см. в 3.4.11.1).

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в G, то функции

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z) \cdot g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z) \neq 0)$$

также дифференцируемы в G. Правила дифференцирования те же, что и для функций действительного переменного (см. 3.1.5). Правило взятия производной (цепное правило) для сложных функций также остается неизменным.

Пример 7. Пусть $w = (3z+4)^3$, $w = \tilde{w}^3$, $\tilde{w} = 3z + 4$;

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\tilde{w}} \frac{d\tilde{w}}{dz} = 3\tilde{w}^2 \cdot 3 = 9(3z+4)^2$$

для всех z на z-плоскости.

3.4.5.2. Условия дифференцируемости Коши – Римана. Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в области G, дифференцируема в точке $z \in G$, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ обладают в этой точке непрерывными частными производными по x и по y и удовлетворяют *условиям дифференцируемости Коши – Римана* (более точно: Даламбера – Эйлера)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Производную функции w по z можно вычислить следующим образом:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример 8. Функция $w = f(z) = |z|^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$: $u = x^2 + y^2$, $v = 0$, $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $v'_x = 0$, $v'_y = 0$. Частные производные непрерывны в точке $(0, 0)$, и только там выполняются условия Коши – Римана. Тогда

$$f'(0) = u'_x(0, 0) + iv'_x(0, 0) = 0.$$

3.4.5.3. Аналитические функции. Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической, голоморфной* или *регулярной* в точке $z = z_0$ (соответственно $z = \infty$), если она дифференцируема в некоторой окрестности z_0 (соответственно если $F(z) = f(1/z)$ после доопределения в нуле по непрерывности аналитична в точке $z = 0$; тогда определяют $f'(\infty) = -(z^2F'(z))|_{z=0}$).

Функция $f(z)$ аналитична в $z = z_0$ (соответственно $z = \infty$) тогда и только тогда, когда ее можно представить в некотором круге с центром в точке z_0 (соответственно ∞) сходящимся степенным рядом (соответственно рядом с неположительными степенями z):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\text{(соответственно } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}\text{)}.$$

Функция называется *аналитической в области* G, если она аналитична в каждой точке этой области.

Следовательно, функция $f(z) = |z|^2$ (см. пример 8) нигде не аналитична (хотя дифференцируема при $z = 0$); в то же время функция $w = f(z) = z^2$ или $w = f(z) = e^z$ является аналитической на всей плоскости z.

Точки, в которых $f(z)$ является аналитической, называются *регулярными* (*правильными*). Если $f(z)$ аналитична в G, за исключением некоторых точек, то эти точки называют *особыми*. Точка $z \in G$ называется *изолированной особой точкой*, если вокруг нее можно описать круг, не содержащий других особых точек. Элементарные функции (как алгебраические, так и трансцендентные) являются аналитическими на плоскости z, за исключением некоторых изолированных особых точек.

Свойства аналитических функций.

1) Во всех правильных точках аналитические функции имеют производные любого порядка.

2) Максимум значения модуля функции, аналитической в замкнутой области G, достигается на границе области (*принцип максимума*).

3) Если функция аналитична по всей плоскости и ограничена в ней, то эта функция постоянна (*теорема Лиувилля*).

4) Две аналитические в области G функции тождественны в области G, если они совпадают на какой-нибудь ее подобласти или хотя бы на некотором бесконечном множестве, имеющем в G предельную точку (*теорема единственности аналитических функций*).

5) В области, где функция $w = u + vi$ – аналитическая, функции u и v необходимо являются *гармоническими функциями*, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа, что следует из условий Коши – Римана. Зная гармоническую функцию u, можно с точностью до аддитивной постоянной определить *сопряженную* к ней гармоническую функцию v:

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x),$$

где

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right).$$

Аналогично по v можно определить u.

3.4.6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

3.4.6.1. Интеграл функции комплексного переменного. *Контурным интегралом функции* $w = f(z)$ по дуге $C = \breve{AB}$ (*путь интегрирования*) в плоскости z с начальной точкой интегрирования $A(a)$ и конечной точкой интегрирования $B(b)$ называется комплексное число

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\max|z_\nu - z_{\nu-1}|\to 0} \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}), \quad (3.83)$$

если этот предел существует и не зависит ни от выбора точек разбиения $a = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$ кривой C, ни от выбора промежуточных точек $\zeta_\nu \in z_{\nu-1}\breve{}z_\nu \subset C$ (рис. 3.83).

Для существования комплексного контурного интеграла необходима ограниченность и достаточна непрерывность $f(z)$ на гладкой кривой C.

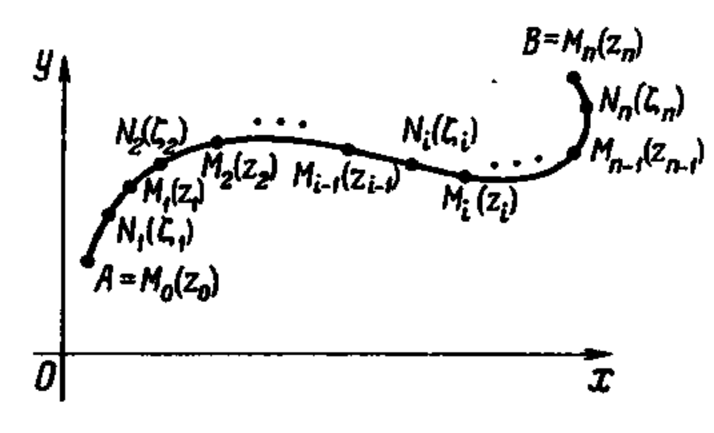


Рис. 3.83

Если в определении (3.83) разложить $f(z)$ и z на действительную и мнимую части, то очевидно, что

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C [u(x, y) + iv(x, y)]\,d(x + iy) =$$

$$= \int u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy.$$

Тем самым свойства действительных криволинейных интегралов переносятся на комплексные контурные интегралы, как, например (см. 3.1.8):

1) $\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = -\int_{\breve{BA}} f(z)\,dz$, причем кривая в правом интеграле проходится от B к A.

2) $\int_{\breve{AB}} f(z)\,dz = \int_{\breve{AD}} f(z)\,dz + \int_{\breve{DB}} f(z)\,dz$, где D – промежуточная точка кривой C между $A(a)$ и $B(b)$.

3) Если $\infty \in C$, то в этом случае $\int_C f(z)\,dz$ можно определить как несобственный интеграл.

4) Оценка интеграла: если на кривой C функция $f(z)$ ограничена и $|f(z)| \leqslant M = \text{const}$, то

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant Ms,$$

где s – длина дуги $\breve{AB}$ кривой C.

Вычисление интеграла, если путь интегрирования определен гладким параметрическим заданием $z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, причем $z(\alpha) = a$ и $z(\beta) = b$, осуществляется по формуле

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}[f(z(t))\,z'(t)]\,dt + i\int_\alpha^\beta \operatorname{Im}[f(z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

3.4.6.2. Независимость от пути интегрирования. Для того чтобы контурный интеграл от непрерывной функции комплексной переменной, определенной в некоторой односвязной области, не зависел от пути, соединяющего две фиксированные точки a и b, необходимо и достаточно, чтобы функция была аналитической в этой области, т. е. чтобы она была дифференцируема в этой области. В этом случае пишут

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Интегральная теорема Коши. Если $f(z)$ аналитична в односвязной области G, то интеграл $\int_C f(z)\,dz$ зависит только от выбора точек a и b кривой C, и не зависит от вида гладкой кривой C, соединяющей a и b внутри G.

Интеграл по замкнутой кривой обозначают $\oint_C f(z)\,dz$ и называют *интегралом по замкнутому контуру*. Интегральная теорема Коши для такого интеграла принимает вид: если $f(z)$ аналитична в односвязной области G, то для каждой замкнутой в G кривой имеет место соотношение

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

3.4.6.3. Неопределенные интегралы. Если в области G интеграл не зависит от пути интегрирования и начальная точка $a \in G$ фиксирована, а конечная точка пути интегрирования $z \in G$ переменная, то

$$\int_a^z f(z)\,dz = F(z),$$

причем $F'(z) = f(z)$; функция $F(z)$ называется *первообразной* аналитической функции $f(z)$. Первообразная функция зависит от выбора начальной точки a. Две любые первообразные функции отличаются друг от друга на аддитивную постоянную. Совокупность всех первообразных обозначают

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C$$

(C – любая константа) и называют *неопределенным интегралом* от $f(z)$.

Неопределенные интегралы от элементарных функций комплексного переменного вычисляются по тем же формулам, что и интегралы от тех же функций действительного переменного.

3.4.6.4. Основная формула интегрального исчисления. Интеграл от функции $f(z)$, аналитической в G, равен приращению ее первообразной функции при переходе из начальной в конечную точку пути интегрирования:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

3.4.6.5. Интегральные формулы Коши. Если функция $f(z)$ – аналитическая в некоторой односвязной области, то ее значение в любой точке z этой области, а также значения ее производных любого порядка в этой точке выражаются через значения этой функции на замкнутом контуре C, окружающем эту точку, следующими *интеграль-*

ными формулами Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

$$f'(z)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$$

$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta, \qquad (3.84)$$

. . . .

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

где ζ – переменная интегрирования; интегралы вычисляются вдоль пути C, пробегаемого в положительном направлении (против часовой стрелки).

Если же функция $f(z)$ – аналитическая во всей части расширенной плоскости, находящейся вне замкнутого контура C, то значения $f(z)$ и ее производные в любой точке z этой области выражаются при помощи тех же формул (3.84), однако интегралы при этом вычисляются вдоль пути C, пробегаемого в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

Иногда, чтобы подчеркнуть направление движения вдоль контура интегрирования C, пользуются следующими обозначениями: $\oint$ – против часовой стрелки, $\oint$ – по часовой стрелке.

Интегральные формулы Коши позволяют находить значения некоторых определенных интегралов.

Пример 9. Положим $f(z)=e^z$ (эта функция – аналитическая функция во всей плоскости) и в качестве пути интегрирования возьмем окружность C с центром в точке z и радиусом r: $\zeta=z+re^{i\varphi}$. Тогда, согласно последней формуле из (3.84), имеем

$$e^z=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{z+e^{i\varphi}}}{r^{n+1}e^{i\varphi(n+1)}}ire^{i\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}e^{z+r\cos\varphi+ir\sin\varphi-in\varphi}\,d\varphi,$$

откуда, полагая $z=0$, получаем, что

$$\frac{2\pi r^n}{n!}=\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi+i(r\sin\varphi-n\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi+i\int_0^{2\pi}e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi-n\varphi)d\varphi.$$

Так как мнимая часть равна нулю, то

$$\int_0^{2\pi}e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi=\frac{2\pi r^n}{n!},$$

$$\int_0^{2\pi}e^{r\sin\varphi}\sin(r\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi=0.$$

3.4.7. РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД

3.4.7.1. Последовательности и ряды. Последовательности $\{a_n\}$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ для комплексных чисел $a_n=\alpha_n+i\beta_n$ ($i=1, 2, 3, \ldots$), а также понятие их сходимости формально определяются так же, как и соответствующие понятия для действительных чисел (см. 3.1.3, 3.1.14).

Последовательность $a_1=\alpha_1+i\beta_1$, $a_2=\alpha_2+i\beta_2, \ldots, a_n=\alpha_n+i\beta_n, \ldots$ называют *сходящейся*, если сходится каждая из последовательностей действительных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+i\beta_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\alpha_n+i\lim_{n\to\infty}\beta_n=\alpha+i\beta=a.$$

Пример 10.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n}+i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|}\cos\frac{\varphi_0}{n}+i\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|}\sin\frac{\varphi_0}{n}=1+i\cdot 0=1,$$

если $a\neq 0$ и φ_0 есть $\arg a$ (рис. 3.84).

Поэтому запись $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ равнозначна тому, что для любой заданной ε-окрестности точки a (см. 3.4.2.6) существует такое $N(\varepsilon)$, что все члены последовательности a_n с номерами $n\geqslant N(\varepsilon)$ попадают в эту окрестность.

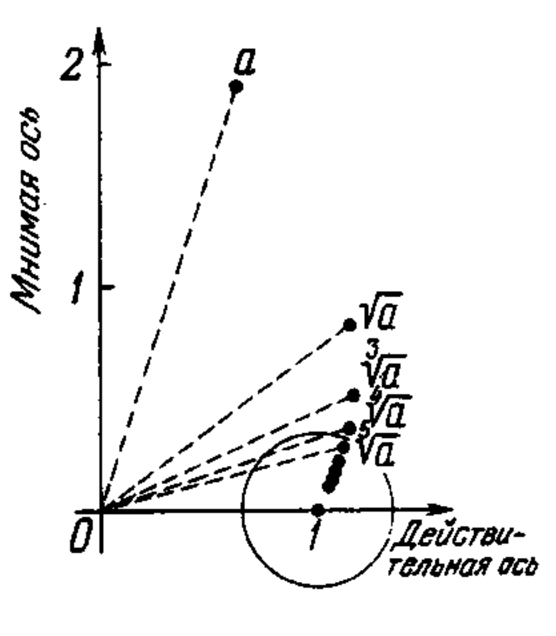


Рис. 3.84

Последовательности $\{a_n\}$, которые не являются сходящимися, называются *расходящимися*.

Если комплексная числовая последовательность (как последовательность точек z-плоскости) такова, что вне любого сколь угодно большого круга этой плоскости находятся все точки этой последовательности, за исключением конечного числа, то говорят, что последовательность стремится к бесконечности: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=$$

$$=(\alpha_1+i\beta_1)+(\alpha_2+i\beta_2)+\ldots+(\alpha_n+i\beta_n)+\ldots$$

называется *сходящимся*, если сходится каждый из рядов действительных чисел

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots$$

и

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n+\ldots$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \alpha + i\beta = S.$$

Поэтому запись $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ равнозначна (в случае сходимости) тому, что последовательность частичных сумм $\{S_n\} = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right\}$ является сходящейся. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = S.$$

Пример 11.

$$i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{4} + \frac{i^4}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n-1}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{2^{2n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} = -\frac{2}{5} + \frac{4i}{5}$$

(рис. 3.85).

Пример 12. Ряд $1 + a^1 + a^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1/(1-a)$ сходится для всех a таких, что $|a| < 1$ (геометрическая прогрессия). Сумму ряда в примере 11 можно очень быстро вычислить при помощи этой формулы для $a = i/2$.

Рис. 3.85

Понятия расходимости, а также абсолютной, условной и безусловной сходимости рядов с комплексными членами формулируются так же, как и для действительных рядов (см. 3.1.14); аналогично определяются и условия сходимости.

3.4.7.2. Функциональные ряды. Степенные ряды. Для последовательности комплексных функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ в пересечении их областей определения $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ можно составить *функциональный ряд*

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \qquad (3.85)$$

Все точки $z \in D$, для которых ряд сходится, составляют *область сходимости* ряда, а предельная функция $F(z)$ называется *суммой ряда*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = F(z).$$

Степенные ряды представляют собой функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n;$$

(c_n — комплексные постоянные). Если степенной ряд сходится в некоторой точке $z \neq a$, то либо он абсолютно сходится во всей комплексной плоскости z, либо имеется такое число $R > 0$, что ряд абсолютно сходится для всех z таких, что $|z-a| < R$, и расходится для $|z-a| > R$. Круг $|z-a| < R$ называется *кругом сходимости* ряда, а R — *радиусом сходимости*. Радиус сходимости может быть вычислен по формуле

$$R = 1/l, \text{ где } l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

На окружности $|z-a| = R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться и обладает по меньшей мере одной *особой точкой*, т. е. такой точкой z_1, что не существует степенного ряда с центром в z_1 и положительным радиусом сходимости, сумма которого на общей части кругов сходимости совпадала бы с суммой данного степенного ряда.

Если $R = 0$, то ряд сходится только в точке $z = 0$; в случае $R = +\infty$ ряд *всюду сходится*. Степенной ряд сходится всюду, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Например, для $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ имеем $R = 0$; для $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ имеем $R = +\infty$; для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ имеем $R = 1$.

Внутри круга сходимости степенной ряд представляет собой аналитическую функцию. Ее дифференцирование (интегрирование) по z осуществляется путем почленного дифференцирования (интегрирования) соответствующего степенного ряда. Продифференцированный (проинтегрированный) степенной ряд имеет тот же самый радиус сходимости, что и первоначальный ряд. Это свойство можно использовать для разложения аналитических функций в степенные ряды.

Пример 13. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{arctg} z$ в степенной ряд в окрестности $z = 0$.

Используем геометрическую прогрессию (см. пример 12)

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots$$

Почленно интегрируя, получаем

$$f(z) = \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Теорема единственности. Два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^n$ с равными радиусами сходимости, отличными от нуля, совпадают (т. е. $c_n = c'_n$), если они оба сходятся к одним и тем же значениям для некоторой сходящейся к внутренней точке круга сходимости бесконечной последовательности попарно различных точек.

Сумму, разность и *произведение* сходящихся степенных рядов можно тоже представить в виде степенного ряда, который сходится внутри общего круга сходимости исходных рядов. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$ и $c_0 \neq 0$, то существует такой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с ра-

диусом сходимости, отличным от нуля, что в некотором круге с центром в $z = 0$

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Преобразование степенных рядов. Если аналитическая функция задана в виде степенного ряда, сходящегося в круге K_R:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

то она может быть представлена в виде ряда по степеням $z - a$ в каждой точке a такой, что $|a| < R$. Тогда $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$. Радиус сходимости R_1 этого степенного ряда не меньше расстояния от a до границы круга K: $R_1 \geqslant R - |a|$. В случае равенства точка касания P обоих кругов (рис. 3.86) является *особой точкой* для $f_1(z)$. При $R_1 > R - |a|$ область сходимости $f_1(z)$ выходит за пределы области сходимости $f(z)$; тогда говорят, что $f_1(z)$ есть *аналитическое продолжение* $f(z)$ (см. 3.4.9.1).

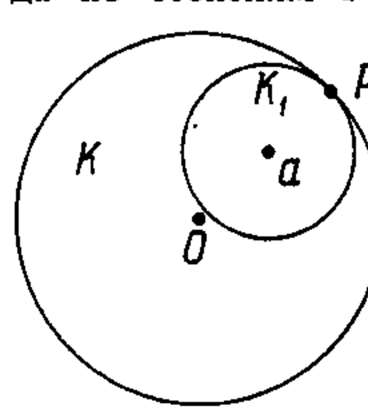


Рис. 3.86

3.4.7.3. Ряд Тейлора. Если $f(z)$ – аналитическая функция в круге K с центром в точке a ($a \neq \infty$) радиуса $R > 0$, то всегда существует степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, сходящийся в круге K_1 ($|z - a| < R_1$, где $R \leqslant R_1$) к функции $f(z)$. Коэффициенты ряда являются комплексными числами, определяемыми по формулам $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Тем самым в K_1 функция $f(z)$ представляется в виде ряда

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$ в окрестности K_1 точки $z = a$.

Пример 14. Разложение $\ln(1+z)$ в ряд в окрестности точки $z = 0$. Имеем

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \ldots$$

(сходится при $|z| < 1$).

Если функцию можно разложить в степенной ряд по степеням $z - a$, то на основании теоремы единственности для степенных рядов он должен быть рядом Тейлора функции в окрестности точки a.

3.4.7.4. Ряд Лорана. Если $f(z)$ – функция, аналитическая внутри некоторого кольца между двумя концентрическими окружностями с центром a ($0 < r \leqslant |z - a| \leqslant R$, $a \neq \infty$), то эта функция единственным образом может быть представлена в виде степенного *ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^{-k}, \quad (3.86)$$

коэффициенты которого вычисляются по следующим формулам:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}},$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\zeta - a)^{k-1} f(\zeta)\,d\zeta$$

(C – произвольно выбранный замкнутый путь интегрирования внутри кольцевой области, по которому обходят точку a в положительном направлении (против часовой стрелки)).

Первый ряд в формуле (3.86) представляет собой обычный степенной ряд, который называется *регулярной частью ряда Лорана*, а второй ряд называется *главной частью ряда Лорана*.

Формулу (3.86) можно записать в следующем виде:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \quad (3.87)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}}.$$

3.4.7.5. Классификация особых точек. Понятия правильной, особой и изолированной особой точек даны в 3.4.5.3. Если функция $f(z)$ – аналитическая в окрестности точки a (но не обязательно в самой a), то характер точки a определяется разложением в ряд Лорана в окрестности этой точки.

1) Если ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями (т. е. $c_n = 0$ при $n < 0$), то ряд Лорана обращается в ряд Тейлора; при этом или функция $f(z)$ – аналитическая также и в точке a (если $f(a) = c_0$), или a является устранимой особой точкой $\left(\lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0 \neq f(a)\right)$. В последнем случае, полагая $f(a) = c_0$, достигают того, что функция становится аналитической в точке $z = a$ (*особенность устранимая*).

2) Если разложение в ряд Лорана содержит только конечное число членов с отрицательными степенями (все $c_n = 0$ при $n < m < 0$ и $c_m \neq 0$), то точка a называется *полюсом* m-го порядка функции $f(z)$. Обозначение $f(a) = \infty$.

3) Если (3.87) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями, то a называется *существенно особой* точкой функции $f(z)$.

Пример 15. $f(z) = e^{1/z}$ имеет существенно особую точку при $z = 0$, так как разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}.$$

Пример 16. Функция $f(z) = 1/(z-a)^3$ имеет полюс 3-го порядка в точке $z = a$.

Пример 17. Функция

$$f(z)=\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

имеет полюс 1-го порядка в точке $z=0$.

Важнейшее свойство аналитических функций выражает

Теорема Пикара (большая). Если $f(z)$ – однозначная аналитическая функция в окрестности точки $z=a$, являющейся для нее существенно особой точкой, то в каждой окрестности точки $z=a$ функция $f(z)$ принимает любое конечное значение, за исключением, быть может, одного.

3.4.7.6. Поведение аналитических функций на бесконечности. Определение функции, аналитической на бесконечности ($z=\infty$), дано в 3.4.5.3. Исследование поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ в общем случае сводится преобразованием $z=1/\zeta$ к изучению свойств в окрестности точки $\zeta=0$ комплексной плоскости функции $F(\zeta)=f(1/\zeta)$. Таким образом, выводы пп. 3.4.7.4, 3.4.7.5 могут быть перенесены на случай $z=\infty$.

Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ формально имеет тот же вид, что и при разложении в окрестности точки $z=0$:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kz^k, \tag{3.88}$$

однако при этом точка $z=\infty$: 1) *существенно особая*, 2) *регулярная* или *устранимая особая*, 3) *полюс порядка* m – в зависимости от того, сколько имеется членов с положительными степенями z в разложении (3.88): 1) бесконечно много, 2) совсем нет, 3) конечное число.

Например, многочлен m-й степени обладает в точке $z=\infty$ полюсом m-го порядка.

3.4.8. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

3.4.8.1. Вычеты. Если аналитическая функция $f(z)$ в точке $z=a$ имеет изолированную особую точку (см. 3.4.5.3), то коэффициент c_{-1} при степени $(z-a)^{-1}$ в ряде Лорана функции $f(z)$ называют *вычетом* аналитической функции $f(z)$ относительно точки a. Обозначение: $\operatorname{Res}_a f(z)$ или $\operatorname{Выч}_a f(z)$. При $a\neq\infty$

$$\operatorname{Res}_a f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,d\zeta=c_{-1},$$

а при $a=\infty$

$$\operatorname{Res}_\infty f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,d\zeta=-c_{-1},$$

причем C – любая замкнутая гладкая кривая Жордана, охватывающая точку $z=a$, которая обходится против часовой стрелки в первом случае ($a\neq\infty$) и в противоположном направлении во втором ($a=\infty$).

Если $f(z)$ имеет в точке $z=a\neq\infty$ полюсы m-го порядка, то разложение в ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k, \tag{3.89}$$

и вычет можно вычислить следующим образом:

$$c_{-1}=\operatorname{Res}_a f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}. \tag{3.90}$$

Пример 18. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ имеет в точках $z=\pm ia$ простые полюсы. Согласно (3.90), имеем

$$\operatorname{Res}_{ia} f(z)=\lim_{z\to ia}\left[(z-ia)\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right]=\lim_{z\to ia}\frac{e^{iz}}{z+ia}=\frac{e^{-a}}{2ia},$$

$$\operatorname{Res}_{-ia} f(z)=\lim_{z\to -ia}\left[(z+ia)\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right]=-\frac{e^{a}}{2ia}.$$

В случае устранимой особенности вычет при $z\neq\infty$ всегда равен нулю. Для бесконечно удаленной точки это уже не так; например, $f(z)=1/z$ обладает в точке $z=\infty$ устранимой особенностью, в то время как $\operatorname{Res}_\infty\dfrac{1}{z}=-1$.

3.4.8.2. Теорема вычетов. Если $f(z)$ – аналитическая функция в области G, за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и C – замкнутая кусочно гладкая кривая, охватывающая особые точки a_i $(i=1, \ldots, k)$ и лежащая целиком в области G, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}_{a_i} f(z).$$

Для функции, аналитической всюду в расширенной комплексной плоскости, кроме конечного числа особых точек, сумма вычетов во всех особых точках (включая точку $z=\infty$) равна нулю.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция в области G, включая границу C (кусочно гладкую замкнутую кривую), и аналитическая, за исключением, быть может, конечного числа полюсов внутри G. Если, кроме того, $f(z)\neq 0$ при $z\in C$, a_i – нули кратности α_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, b_i – полюсы порядка β_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ внутри G, то для любой функции $g(z)$, аналитической внутри области G и на ее границе G, справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i g(a_i)-\sum_{i=1}^{m}\beta_i g(b_i).$$

В частности, при $g(z)=1$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\sum_{i=1}^{m}\beta_i=N-P$$

(*логарифмический вычет*), где $N=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$ – количество нулей (с учетом кратности), а $P=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i$ – ко-

личество полюсов (с учетом порядка) функции $f(z)$ в области G, ограниченной контуром C.

3.4.8.3. Применение к вычислению определенных интегралов. Теорема вычетов оказывается особенно полезной для вычисления различных несобственных интегралов.

Рис. 3.87

Если $f(z)$ – аналитическая функция во всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, лежащих над действительной осью (рис. 3.87), и если $z = \infty$ – по меньшей мере двукратная нулевая точка $f(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_\nu} f(z). \qquad (3.91)$$

(Граница C области G, т. е. области $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, есть действительная ось.)

Пример 19. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ – аналитическая в области $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, исключая точку $z = i$, и обладает в точке $z = \infty$ двойной нулевой точкой ($z = \infty$ – устранимая особая точка). По формуле (3.90) имеем

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{1+z^2} = \lim_{z \to i} \frac{z-i}{1+z^2} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

и, согласно (3.91), получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

3.4.9. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

3.4.9.1. Принцип аналитического продолжения. Пусть $f_1(z), f_2(z)$ – функции, аналитические в G_1, G_2 соответственно, и пусть $f_1(z) = f_2(z)$ в $G_1 \bigcap G_2 \neq \varnothing$ (рис. 3.88). Тогда говорят, что $f_1(z)$ *аналитически продолжается* в область G_2 при помощи $f_2(z)$ и, наоборот, $f_2(z)$ *аналитически продолжается* в область G_1 при помощи $f_1(z)$.

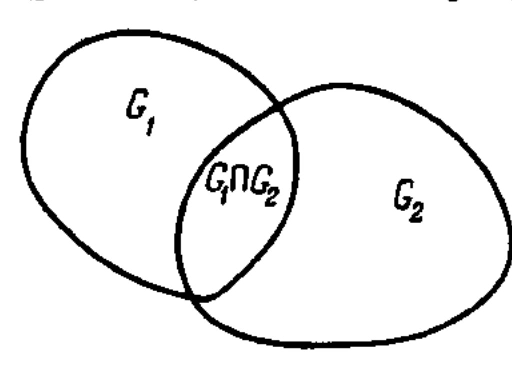


Рис. 3.88

Согласно теореме единственности для аналитических функций (см. 3.4.5.3), любая из функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ определяется другой однозначно. Следовательно, обе эти функции можно воспринимать как элементы одной функции $F(z)$, которая является аналитической в $G_1 \bigcup G_2$.

Пример 20. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ при $|z| < 1$ определяет аналитическую функцию $f(z) = \frac{1}{1-z}$. В то время как степенной ряд сходится только внутри единичного круга, функция $\frac{1}{1-z}$ определена в замкнутой области плоскости z и является аналитической, исключая точку $z = 1$ – полюс 1-го порядка.

Тем самым $\frac{1}{1-z}$ представляет собой аналитическое продолжение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ за единичный круг во всю комплексную плоскость, за исключением точки $z = 1$.

Если аналитическое продолжение существует, то оно может быть истолковано следующим образом. Предположим, что аналитическая функция f представлена в некоторой точке z_0 в виде степенного ряда с кругом сходимости $|z - z_0| < r$. Для каждой точки $z = z_1$ внутри этого круга значения $f(z_1), f'(z_1), \ldots$ известны и определяют разложение в ряд Тейлора в окрестности этой точки. Новый степенной ряд сходится внутри круга $|z - z_1| < r_1$, который может иметь часть, лежащую вне первого круга. Тем самым мы получаем аналитическое продолжение функции $f(z)$. Этот процесс может быть продолжен; в результате образуется «цепочка» пересекающихся кругов сходимости. Объединение этих кругов дает область G, в которой различные разложения в ряд определяют аналитическую функцию F – аналитическое продолжение функции f, причем разложения в окрестности некоторых точек $z \in G$ рассматриваются как разложения, определяющие значения функции $F(z)$ в этих точках z. Степенные ряды, представляющие таким образом аналитическую функцию F в своих кругах сходимости, называются *элементами функции* F. Функция F определена однозначно, если задан каждый ее элемент.

Метод сцепленных кругов используется обычно вдоль какой-либо подходящей кривой, т. е. центры кругов сходимости, начиная с начальной точки кривой, располагают на выбранной кривой.

Теорема о монодромии. Пусть f_0 – аналитическая функция в области G_0, продолжающаяся (вдоль любой непрерывной кривой) в область G ($G_0 \subset G$). Если G односвязна, то в ней существует аналитическое продолжение F функции f_0.

Если при помощи метода сцепленных кругов, исходя из элемента $f_0(z)$ функции $F_1(z)$ и перемещаясь вдоль замкнутой непрерывной кривой, возвращаются вновь в круг сходимости функции $f_0(z)$ и полученное новое разложение $f_n(z)$ определяет в этой области значения, отличные от значений $f_0(z)$ в тех же точках (это возможно лишь для неодносвязных областей), то $f_n(z)$ представляет собой элемент другой функции $F_2(z)$. В этом случае $F_1(z)$ и $F_2(z)$ интерпретируются как различные ветви некоторой функции $F(x)$, определенной, однозначной и аналитической на соответствующей римановой поверхности (см. 3.4.10).

3.4.9.2. Принцип симметрии (Шварца).

1) Принцип непрерывности. Пусть две односвязные области G_1 и G_2 не имеют общих точек, но их границы имеют общую часть Γ. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические соответственно в областях G_1 и G_2, непрерывны в объединении $G_1 \bigcup \Gamma$ и $\Gamma \bigcup G_2$ соответственно и совпадают во всех точках Γ, т. е. $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \Gamma$, то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга.

2) Принцип симметрии. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области G, граница которой содержит дугу окружности или прямолинейный отрезок Γ, причем w непрерывна на Γ; если точки $w = f(z)$ для $z \in \Gamma$ также располагаются соответственно на некоторой дуге окружности или прямолинейном отрезке Γ^*, то функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена в область G^*, симметричную относительно Γ; при этом значения $f(z)$ в точках, симметричных относительно Γ, будут симметричны относительно Γ^*.

Если функция $f(z)$, аналитическая в области G, имеет на гладкой дуге нулевые значения, то она является тождественным нулем. Таким образом, две функции, различные в некоторой области G, не могут иметь совпадающие значения на какой-либо гладкой дуге.

3.4.10. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Функции, обратные таким функциям, как e^z, $\sin z$, которые многократно принимают одни и те же значения при изменении z в области определения D, служат примером многозначной зависимости ($w = \operatorname{Ln} z$, $w = \operatorname{Arcsin} z$).

Взаимно однозначное соответствие между D и областью значений функции W обеспечивается при наложении на подобные функциональные зависимости некоторых ограничений. Часто бывает полезно представить многозначную функцию как однозначную, определенную на *римановой поверхности*. Такая поверхность состоит из некоторого числа плоскостей z, или «листов», соответствующих ветвям функции $f(z)$ и соединенных вдоль особых кривых, называемых *разрезами* (см. ниже).

3.4.10.1. Однолистные функции, обратные функции. *Однолистной областью* E называют область регулярности функции $f(z)$, в которой $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Тогда $f(z)$ называют *однолистной функцией* в E. При этом в E выполнено неравенство $f'(z) \neq 0$, $f(z)$ имеет однозначную обратную функцию $z = g(w)$, аналитическую в области образов B однолистной области E плоскости w, и

$$[g(w)]' = \frac{1}{f'(z)} \qquad (w \in B,\ z = g(w)).$$

Производная $w' = nz^{n-1}$ функции $w = z^n$ равна нулю при $z = 0$ и отлична от нуля при $z \neq 0$. Следовательно, z^n в окрестности точки $z = 0$ имеет неоднозначную обратную функцию. Именно, если радиус-вектор $z = |z| e^{i\varphi}$ ($\varphi = \arg z$) заметает, например, одну из углообразных областей E_k: $\frac{2\pi k}{n} - \frac{\pi}{n} < \varphi < \frac{2\pi k}{n} + \frac{\pi}{n}$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ плоскости z, то соответствующий радиус-вектор $w = |z|^n e^{in\varphi}$ заметает всю плоскость w, за исключением отрицательной части действительной оси (ср. рис. 3.89, *а* с рис. 3.89, *б*). Углы $\varphi = \angle(zOx)$ увеличиваются в n раз. Полному повороту радиуса-вектора в плоскости z соответствуют n полных поворотов в плоскости w.

Каждая из областей E_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ для $w = z^n$ является однолистной областью и отображается взаимно однозначно при помощи функции $w = z^n$ на плоскость w, разрезанную вдоль отрицательной части действительной оси; обозначим эту плоскость B_k. Она покрывается n раз значениями функции $w = z^n$, т. е. каждая E_k отображается

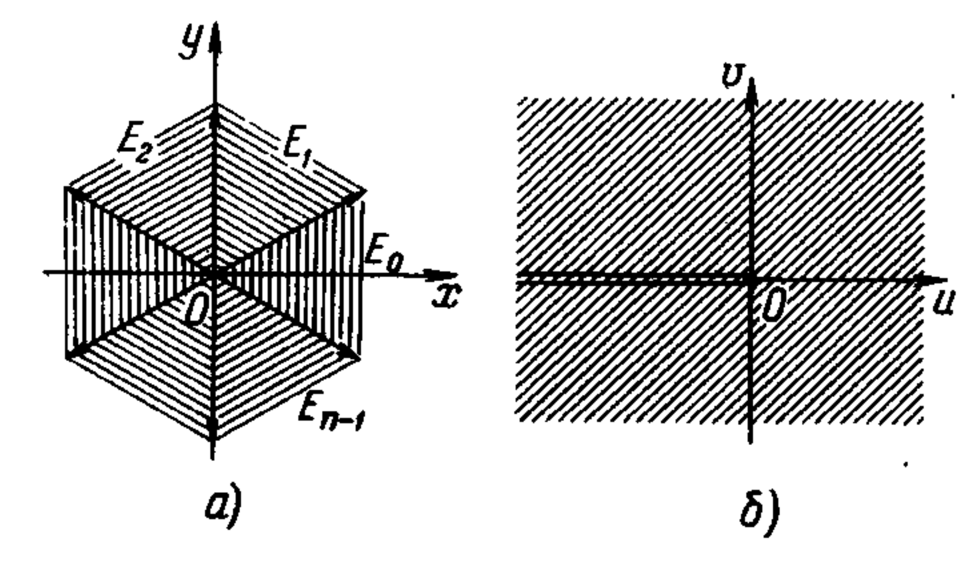


Рис. 3.89

на B_k точно один раз. Если представить себе B_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ как n экземпляров так называемых «листов», расположенных один над другим, то функция $w = z^n$ теперь может быть однозначно обращена на каждом листе B_k, т. е. для каждой ветви $z = \sqrt[n]{w}$ имеем

$$z = g_k(w) = z_k(w) = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i(\psi_0 + 2k\pi)/n}$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1);$$

главное значение $\psi_0 = \arg w$. Главное значение $\sqrt[n]{w}$ называют *главной ветвью* $z_0(w)$. Областями определений (соответственно областями значений) ветвей $z = z_k(w)$ являются B_k (соответственно E_k).

3.4.10.2. Риманова поверхность функции $z = \sqrt[n]{w}$. Как объединяются n ветвей $z_k(w)$ в одну функцию, как они связаны? Если независимое переменное w функции $\sqrt[n]{w}$ в плоскости w обходит точку $w = 0$ по некоторой замкнутой кривой в направлении против часовой стрелки, начиная с $\arg w = -\pi$, то при каждом обходе этой точки главное значение ψ_0 пробегает значения от $-\pi$ до $+\pi$; в силу того что $-\pi < \arg w = \psi_0 < +\pi$ и $\operatorname{Arg} w = \psi_0 + 2k\pi$, показатель k при каждом переходе через отрицательную часть действительной оси возрастает на 1. Так как $z_k(w) = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i(\psi_0 + 2k\pi)/n}$, то такой переход w через отрицательную часть действительной оси означает переход от ветви $z_k(w)$ к ветви $z_{k+1}(w)$. Итак, на этой оси n ветвей связаны циклическим переходом $(\widehat{z_0 z_1}\widehat{z_2}\ldots\widehat{z_{n-1} z_n} = z_0)$.

Это дает возможность представить функцию $\sqrt[n]{w}$ в плоскости w как бы состоящей из n листов B_k (ср. 3.4.10.1), расположенных друг над другом и разрезанных вдоль отрицательной части действительной оси (подобно тому как рассматривалась плоскость z). Для того чтобы объединить отдельные листы B_k как области определения соответствующих ветвей $z_k(w)$ в одну связную область определения функции $\sqrt[n]{w}$, соединим их друг с другом согласно циклическому переходу ветвей $z_k(w)$ вдоль лежащих друг над другом разрезов: граница разреза, относящаяся к верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}(w) \geqslant 0$) листа B_k (обозначается знаком плюс), «склеивается» с границей разреза, относящейся к нижней полуплоскости ($\operatorname{Im}(w) \leqslant 0$) (обозначается знаком минус) лежащего над ним листа B_{k+1}. Последняя граница «плюс» (+) листа B_{n-1} соеди-

няется с границей разреза «минус» (−) листа B_0. Построенная таким образом n-листная поверхность называется *римановой поверхностью* функции $z = \sqrt[n]{w}$ (рис. 3.90).

Каждый лист B_k взаимно однозначно соответствует однолистной области E_k, и совокупность

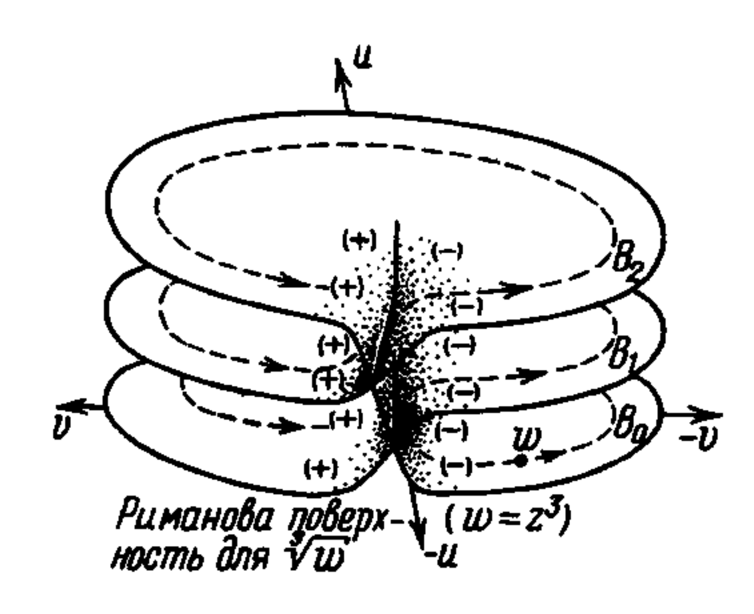


Рис. 3.90

значений $\sqrt[n]{w}$ однозначно отображается на соответствующую риманову поверхность.

Точки $w = 0$ и $w = \infty$ называются точками *ветвления* $n - 1$-го порядка функции $\sqrt[n]{w}$, так как при n-разовом обходе в одном и том же направлении вокруг этих точек мы снова возвращаемся к первоначальной ветви (рис. 3.90).

3.4.10.3. Риманова поверхность функции $z = \operatorname{Ln} w$. Рассмотрение функций $w = e^z$, $z = \operatorname{Ln} w$ проведем по аналогии с функциями $w = z^n$, $z = \sqrt[n]{w}$. В качестве однолистных областей функция $w = e^z$ обладает бесконечным множеством полос $2k\pi + \alpha < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi + \alpha$ (α – любая действительная постоянная, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), которые расположены параллельно действительной оси и имеют ширину 2π. Каждая из них может быть однозначно обращена, в силу чего появляется бесконечно много ветвей функции $z = z_k = \ln|w| + i(\psi_0 + 2k\pi)$ (главное значение $\psi_0 = \arg w$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), которые в качестве области определения имеют при $\alpha = -\pi$ плоскость w, разрезанную вдоль отрицательной части действительной оси. В связи с этим риманова поверхность для функции $\operatorname{Ln} w$ имеет строение, аналогичное строению римановой поверхности функции $\sqrt[n]{w}$, но с бесконечным числом листов.

При любом количестве обходов в одном направлении вокруг точки $w = 0$ ($w = \infty$) невозможно вернуться к первоначальной ветви. Точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются поэтому точками ветвления бесконечного порядка, или так называемыми *логарифмическими точками ветвления*.

Пусть для функции $w = f(z)$ в некоторой окрестности точки $w = f(a)$ существует обратная функция $z = g(w)$. Тогда, если $[g(w)]'$ имеет в точке $f(a)$ нуль кратности m или полюс порядка $m + 2$, то $z = a \neq \infty$ является точкой ветвления порядка m функции $f(z)$.

Пример 21. *Для функции Жуковского* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ **вышеуказанным методом находим в плоскости** w **точки ветвления** $w_{1,2} = \pm 1$ **1-го порядка. Функция** $w = \sqrt[n]{z}$ **имеет в точке** $z = 0$ **точку ветвления** $n - 1$**-го порядка.**

3.4.11. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

3.4.11.1. Понятие конформного отображения. Отображение $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с областью определения D и областью значений W *конформно* в точке $z \in D$, т. е. отображение $w = f(z)$ сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z области D, как по величине, так и по ориентации (рис. 3.91), если в этой области функция $f(z)$ аналитическая и $f'(z) \neq 0$. Таким образом, бесконечно

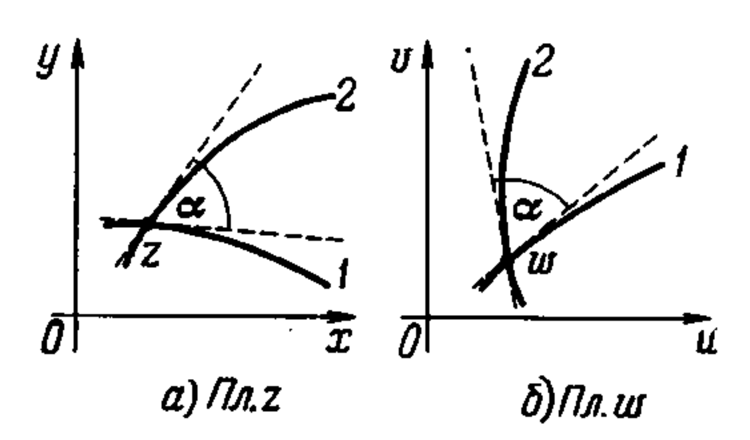


Рис. 3.91

малый треугольник в окрестности точки z отображается в подобный треугольник в плоскости w, т. е. каждая сторона растягивается (или сжимается) в отношении $|f'(z)| : 1$ и поворачивается на угол $\arg(f'(z))$ (рис. 3.92). В частности, каждое конформное отображение преобразует два семейства взаимно

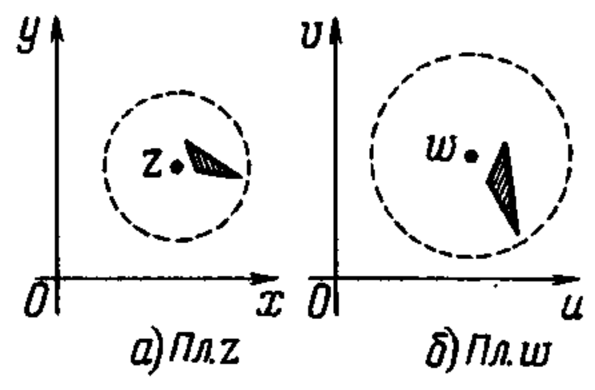
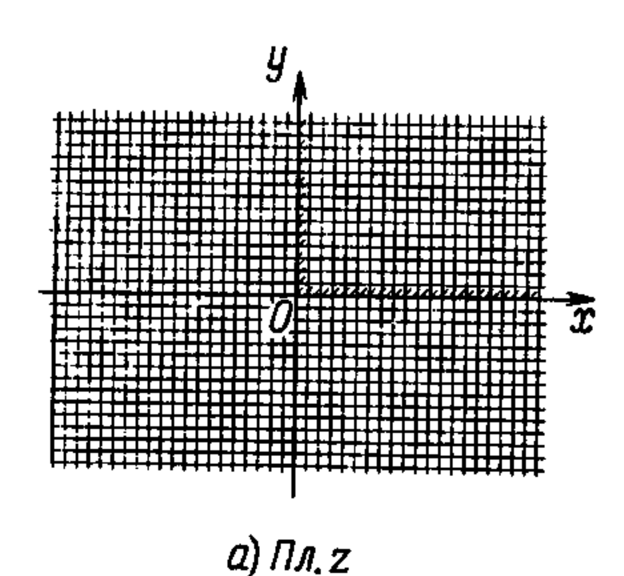


Рис. 3.92

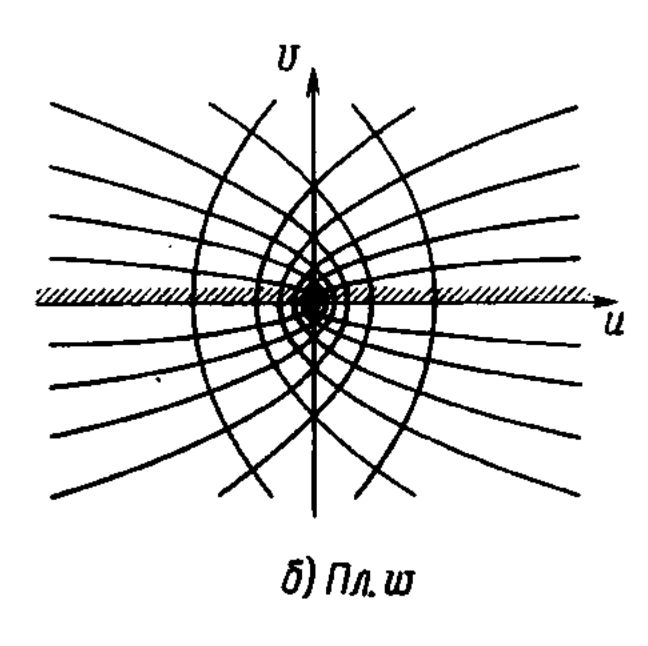
перпендикулярных координатных линий $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ плоскости z в два семейства взаимно ортогональных кривых на плоскости w. Обратно, двум семействам координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ плоскости w соответствуют два семейства взаимно ортогональных кривых на плоскости z. Таким образом, при помощи аналитических функций можно получить множество *прямоугольных* криволинейных систем координат (т. е. таких систем, в которых координатные линии различных семейств пересекаются под прямым углом). Рис. 3.93 показывает конформное отображение $w = z^2$, причем линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ переводятся во взаимно ортогональные софокусные параболы. В точке $z = 0$ конформность нарушается. Первый координатный квадрант переходит в верхнюю полуплоскость (контуры отображения отмечены штриховкой).

Описанные выше отображения называют также *конформными отображениями 1-го рода*, в то время как отображения, которые оставляют неизменной величину, но не ориентацию углов между двумя кривыми (отображения с переворотом углов), называются *конформными отображениями 2-го рода* (например, $w = \bar{z}$). Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке* $z = \infty$, если $w = f(1/z) = F(z)$ конформно в окрестности точки $z = 0$.

Задача построения отображения, которое ставит в соответствие односвязной области G_1 односвязную область G_2, решается на основе **теоремы Римана об отображении**. Для каждой (открытой) односвязной области G в плоскости z, кроме всей плоскости z, существует конформное отображение $w = f(z)$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками области G и внутренними точками единичного круга $|w| < 1$; при этом аналитическая функция f определена единственным образом,



а) Пл. z



б) Пл. w

Рис. 3.93

если задан образ точки z_0 области G и угол поворота любой кривой, проходящей через эту точку, т. е. $f(z_0) = w_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha$, где w_0 и α — заданные величины.

Например, функция $w = \frac{z-i}{z+i}$ взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$, причем точка $z = i$ переходит в точку $w = 0$.

Однозначное конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ на n-угольник $(n \geqslant 3)$ определяется так называемым *интегралом Кристоффеля — Шварца*

$$w = C_1 \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1}(t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + C_2,$$

где внутренние углы n-угольника, равные $\alpha_i\pi$ $(0 < \alpha_i < 2;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, должны удовлетворять дополнительному условию $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n - 2$; a_i являются точками действительной оси, которые соответствуют вершинам n-угольника; $C_1 \neq 0$ и C_2 являются комплексными числами, выбором которых можно получить все многоугольники с n углами, подобные данному многоугольнику. Если одна из вершин, например a_n, отображается в точку $w = \infty$, то интеграл приводится к виду

$$w = C'_1 \int_0^z (t - a'_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (t - a'_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dt + C'_2,$$

где C'_1 и C'_2 — постоянные параметры, а $a'_1, a'_2, \ldots$ $\ldots, a'_{n-1}$ — некоторые точки действительной оси.

Хорошо изучены многие функции, отображающие различные области на единичный круг или верхнюю полуплоскость. Поэтому, когда ищут нужное отображение области G_1 на область G_2, то достаточно найти аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, которые однозначно отображают G_1 и G_2 на единичный круг. Тогда функция $g_2(z)$, обратная к $f_2(z)$, отображает единичный круг однозначно на G_2, так что функция, составленная из $f_1(z)$ и $g_2(z)$, дает искомое отображение G_1 на G_2.

Конформные отображения находят применение в электротехнике, гидро- и аэродинамике и других областях приложения математики.

3.4.11.2. Некоторые простые конформные отображения. На рисунках даются графики сеток на плоскости (*изотермические сетки*), которые преобразуются в декартову прямоугольную сетку на плоскости w. Штриховкой на рисунках отмечены контуры тех областей плоскости z, которые отображаются на верхнюю полуплоскость w, а черным отмечена область, переходящая в квадрат с вершинами (0, 0) (0, 1) (1, 0) (1, 1).

а) *Линейная функция* $w = az + b$ $(a = |a|e^{i\varphi} \neq 0)$ определяет конформное преобразование расширенной плоскости z (рис. 3.94). Преобразование может

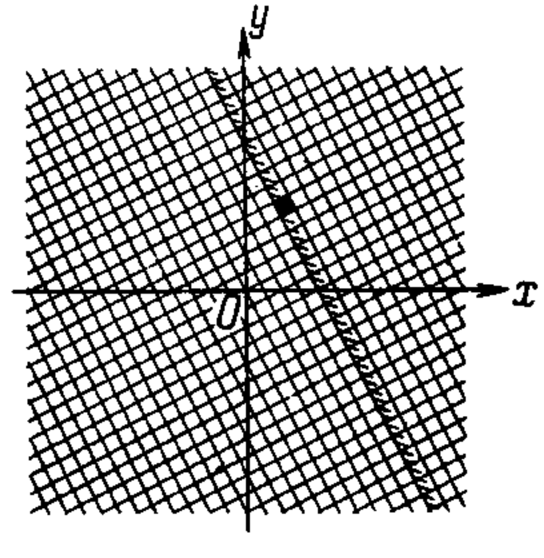


Рис. 3.94

быть разложено на три: $t = e^{i\varphi}z$ — поворот плоскости на угол φ; $s = rt$ — подобное растяжение в $r = |a|$ раз; $w = s + b$ — параллельный перенос на b. В результате фигуры в плоскости z преобразуются в себе подобные, дополнительно поворачиваясь и сдвигаясь. Точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ и $z_2 = \infty$ переходят сами в себя.

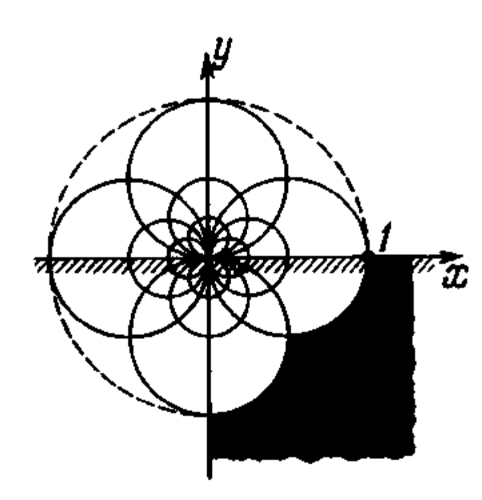


Рис. 3.95

б) *Инверсия* $w = \frac{1}{z}$ (рис. 3.95). Точка $z = |z|e^{i\varphi}$ переходит в точку $w = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$, т. е. осуществляется *инверсия относительно единичного круга* и зеркальное отображение относительно действительной оси. Внутренность единичного круга $|z| \leqslant 1$ переводится во внешнюю часть круга $|w| \leqslant 1$, и, наоборот,

внешняя часть круга $|z| \leqslant 1$ – во внутреннюю часть круга $|w| \leqslant 1$. Сама окружность $|z| = 1$ переходит в окружность $|w| = 1$. Точки $z = 1$ и $z = -1$ остаются на месте. Конформность нарушается в точке $z = 0$.

Это отображение имеет особое значение, так как оно дает возможность исследовать поведение функций на бесконечности (см. 3.4.7.6).

в) *Дробно-линейная функция* $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0,\ c \neq 0)$ однозначно и конформно отображает замкнутую плоскость z на плоскость w (рис. 3.96). Верно и обратное: каждая аналитическая функция, которая отображает взаимно

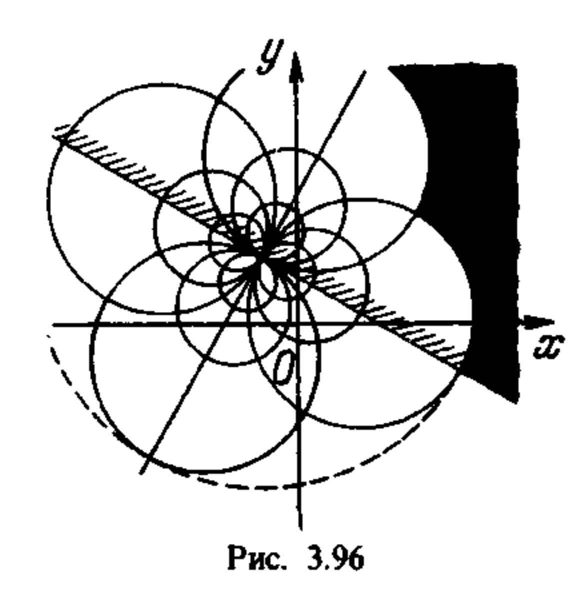


Рис. 3.96

однозначно и конформно замкнутую плоскость на себя, является дробно-линейной.

Это преобразование можно разложить на три: $t = cz + d$ – линейная функция, $s = \dfrac{1}{t}$ – инверсия и $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c} \cdot s$ – линейная функция. В результате дробно-линейная функция переводит окружность в окружность (если считать прямые частным случаем окружности). Неподвижные точки этого отображения удовлетворяют уравнению $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

г) *Квадратичная функция* $w = z^2$ отображает плоскость z на двойную плоскость w. Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств гипербол: $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$ (рис. 3.97). Конформность нарушается при $z = 0$, точки 0 и 1 остаются на месте.

д) Две ветви функции $w = \sqrt{z}$ – квадратного корня – отображают всю плоскость z: 1) на верхнюю полуплоскость w; 2) на нижнюю полуплоскость w. Изотермическая сетка плоскости z

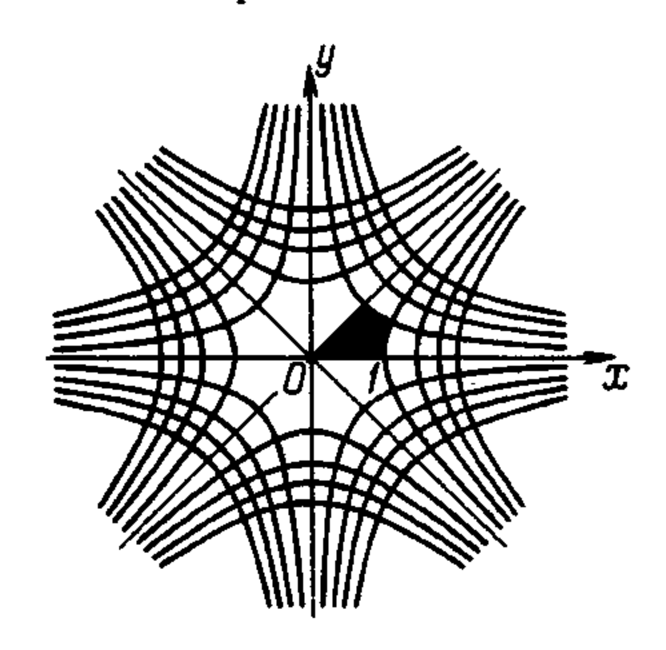


Рис. 3.97

состоит из двух семейств софокусных парабол с фокусом в начале координат и с осями, направленными по положительному и отрицательному направлениям действительной оси (рис. 3.98).

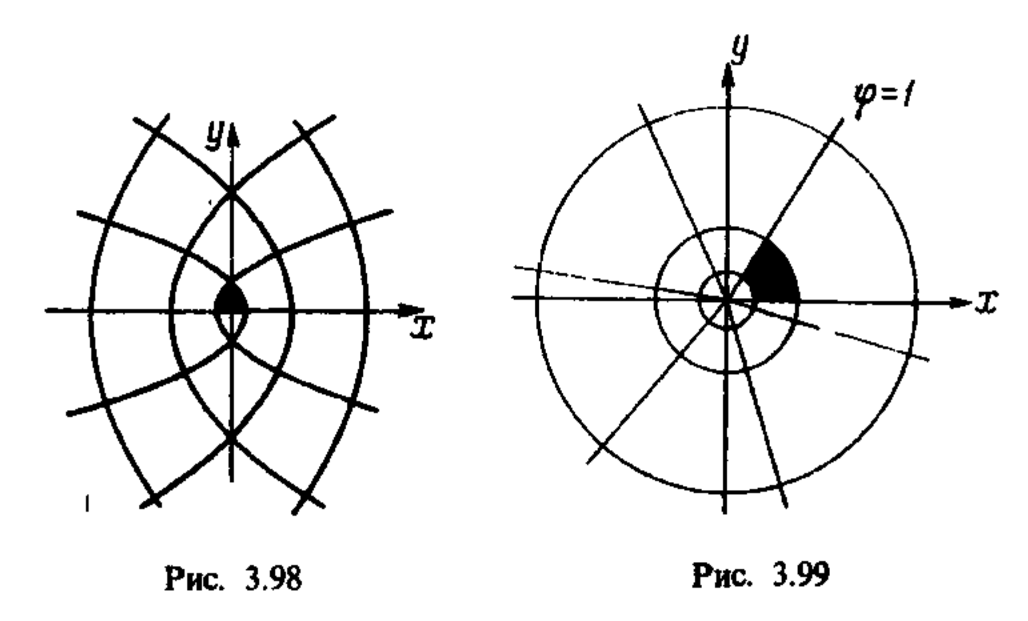


Рис. 3.98 Рис. 3.99

Конформность нарушается при $z = 0$, точки $z = 0$ и $z = 1$ остаются на месте.

е) *Логарифм* бесконечно многозначен. Для главной ветви функции $w = \operatorname{Ln} z$ $(u = \ln|z|$ и $v = \varphi_0 + 2k\pi)$ вся плоскость z переходит в полосу $-\pi < v \leqslant +\pi$ плоскости w. Изотермическая сетка состоит из окружностей $\ln|z| = \text{const}$ и лучей $\varphi = \text{const}$ (рис. 3.99), т. е. является полярной сеткой.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

4.1. МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ

4.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

4.1.1.1. Алгебра логики (алгебра высказываний, логика высказываний). Под *высказыванием* понимается имеющее смысл языковое выражение, относительно которого можно утверждать, что оно либо истинно, либо ложно. Таким образом, каждому высказыванию можно приписать *истинностное значение И* (истина) или *Л* (ложь). Вместо этих символов часто употребляются числа 1 и 0 соответственно.

Пример 1. «5 есть простое число», «3 есть делитель 7», «$3 + 5 = 9$». Здесь первое высказывание имеет истинностное значение *И*, а два других – истинностные значения *Л*. Уравнение «$2 + x = 4$» не является высказыванием. Однако всякий раз, придавая переменной x определенные числовые значения, будем получать высказывание.

Используя частицу «не», а также союзы «*и*», «*или*», «*если..., то...*», «*тогда и только тогда, когда*» и т. п., можно из одних высказываний строить другие, новые высказывания. Истинностные значения новых высказываний определяются при этом только истинностными значениями входящих в них высказываний. Построение из данных высказываний (или из данного высказывания) нового высказывания называется *логической операцией*. Знаки логических операций называются *логическими связками* (или просто *связками*). Логические связки могут быть одноместные (унарные), двухместные (бинарные), трехместные (тернарные) и т. д. В алгебре логики логические операции чаще всего описываются при помощи *таблиц истинности*. Для одноместной операции «*отрицание*» (или «*инверсия*»), отвечающей связке «не», таблица истинности выглядит так (табл. 4.1):

Таблица 4.1

A	не A
0	1
1	0

Отрицание высказывания A (т. е. *не* A) обозначается $\neg A$, или $\bar{A}$, или $\sim A$ и часто читается: «*отрицание* A» или «*не* A».

В табл. 4.2 приведены основные двухместные логические операции (и логические связки). В первом столбце дается, как правило, наиболее употребительное обозначение логической операции, во втором – некоторые другие широко распространенные обозначения той же операции, в третьем – линейно упорядоченный набор истинностных значений, отвечающий этой операции (линейное упорядочение выполнено так: если $A_1 * A_2$ – результат применения логической связки $*$ к высказываниям A_1 и A_2, то первый элемент набора есть истинностное значение выражения $0*0$, второй элемент – истинностное значение для $0*1$, третий – для $1*0$ и четвертый – для $1*1$). В четвертом столбце таблицы помещены различные названия рассматриваемой операции (и связки), в последнем указано, как обычно читается выражение вида $A_1 * A_2$, где A_1 и A_2 – высказывания, а $*$ – (условное) обозначение рассматриваемой связки.

Переменная, значениями которой являются высказывания, называется *пропозициональной переменной*.

Основными символами алгебры высказываний являются:

а) пропозициональные переменные $p_1, p_2, p_3, \ldots$;

б) одноместная связка $\neg$ и двухместные связки $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

в) скобки ( ).

Пропозициональные переменные могут обозначаться и другими буквами, например $a, b, c, \ldots$

Понятие *формулы алгебры высказываний*, или *пропозициональной формулы*, вводится по индукции:

1) выражение, состоящее только из пропозициональной переменной, является пропозициональной формулой;

2) если H_1 и H_2 – пропозициональные формулы, то каждое из выражений $\neg H_1$, $(H_1 \wedge H_2)$, $(H_1 \vee H_2)$, $(H_1 \rightarrow H_2)$ и $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ – пропозициональная формула;

3) последовательность основных символов только тогда является пропозициональной формулой, когда она построена в соответствии с 1) и 2).

Пример 2. Выражения

$$H_1 \equiv ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge \neg p_3),$$
$$H_2 \equiv ((p_1 \wedge \neg p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2))$$

являются пропозициональными формулами.

Пропозициональная формула, начинающаяся со знака $\neg$, называется *отрицанием*. Пропозициональные формулы $(H_1 \wedge H_2)$, $(H_1 \vee H_2)$, $(H_1 \rightarrow H_2)$ и

Таблица 4.2

Обозначение логической операции	Другие обозначения логической операции	Набор истинностных значений, отвечающий данной логической операции	Название логической операции и связки	Как читается выражение, приведенное в первом столбце
$A_1 \wedge A_2$	$A_1 \& A_2$ $A_1 \cdot A_2$ $A_1 A_2$ $\min(A_1, A_2)$	0001	конъюнкция, логическое умножение, логическое «и»	A_1 и A_2
$A_1 \vee A_2$	$A_1 + A_2$ $\max(A_1, A_2)$	0111	дизъюнкция, логическое сложение, логическое «или»	A_1 или A_2
$A_1 \to A_2$	$A_1 \supseteq A_2$ $A_1 \Rightarrow A_2$	1101	импликация, логическое следование	если A_1, то A_2; A_1 имплицирует A_2, A_1 влечет A_2
$A_1 \oplus A_2$	$A_1 + A_2$ $A_1 \vee A_2$ $A_1 \triangle A_2$	0110	сумма по модулю 2, разделительная дизъюнкция, разделительное «или»	A_1 плюс A_2; либо A_1, либо A_2
$A_1 \sim A_2$	$A_1 \equiv A_2$ $A_1 \leftrightarrow A_2$ $A_1 \Leftrightarrow A_2$	1001	эквиваленция, эквивалентность, равнозначность, тождественность	A_1 тогда и только тогда, когда A_2; A_1 эквивалентно A_2
$A_1 \mid A_2$		1110	штрих Шеффера, антиконъюнкция	неверно, что A_1 и A_2; A_1 штрих Шеффера A_2
$A_1 \downarrow A_2$	$A_1 \circ A_2$ $A_1 \bar{\vee} A_2$	1000	стрелка Пирса, антидизъюнкция, функция Вебба, функция Даггера	ни A_1, ни A_2; A_1 стрелка Пирса A_2

$(H_1 \sim H_2)$ называются соответственно *конъюнкцией*, *дизъюнкцией*, *импликацией* и *эквиваленцией*.

Как и в арифметических выражениях, устанавливаются определенные правила сокращения записей пропозициональных формул:

а) вместо $\neg H$ пишут $\bar{H}$;

б) вместо $H_1 \wedge H_2$ пишут $H_1 H_2$;

в) считается, что приоритет применения связок возрастает в следующем порядке:

$$\leftrightarrow, \ \to, \ \vee, \ \wedge, \ \neg;$$

г) внешние скобки опускаются.

Пример 3.

$$((p_1 \to p_2) \wedge \neg p_3) \equiv (p_1 \to p_2)\bar{p}_3,$$

$$((p_1 \wedge \neg p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2)) \equiv p_1\bar{p}_3 \vee \overline{p_1 p_2}.$$

Сокращенная запись многократной конъюнкции и дизъюнкции. Пусть H_1, H_2, H_3, … — пропозициональные формулы. Тогда

$$\bigwedge_{i=1}^{1} H_i = H_1, \qquad \bigwedge_{i=1}^{n+1} H_i = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} H_i \wedge H_{n+1}\right),$$

$$\bigvee_{i=1}^{1} H_i = H_1, \qquad \bigvee_{i=1}^{n+1} H_i = \left(\bigvee_{i=1}^{n} H_i \vee H_{n+1}\right).$$

Пример 4.

$$\bigwedge_{i=1}^{4} H_i = (((H_1 \wedge H_2) \wedge H_3) \wedge H_4) \equiv H_1 H_2 H_3 H_4,$$

$$\bigvee_{i=1}^{4} H_i = (((H_1 \vee H_2) \vee H_3) \vee H_4) \equiv H_1 \vee H_2 \vee H_3 \vee H_4.$$

В алгебре логики широко используются алгебраический и функциональный языки. При алгебраическом подходе логические операции интерпретируются как алгебраические, действующие на множестве из двух элементов, например на множестве $\{0, 1\}$. При функциональном подходе каждой из основных логических операций сопоставляется определенная двузначная функция.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у которой аргументы пробегают множество $\{0, 1\}$ и которая на любом наборе значений аргументов принимает значение из того же множества $\{0, 1\}$, называется *функцией алгебры логики* или *булевой функцией*. Булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно задавать таблицей (табл. 4.3). Здесь наборы значений аргументов

Таблица 4.3

$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
00…00	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
00…01	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
00…10	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
00…11	$f(0, 0, \ldots, 1, 1)$
. . . .	. . . .
11…10	$f(1, 1, \ldots, 1, 0)$
11…11	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

расположены в порядке возрастания их номеров: сначала идет набор, представляющий собой двоичное разложение числа 0 (этот набор имеет номер 0); затем идет набор, являющийся двоичным разложением числа 1 (набор, номер которого есть 1); за ним следует набор, соответствующий числу 2, и т. д. Последний набор в табл. 4.3 состоит из n единиц и является двоичным разложением числа

$2^n - 1$. Имея в виду такое стандартное расположение наборов, булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ иногда задают набором $\alpha_0\alpha_1 \ldots a_{2^n-1}$, в котором α_i представляет собой значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе с номером i ($i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$).

Среди булевых функций особо выделяются так называемые *элементарные* булевы функции, которые тесно связаны с основными логическими операциями (и связками) – отрицанием, конъюнкцией и др.

Двухместными элементарными булевыми функциями являются *конъюнкция, дизъюнкция, импликация, сумма по модулю* 2, *эквиваленция, штрих Шеффера* и *стрелка Пирса.* Каждая из перечисленных функций обозначается и определяется так же, как логическая операция с соответствующим названием, приведенная в табл. 4.2. Отличие состоит только в том, что символы A_1 и A_2, рассматриваемые в табл. 4.2, следует толковать теперь как *булевы переменные* (т. е. переменные, принимающие значения из множества $\{0, 1\}$).

Имеются две одноместные булевы функции, зависящие от переменного x: *тождественная функция* $\varphi_1(x)$ и *отрицание* x – функция $\varphi_2(x)$ (табл. 4.4).

Таблица 4.4

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	0	1
1	1	0

Тождественная функция $\varphi_1(x)$ обычно обозначается через x, а отрицание x – через $\neg x$ или $\bar{x}$ (ср. с логической операцией «отрицание»). Обе одноместные булевы функции считаются элементарными.

Имеются две нуль-местные элементарные булевы функции: это *константы* 0 и 1.

Каждой пропозициональной формуле можно сопоставить по определенному правилу булеву функцию:

1) пропозициональному переменному p_i сопоставляется тождественная булева функция x_i ($i = 1, 2, \ldots$);

2) пусть пропозициональным формулам H_1 и H_2 уже сопоставлены булевы функции φ_{H_1} и φ_{H_2} соответственно; тогда пропозициональной формуле $\neg H_1$ сопоставляется булева функция $\bar{\varphi}_{H_1}$, пропозициональной формуле $H_1 \wedge H_2$ (соответственно $H_1 \vee H_2$, $H_1 \to H_2$ и $H_1 \leftrightarrow H_2$) сопоставляется булева функция $\varphi_{H_1} \cdot \varphi_{H_2}$ (соответственно $\varphi_{H_1} \vee \varphi_{H_2}$, $\varphi_{H_1} \to \varphi_{H_2}$ и $\varphi_{H_1} \leftrightarrow \varphi_{H_2}$).

Булева функция φ_H, сопоставляемая по описанному правилу пропозициональной формуле H, называется *функцией истинности формулы* H.

Пусть φ_{H_i} – функция истинности формулы H_i ($i = 1, 2$); пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество тех переменных, которые встречаются хотя бы в одной из функций φ_{H_1} и φ_{H_2}. Пропозициональные формулы H_1 и H_2 называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если на всяком наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения функций φ_{H_1} и φ_{H_2} совпадают. Тот факт, что пропозициональные формулы H_1 и H_2 эквивалентны, обозначается так: $H_1 = H_2$ (или $H_1 \equiv H_2$).

Приводимые ниже *основные эквивалентности* часто оказываются полезными при оперировании с пропозициональными формулами и булевыми функциями.

Основные эквивалентности:

$\bar{\bar{H}} = H$ (правило снятия двойного отрицания);

$H \wedge H = H$ (идемпотентность конъюнкции);

$H \vee H = H$ (идемпотентность дизъюнкции);

$H_1 * H_2 = H_2 * H_1$ (коммутативность связки $*$, где символ $*$ является общим обозначением для связок $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$);

$(H_1 * H_2) * H_3 = H_1 * (H_2 * H_3)$ (ассоциативность связки $*$, где $*$ – общее обозначение для связок $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$);

$H_1 \wedge (H_2 \vee H_3) = (H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

$H_1 \vee (H_2 \wedge H_3) = (H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);

$\overline{H_1 \wedge H_2} = \overline{H_1} \vee \overline{H_2}$ и $\overline{H_1 \vee H_2} = \overline{H_1} \wedge \overline{H_2}$ (правила де Моргана);

$H_1 \vee (H_1 \wedge H_2) = H_1$ и $H_1 \wedge (H_1 \vee H_2) = H_1$ (правила поглощения);

$H_1 \vee (\overline{H_1} \wedge H_2) = H_1 \vee H_2$ и $H_1 \wedge (\overline{H_1} \vee H_2) = H_1 \wedge H_2$;

$H_1 \to H_2 = \overline{H_1} \vee H_2$;

$H_1 \leftrightarrow H_2 = H_1 H_2 \vee \overline{H_1} \overline{H_2}$;

$H\bar{H} = Л$ (закон противоречия);

$H \vee \bar{H} = И$ (закон исключенного третьего);

$H \cdot И = H$;

$H \vee И = И$;

$H \cdot Л = Л$;

$H \vee Л = H$.

Замечание. Употребляемая в нескольких приведенных эквивалентностях буква $И$ (соответственно буква $Л$) обозначает такую пропозициональную формулу, функция истинности которой равна тождественно 1 (соответственно 0).

Пропозициональная формула $\bigwedge_{k=1}^{r} p_{i_k}^{\sigma_k}$ (соответственно $\bigvee_{k=1}^{r} p_{i_k}^{\sigma_k}$), где $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $p_{i_k}^0 \equiv \bar{p}_{i_k}$, $p_{i_k}^1 \equiv p_{i_k}$, $i_k \in \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, r$ и $p_{i_m} \neq p_{i_k}$ при $m \neq k$, называется *элементарной конъюнкцией* (соответственно *элементарной дизъюнкцией*) *над множеством пропозициональных переменных* $\{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n}\}$. Число r (число букв в формуле) называется *рангом* элементарной конъюнкции (соответственно элементарной дизъюнкции). Две элементарные конъюнкции (соответственно дизъюнкции) считаются различными, если хотя бы в одной из них найдется выражение $p_i^{\sigma_i}$, не входящее в другую.

Пример 5. Конъюнкции $p_2\bar{p}_3$, p_2, p_4, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_4$, $\bar{p}_2 p_3$ являются попарно различными элементарными конъюнкциями над множествами пропозициональных переменных $\{p_2, p_3, p_4, p_6\}$, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $\{p_2, p_3, p_4\}$ и т. д.

Пропозициональная формула $\bigvee_{j=1}^{s} H_j$ (соответственно $\bigwedge_{j=1}^{s} H_j$), в которой $H_1, H_2, \ldots, H_s$ – попарно различные элементарные конъюнкции (соответственно дизъюнкции) над множеством пе-

ременных $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}\}$ и, кроме того, ранг каждой конъюнкции H_j (соответственно дизъюнкции H_j) равен n, называется *совершенной дизъюнктивной* (соответственно *конъюнктивной*) *нормальной формой* над множеством $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}\}$. Две совершенные дизъюнктивные (соответственно конъюнктивные) нормальные формы считаются *одинаковыми*, если совпадают множества элементарных конъюнкций (соответственно дизъюнкций), входящих в эти формы.

Справедлива теорема. Любая пропозициональная формула $H(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n})$, в которую входят только пропозициональные переменные $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}$, принадлежащие множеству $\{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n}\}$, либо эквивалентна *Л* (соответственно *И*), либо эквивалентна в точности одной совершенной дизъюнктивной (соответственно конъюнктивной) нормальной форме над множеством переменных $\{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n}\}$.

Пример 6. Пропозициональная формула $H \equiv \overline{p_2 \to p_3} \vee \bar{p}_2 p_3$ эквивалентна совершенной дизъюнктивной нормальной форме $p_2\bar{p}_3 \vee \bar{p}_2 p_3$, а также совершенной конъюнктивной нормальной форме $(p_2 \vee p_3)(\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3)$. Над множеством переменных $\{p_2, p_3, p_5\}$ формула H эквивалентна совершенной дизъюнктивной нормальной форме

$$p_2\bar{p}_3p_5 \vee p_2\bar{p}_3\bar{p}_5 \vee \bar{p}_2p_3p_5 \vee \bar{p}_2p_3\bar{p}_5$$

и совершенной конъюнктивной нормальной форме

$$(p_2 \vee p_3 \vee p_5)(p_2 \vee p_3 \vee \bar{p}_5)(\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3 \vee p_5)(\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3 \vee \bar{p}_5).$$

Если в определении элементарной конъюнкции (дизъюнкции) заменить пропозициональные формулы $p_{i_k}^{\sigma_k}$ на булевы функции $x_{i_k}^{\sigma_k}$, то получится определение элементарной конъюнкции (дизъюнкции) в классе булевых функций. Аналогичным образом можно получить для булевых функций определения совершенных дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция, отличная от тождественного 0. Тогда ее можно представить в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, которая имеет вид

$$\bigvee_{\substack{\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\tilde{\sigma}) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Здесь дизъюнкция берется по всем таким наборам $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна 1.

Если булева функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не равна тождественно 1, то ее можно представить в совершенной конъюнктивной нормальной форме, применив, например, следующий метод: сначала строится совершенная дизъюнктивная нормальная форма для функции $\bar{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а затем отрицание полученной дизъюнктивной формы преобразуется с использованием правил де Моргана.

Пример 7. Импликация $x_1 \to x_2$ равна 1 на наборах (0, 0), (0, 1) и (1, 1). Поэтому совершенная дизъюнктивная нормальная форма для нее имеет вид $x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^1 \equiv \equiv \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2$. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма для отрицания импликации такова: $x_1\bar{x}_2$. Значит, $x_1 \to x_2 = \overline{\overline{x_1 \to x_2}} = \overline{x_1\bar{x}_2} = \bar{x}_1 \vee x_2$ — совершенная конъюнктивная нормальная форма функции $x_1 \to x_2$.

4.1.1.2. Предикаты. Применяемые в математике высказывания обычно представляют собой описание свойств каких-либо математических объектов или описание отношений (взаимосвязей), существующих между этими объектами. Для анализа закономерностей, присущих таким высказываниям, средств алгебры высказываний уже недостаточно. Возникает необходимость ввести понятие «высказывательной функции», или предиката.

Множество рассматриваемых объектов I будем называть *предметной областью* (или *множеством индивидов*), а элементы, принадлежащие множеству I, — *индивидами*.

Пример 8. I — множество всех действительных чисел и всех однозначных, всюду определенных действительных функций действительного переменного.

Знаки (символы) и последовательности знаков, которыми обозначают индивиды, называются *индивидными* (или *предметными*) *константами*.

Замечание. Очень часто индивидные константы отождествляются с теми индивидами, которые ими обозначаются.

Пример 9. «Числовые» константы: 3; π; $-\sqrt{2}$; «функциональные» константы: ln, sin, tg.

Индивидная (или *предметная*) *переменная* представляет собой знак, обозначающий произвольный индивид из некоторого непустого подмножества множества индивидов; это подмножество называется *областью изменения* данной переменной.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — индивиды из предметной области I. Рассмотрим какое-либо высказывание об этих индивидах и обозначим его через $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Если $n = 1$, то $P(a_1)$ выражает *свойство* индивида a_1. Если $n \geqslant 2$, то данное высказывание описывает некоторое *отношение* между индивидами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (порядок следования индивидов существен!). Возьмем предметные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (с областями изменения $I_1, I_2, \ldots, I_n$ соответственно; здесь I_k — подмножество множества I, $k = 1, 2, \ldots, n$). Выражение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собой *логическую функцию*, или *предикат*; при каждом замещении предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ индивидами (из соответствующих множеств I_k) оно становится высказыванием. Символ P был использован здесь для обозначения конкретного, *индивидуального* предиката, т. е. в данном случае символ P является *предикатной константой* (*постоянным предикатным символом*). *Переменный предикатный символ* представляет собой знак (или последовательность знаков), обозначающий произвольную предикатную константу из некоторого (подходящего) множества предикатных констант. Если P — переменный предикатный символ, то $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *переменным предикатом* (или просто *предикатом*). Предикат, зависящий в точности от n различных предметных переменных, называется *n-местным* (или *n-арным*). Высказывание можно толковать как нуль-местный предикат, т. е. как предикат, не зависящий от предметных переменных. В случае бинарных предикатов вместо записи $P(x_1, x_2)$ часто применяют запись x_1Px_2.

Пример 10. «x есть четное число» — одноместный (унарный) предикат; «x есть делитель y» — двуместный (бинарный) предикат. Оба предиката — индивидуальные.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — предикат, а y_j — индивидная константа, или предметная переменная, $j = 1, 2, \ldots, n$; тогда выражение $P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется *элементарной формулой*.

Пример 11. Рассмотрим бинарные индивидуальные предикаты $x_1 > x_2$, $x_1 \mid x_2$ и $x_1 = x_2$. Символы $>$, $\mid$ и $=$ означают, как обычно, «больше», «есть делитель» и «равно». Выражения $x_1 > 3$, $7 \mid 5$ и $x_3 = x_{10}$ являются элементарными формулами.

С элементарными формулами можно оперировать так же, как с пропозициональными переменными: к ним применимы все операции алгебры высказываний. При помощи логических связок из элементарных формул строятся новые, *предикатные формулы.* Сами элементарные формулы тоже считаются предикатными.

Пример 12. $\neg(7 \mid 5 \wedge x > 3)$ и $\neg(3 \mid 9) \vee \neg(x = y)$ – предикатные формулы. Их можно «прочитать» следующим образом: первую – «неверно, что 7 – делитель 5 и x больше 3», вторую – «3 не делит 9 или x не равно y».

Использование только элементарных формул и операций алгебры высказываний не дает возможности преодолеть трудности, возникающие, например, при попытке сформулировать на формальном логико-математическом языке следующую теорему: «уравнение $x + 3 = 8$ имеет целочисленное решение». В связи с этим в рассмотрение вводятся *кванторы.* Чаще всего ограничиваются только *квантором общности* (обозначение: $\forall$; читается: «для всех...») и *квантором существования* (обозначение: $\exists$; читается: «существует...»).

Расширим понятие предикатной формулы. Будем считать, что предикатные формулы строятся из элементарных формул при помощи логических связок и кванторов всеобщности и существования.

Применение кванторов для построения формул осуществляется по следующей схеме.

Пусть H – предикатная формула и x – предметная переменная, которая может и не входить в формулу H. Тогда выражения $(\forall x H)$ и $(\exists x H)$ считаются предикатными формулами (в этом случае говорят, что H есть область действия соответствующего квантора – $\forall x$ или $\exists x$).

Приписывание спереди к предикатной формуле какого-либо квантора называется *операцией навешивания квантора* (или *связывания квантором*).

Конкретное вхождение переменной x в формулу H называется *связанным,* если оно либо непосредственно следует за каким-нибудь квантором, либо содержится в области действия некоторого квантора $\forall x$ или $\exists x$. Если вхождение переменной в формулу не является связанным, то оно называется *свободным.* Переменная, входящая в формулу H, называется *связанной* (*свободной*), если в H имеется связанное (свободное) вхождение этой переменной. Таким образом, переменная может быть одновременно и свободной, и связанной (в данной формуле).

Пример 13. Пусть $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел. В предикатной формуле $(\forall x (x \in \mathbf{Z} \to 2 \mid 2x)) \wedge (x > 5)$ переменная x является и связанной (три ее вхождения в первый член конъюнкции – связанные), и свободной (вхождение x в формулу $x > 5$ – свободное). Областью действия квантора $\forall x$ является формула $x \in \mathbf{Z} \to 2 \mid 2x$. В формуле $\exists x (x \in \mathbf{Z} \wedge x + 3 = 8)$, представляющей собой истинное высказывание, все три вхождения переменной x – связанные.

Предметные переменные, входящие в предикатные формулы, можно переименовывать в соответствии со следующими правилами.

Связанное переименование. Пусть x – связанная переменная в формуле H. Произвольное вхождение переменной x, непосредственно следующее за каким-либо квантором, и все вхождения x, принадлежащие области действия рассматриваемого квантора, можно одновременно заменить на любую переменную y, не входящую в формулу H.

Свободное переименование. Пусть x – свободная переменная в формуле H. Все свободные вхождения этой переменной в формуле H можно одновременно заменить на любую переменную y, не входящую в формулу H.

Посредством связанного переименования любую исходную предикатную формулу можно преобразовать к такой предикатной формуле, которая не содержит ни одной предметной переменной, являющейся одновременно и связанной, и свободной.

Пример 14. Формулу $\exists x (x > 1 \to \forall x (x > y \wedge \exists x (x \mid 10)))$ можно преобразовать к следующим формулам:

$$\exists x_1 (x_1 > 1 \to \forall x_1 (x_1 > y \wedge \exists x_2 (x_2 \mid 10))),$$
$$\exists x_1 (x_1 > 1 \to \forall x_2 (x_2 > y \wedge \exists x_2 (x_2 \mid 10))),$$
$$\exists x_1 (x_1 > 1 \to \forall x_2 (x_2 > y \wedge \exists x_3 (x_3 \mid 10))).$$

Ограниченные кванторы. Часто при оперировании с кванторами удобно бывает рассматривать только элементы некоторого заданного непустого множества M, т. е. использовать конструкции вида: «для всех $x \in M$...» и «существует $x \in M$...» (символически их можно записать так: «$\forall x \in M$...» и «$\exists x \in M$...»). Эти ограниченные кванторы следует интерпретировать только как сокращение при записи формул, содержащих обычные средства выражения:

$\forall x \in M\,(H(x))$ – сокращение для формулы $\forall x (x \in M \to H(x))$,

$\exists x \in M\,(H(x))$ – сокращение для формулы $\exists x (x \in M \wedge H(x))$.

4.1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

4.1.2.1. Множества, элементы. Под *множеством* понимают объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются *элементами* образуемого ими множества. Если a – элемент множества M, то это обозначают так: $a \in M$ (читают: «a принадлежит M» или «a – элемент M»). Для обозначения того, что a не является элементом множества M, применяют запись: $a \notin M$ (или $a \bar{\in} M$). Два множества A и B равны (обозначение: $A = B$), если они содержат одни и те же элементы, т. е.

$$A = B \leftrightarrow \forall x \qquad (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Множество можно описать, указав свойство, присущее только элементам этого множества. Множество всех объектов, обладающих свойством $H(x)$, обозначают через $\{x \mid H(x)\}$ или $\{x\colon H(x)\}$.

Если в качестве свойства в $H(x)$ выбрать какое-нибудь свойство, которым не обладает ни один объект, например свойство $x \neq x$, то ни для какого объекта a не может выполняться соотношение $a \in \{x \mid H(x)\}$, и, следовательно, $\forall a (a \notin \{x \mid H(x)\})$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым,* и его обозначают символом $\varnothing$.

4.1.2.2. Подмножества. Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то говорят, что A *содержится* (или *включается*)

в B или что B *содержит* (или *включает*) A, и обозначают это так: $A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$). Если $A \subseteq B$, то множество A называется *подмножеством* множества B; если к тому же $A \neq B$, то A называют *собственным подмножеством* множества B и применяют запись $A \subset B$. Отношения $\subseteq$ и $\subset$ между множествами называются соответственно *включением* и *собственным включением*. Довольно часто, когда нет необходимости различать эти два вида включений, применяют только обозначение $\subset$. Запись $A \nsubseteq B$ (соответственно $A \not\subset B$) означает, что множество A не является подмножеством (соответственно собственным подмножеством) множества B.

Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \subseteq A, \quad A \not\subset A,$$
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C, \qquad A \subseteq B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C.$$

Между включением и равенством множеств существует связь, отраженная в следующем соотношении:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Из этого выражения вытекает часто используемый метод доказательства равенства двух множеств: чтобы доказать равенство множеств A и B, достаточно обосновать оба включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

4.1.3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

4.1.3.1. Объединение и пересечение множеств. *Объединение* $A \bigcup B$ множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. *Пересечение* $A \bigcap B$ множеств A и B есть множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Множества A и B, имеющие пустое пересечение, т. е. $A \bigcap B = \varnothing$, называются *непересекающимися* (или *дизъюнктными*).

Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \bigcup A = A \bigcap A = A, \qquad A \bigcup B = B \bigcup A,$$
$$A \bigcap B = B \bigcap A, \qquad (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C),$$
$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C),$$
$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C),$$
$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C),$$
$$A \bigcup (A \bigcap B) = A, \qquad A \bigcap (A \bigcup B) = A,$$
$$A \bigcup \varnothing = A, \qquad A \bigcap \varnothing = \varnothing,$$
$$A \bigcap B \subseteq A \subseteq A \bigcup B, \qquad A \subseteq B \leftrightarrow A \bigcup B = B,$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow A \bigcap B = A, \qquad A \subseteq B \rightarrow A \bigcup C \subseteq B \bigcup C,$$
$$A \subseteq B \rightarrow A \bigcap C \subseteq B \bigcap C,$$
$$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \rightarrow A \bigcup B \subseteq C,$$
$$A \subseteq B \wedge A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \bigcap C.$$

4.1.3.2. Разность, симметрическая разность, дополнение множеств. *Разность* $A \backslash B$ множеств A и B (порядок множеств существен!) есть множество, состоящее из таких элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. *Симметрическая разность* $A \Delta B$ множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих в точности одному из множеств A и B, т. е. $A \Delta B = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$.

Если $A \subseteq E$, то *дополнение* $C_E A$ множества A относительно E определяется так:

$$C_E A = E \backslash A.$$

Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \backslash B \subseteq A, \qquad A \backslash A = \varnothing, \qquad A \backslash (A \backslash B) = A \bigcap B,$$
$$A \Delta B = B \Delta A, \qquad A \Delta B = (A \bigcup B) \backslash (A \bigcap B),$$
$$A \backslash (B \bigcup C) = (A \backslash B) \bigcap (A \backslash C),$$
$$A \backslash (B \bigcap C) = (A \backslash B) \bigcup (A \backslash C),$$
$$(A \bigcup B) \backslash C = (A \backslash C) \bigcup (B \backslash C),$$
$$(A \bigcap B) \backslash C = (A \backslash C) \bigcap (B \backslash C),$$
$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \bigcup (A \bigcap C), \qquad (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \bigcup C),$$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C),$$
$$A \bigcap (B \Delta C) = (A \bigcap B) \Delta (A \bigcap C),$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow A \backslash B = \varnothing, \qquad A \bigcap B = \varnothing \leftrightarrow A \backslash B = A.$$

Если A и B – подмножества множества E, то

$$A \bigcup C_E A = E, \qquad A \bigcap C_E A = \varnothing, \qquad C_E E = \varnothing,$$
$$C_E \varnothing = E, \qquad C_E C_E A = A,$$
$$C_E (A \bigcup B) = C_E A \bigcap C_E B,$$
$$C_E (A \bigcap B) = C_E A \bigcup C_E B, \qquad A \subseteq B \leftrightarrow C_E B \subseteq C_E A.$$

4.1.3.3. Диаграммы Эйлера – Венна. Для пояснения некоторых свойств операций над множествами и различных соотношений между множествами можно использовать диаграммы Эйлера – Венна, на которых множества, подлежащие рассмотрению, изображаются в виде совокупностей точек на плоскости (рис. 4.1 – 4.7). Рис. 4.1 иллюстрирует

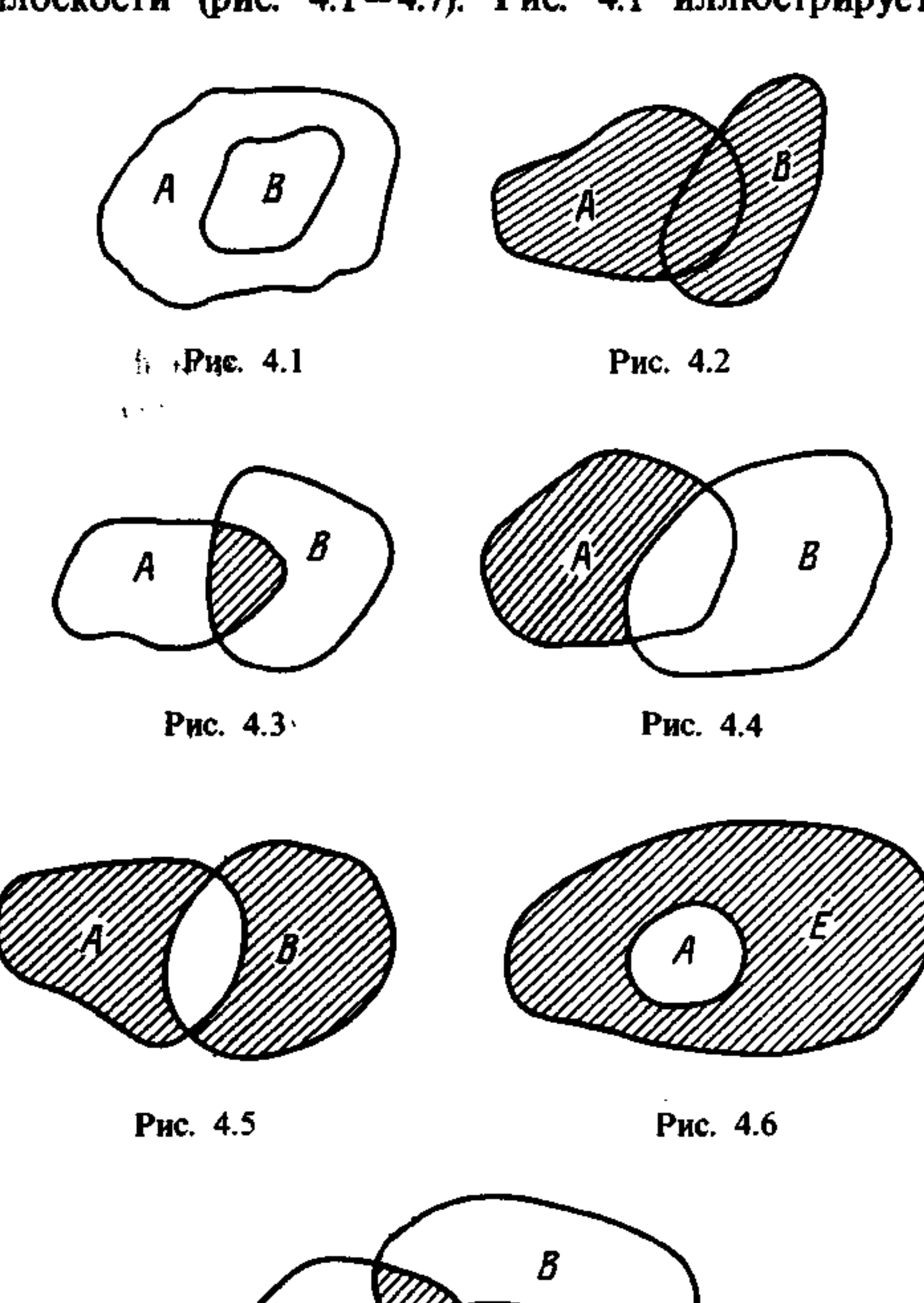


Рис. 4.1 Рис. 4.2

Рис. 4.3 Рис. 4.4

Рис. 4.5 Рис. 4.6

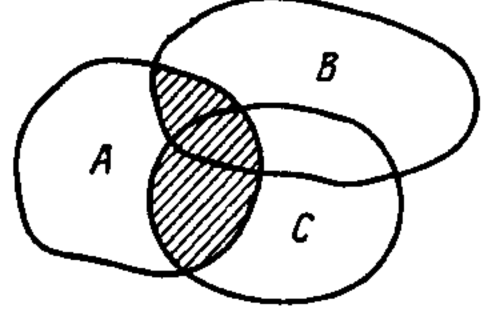


Рис. 4.7

соотношение $B \subseteq A$, на рис. 4.2–4.6 заштрихованные области изображают соответственно объединение $A \bigcup B$, пересечение $A \bigcap B$, разность $A \backslash B$, симметрическую разность $A \Delta B$ и дополнение $C_E A$. Заштрихованная на рис. 4.7 область соответствует множеству $A \bigcap (B \bigcup C)$. Этот рисунок может служить иллюстрацией к обоснованию равенства $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

4.1.3.4. Декартово произведение множеств. *Упорядоченной парой* (a, b) двух элементов a, b называется множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Для любых элементов a, b, c, d справедливо соотношение

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Если $a = b$, то (a, a) $\{\{a\}, \{a\}\}$. В случае, когда элементы a и b разные, $(a, b) \neq (b, a)$. Упорядоченный набор n элементов $(a_1, \ldots, a_n)$ определяется по индукции:

при $n = 2$ $(a_1, \ldots, a_n)$ есть (a_1, a_2);

при $n > 2$ $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ есть $((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Справедливо соотношение

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n.$$

Декартово произведение $A \times B$ двух множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, т. е.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Для множеств A, B, C, D выполняются следующие соотношения:

$$(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C),$$
$$(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C),$$
$$A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C),$$
$$A \times (B \bigcap C) = (A \times B) \bigcap (A \times C),$$
$$(A \times B) \bigcup (C \times D) \subseteq (A \bigcup C) \times (B \bigcup D),$$
$$(A \times B) \bigcap (C \times D) = (A \bigcap C) \times (B \bigcap D),$$
$$A \times B = \varnothing \leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing,$$
$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \to A \times B \subseteq C \times D.$$

Декартово произведение множеств некоммутативно.

Декартово произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$ n множеств (сокращенно записывается в виде $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$) есть множество

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Если $A_1 = \ldots = A_n = A$, то вместо $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ употребляют запись A^n и получающееся декартово произведение называют *n-й декартовой степенью множества* A.

4.1.3.5. Обобщенные объединение и пересечение. Пусть K – некоторое множество, которое назовем *множеством индексов*, и пусть для всякого $k \in K$ A_k есть подмножество множества A. Тогда множество $\{A_k \mid k \in K\}$ называется *семейством подмножеств* множества A. *Объединение* семейства подмножеств $\{A_k \mid k \in K\}$ есть множество $\{x \mid \exists k (k \in K \wedge x \in A_k)\}$; его обозначают так: $\bigcup\limits_{k \in K} A_k$ (или $\bigcup\limits_{K} A_k$). Пересечение семейства подмножеств вводят только для непустых семейств. Если $K \neq \varnothing$, то *пересечение* семейства подмножеств $\{A_k \mid k \in K\}$ есть множество $\{x \mid \forall k (k \in K \to x \in A_k)\}$; такое пересечение обозначается через $\bigcap\limits_{k \in K} A_k$ (или $\bigcap\limits_{K} A_k$). Если семейство подмножеств обозначают одной буквой, например M, то объединение (пересечение) всех подмножеств этого семейства записывают в виде $\bigcup M$ (соответственно $\bigcap M$).

Для семейств подмножеств M, N, которые при рассмотрении пересечения предполагаются непустыми, справедливы следующие соотношения:

$$\bigcup (M \bigcup N) = (\bigcup M) \bigcup (\bigcup N),$$
$$\bigcap (M \bigcup N) = (\bigcap M) \bigcap (\bigcap N),$$
$$M \subseteq N \to \bigcup M \subseteq (\bigcup N) \wedge (\bigcap N) \subseteq \bigcap M.$$

Выпишем еще несколько соотношений, используя первоначальные обозначения для объединения и пересечения семейств подмножеств. Пусть $\{A_k \mid k \in K\}$, $\{B_j \mid j \in J\}$ – семейства подмножеств и C – множество. Тогда справедливы равенства:

$$C \bigcap \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in K} (C \bigcap A_k),$$
$$C \bigcup \bigcap_{k \in K} A_k = \bigcap_{k \in K} (C \bigcup A_k),$$
$$\bigcup_{k \in K} A_k \bigcap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(k, j) \in K \times J} (A_k \bigcap B_j),$$
$$\bigcap_{k \in K} A_k \bigcup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(k, j) \in K \times J} (A_k \bigcup B_j);$$

эти равенства останутся верными, если всюду в них заменить знаки $\bigcap$ и $\bigcup$ на $\times$. Далее, справедливы соотношения:

$$C \backslash \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcap_{k \in K} (C \backslash A_k), \qquad C \backslash \bigcap_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in K} (C \backslash A_k),$$
$$\bigcup_{k \in K} A_k \backslash C = \bigcup_{k \in K} (A_k \backslash C), \qquad \bigcap_{k \in K} A_k \backslash C = \bigcap_{k \in K} (A_k \backslash C);$$

в частности, так как $A_k \subseteq A$ для всех $k \in K$, то

$$C_A (\bigcup_{k \in K} A_k) = \bigcap_{k \in K} (C_A A_k),$$
$$C_A (\bigcap_{k \in K} A_k) = \bigcup_{k \in K} (C_A A_k).$$

4.1.4. ОТНОШЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ

4.1.4.1. Отношения. *n-местным* (*n-мерным*) *отношением* R на непустом множестве A называется подмножество множества A^n, т. е. $R \subseteq A^n$. Если R есть n-местное отношение на A и $(a_1, \ldots, a_n) \in R$, то говорят, что отношение R *выполняется* для элементов $a_1, \ldots, a_n$, и пишут: $Ra_1 \ldots a_n$; если же $(a_1, \ldots, a_n) \notin R$, то говорят, что отношение R *не выполняется* для элементов $a_1, \ldots, a_n$. В случае двухместного (бинарного) отношения R вместо Ra_1a_2 употребляют запись a_1Ra_2.

Для каждого непустого множества A легко указать два тривиальных n-местных отношения:

а) *полное*, или *универсальное*, отношение $\vee$, которое выполняется для любых n элементов множества A;

б) *пустое*, или *нулевое*, отношение $\wedge$, которое не выполняется ни для каких n элементов множества A.

Очевидно, что $\vee = A^n$ и $\vee = \varnothing$.

Если R есть n-местное отношение на A и B – непустое подмножество множества A, то *ограниче-*

ние R на B (обозначается $R|B$) есть множество $R\bigcap B^n$ и, следовательно, является n-местным отношением на B.

Для отношений естественным образом можно ввести все те операции, которые были определены для множеств. Например, если R и S – n-местные отношения на A, то объединение $R\bigcup S$ и пересечение $R\bigcap S$ этих отношений также являются n-местными отношениями (иногда объединение отношений называют *суммой*, а пересечение – *абсолютным произведением*). Если R есть n-местное отношение на A, то его дополнение, рассматриваемое на множестве A^n, часто называют *отрицанием* отношения R и обозначают через $\bar{R}$.

Для бинарных отношений, играющих важную роль в математике, введен целый ряд специальных понятий. Остановимся на некоторых из них.

Произведением $R\cdot S$ (относительным произведением) двух бинарных отношений R и S, заданных на множестве A, называется множество $\{(x,y)|\exists z(z\in A)\wedge(x,z)\in R\wedge(z,y)\in S\}$.

Обратным (*инверсным*, *дуальным*) отношением к отношению R, заданному на множестве A, называется отношение R^{-1}, определяемое следующим образом:

$$R^{-1}=\{(x,y)\,|\,(y,x)\in R\}.$$

Если R, S и T – бинарные отношения на A, то выполняются следующие равенства:

$$(R\cdot S)\cdot T=R\cdot(S\cdot T),\quad (R\bigcup S)\cdot T=(R\cdot T)\bigcup(S\cdot T),$$
$$(R\bigcap S)\cdot T=(R\cdot T)\bigcap(S\cdot T),\quad (R\cdot S)^{-1}=S^{-1}\cdot R^{-1},$$
$$(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1},\quad (R\bigcap S)^{-1}=R^{-1}\bigcap S^{-1}.$$

Пусть R – бинарное отношение на A. Тогда множество $\{x\,|\,\exists y((x,y)\in R)\}$ называется *прообразом* отношения R, а множество $\{y\,|\,\exists x((x,y)\in R)\}$ – *образом* отношения R.

Ниже дается перечень важных свойств бинарных отношений (здесь всюду R – бинарное отношение на множестве A).

Свойство	Характеризующее условие
Рефлексивность	$\forall a(aRa)$
Антирефлексивность (или иррефлексивность)	$\forall a\neg(aRa)$
Транзитивность	$\forall a\forall b\forall c(aRb\wedge bRc\to aRc)$
Симметричность	$\forall a\forall b(aRb\to bRa)$
Антисимметричность	$\forall a\forall b(aRb\wedge bRa\to a=b)$
Асимметричность	$\forall a\forall b(aRb\to\neg bRa)$
Линейность	$\forall a\forall b(aRb\vee bRa)$
Связность	$\forall a\forall b(aRb\vee bRa\vee a=b)$
Равенство третьему	$\forall a\forall b\forall c(aRc\wedge bRc\to aRb)$
Трихотомия	$\forall a\forall b(aRb\vee bRa\vee a=b)\wedge\wedge\neg((aRb\wedge bRa)\vee(aRb\wedge\wedge a=b)\vee(bRa\wedge a=b))$

4.1.4.2. Отношение эквивалентности. Бинарное отношение называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если R – отношение эквивалентности, то вместо aRb пишут $a\sim_R b$ (читается: a эквивалентно b относительно R). Если на A задано отношение эквивалентности R, то элементы множества A можно разбить на попарно не пересекающиеся классы эквивалентных друг другу относительно R элементов. Эти классы называются *классами эквивалентности*, а произвольный элемент класса называется его *представителем*. Если a – какой-либо представитель некоторого класса эквивалентности, то этот класс обозначают $[a]_R$. Множество всех классов эквивалентности множества A относительно R называется *фактор-множеством* множества A относительно R и обозначается A/R.

Пересечение отношений эквивалентности, заданных на множестве A, также является отношением эквивалентности на A.

4.1.4.3. Отношение порядка. Бинарное отношение называется отношением нестрогого (строгого) *квазипорядка*, если оно рефлексивно (соответственно антирефлексивно) и транзитивно. Вместо термина *квазипорядок* часто используют другие термины: *предпорядок*, *квазиупорядоченность*, *предупорядочение*. Квазипорядок R на множестве A называется *направленным* (или *правонаправленным*), если для любых двух элементов a, $b\in A$ найдется элемент $c\in A$, удовлетворяющий условию $aRc\wedge bRc$; квазипорядок R на A называется *обратно направленным* (или *левонаправленным*), если для всяких двух элементов a, $b\in A$ существует элемент $c\in A$, для которого справедлива конъюнкция $cRa\wedge cRb$.

Каждый нестрогий квазипорядок R на множестве A индуцирует отношение эквивалентности S на A:

$$aSb\leftrightarrow aRb\wedge bRa$$

(здесь a, $b\in A$).

Нестрогий (строгий) квазипорядок называется *нестрогим* (соответственно *строгим*) *частичным порядком*, если он является антисимметричным (соответственно асимметричным) отношением. Вместо термина *частичный порядок* используют также термины *полуупорядоченность*, *частичная упорядоченность*, *частичное упорядочение* (а иногда просто *порядок*, *упорядочение*).

Если R – нестрогий квазипорядок на A и S – отношение эквивалентности на A, индуцированное этим квазипорядком, то бинарное отношение R^* на фактор-множестве A/S, определяемое соотношением

$$[a]_S R^*[b]_S\leftrightarrow aRb,$$

является нестрогим частичным порядком на A/S.

Если R – нестрогий (строгий) частичный порядок, то вместо aRb пишут $a\leqslant_R b$ или $a\leqslant b$ (соответственно $a<_R b$ или $a<b$) и говорят: «b больше (соответственно строго больше) a» или «a меньше (соответственно строго меньше) b». Если R – нестрогий частичный порядок на A, то соотношение

$$a<b\leftrightarrow a\leqslant_R b\wedge a\neq b \qquad (4.1)$$

(a, $b\in A$) задает на A строгий частичный порядок. С другой стороны, если R – строгий частичный порядок на A, то формула

$$a\leqslant b\leftrightarrow a<_R b\vee a=b \qquad (4.2)$$

(a, $b\in A$) определяет на A нестрогий частичный порядок.

Частичный порядок на конечном множестве иногда удобно бывает изображать в виде специаль-

ных диаграмм, которые называются *диаграммами Хассе.* Если R – частичный порядок на A, то построение диаграммы Хассе для отношения R осуществляется следующим образом: элементы множества A изображаются точками плоскости, и затем две произвольные различные точки a и b соединяются отрезком прямой или дугой, если aRb и $\neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b \wedge aRx \wedge xRb)$. Для того чтобы различать случаи aRb и bRa друг от друга, при выполнении соотношения aRb на отрезке прямой или дуге, соединяющей точки a и b, рисуют стрелку, направленную от a к b (или просто изображают точку b выше точки a или справа от нее).

Пример 15. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и $R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_5), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_5), (a_3, a_5)\}$. Тогда R – нестрогий частичный порядок на A. Диаграмма Хассе для R изображена на рис. 4.8 («бóльшие» элементы нарисованы справа от «меньших»).

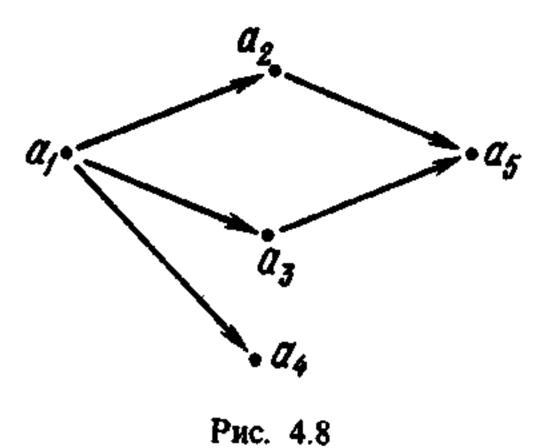


Рис. 4.8

Если на множестве A задан частичный порядок R, то оно называется *частично упорядоченным.* Элемент $a \in A$ называется *непосредственно предшествующим* элементу $b \in A$ (и элемент b называется *непосредственно следующим* за элементом a), если $aRb \wedge \neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b \wedge aRx \wedge xRb)$. Два элемента a и b множества A, частично упорядоченного отношением R, называются *сравнимыми,* если $aRb \vee bRa$; в противном случае они называются *несравнимыми.*

Пусть множество A частично упорядочено отношением R. Элемент $a \in A$ называется *минимальным* (*максимальным*) *элементом* множества A, если в A не существует элемента x, отличного от a и удовлетворяющего условию xRa (соответственно aRx).

Пусть B – подмножество множества A, частично упорядоченного отношением R. *Верхней гранью* или *мажорантой* (соответственно *нижней гранью* или *минорантой*) подмножества B в множестве A называется всякий элемент $x \in A$, удовлетворяющий условию $\forall y(y \in B \to (yRx \vee y = x))$ (соответственно $\forall y(y \in B \to (xRy \vee y = x))$). Если у множества B существует хотя бы одна мажоранта (миноранта) в A, то B называется *ограниченным сверху* (*снизу*) в A. Если само множество A обладает мажорантой (минорантой), то она единственна и называется *наибольшим* (*наименьшим*) *элементом* множества A. Наименьшая верхняя грань подмножества B, если она существует, называется *точной верхней гранью* подмножества B и обозначается $\sup B$ (читается: *супремум* B). Аналогично наибольшая нижняя грань подмножества B, если она существует, называется *точной нижней гранью* подмножества B и обозначается $\inf B$ (читается: *инфимум* B).

Элемент частично упорядоченного множества, не имеющий непосредственно предшествующих элементов, называется *предельным.*

Множество A, частично упорядоченное отношением R, называется *линейно* (*совершенно, просто*) *упорядоченным* (или *цепью*), если в нем сравнимы два любых различных элемента. Отношение R называется тогда *линейным* (*совершенным*) *порядком.*

Линейно упорядоченное множество A называется *вполне упорядоченным,* если каждое непустое его подмножество имеет минимальный элемент. Упорядочение множества A называется при этом *полным.*

Частичный порядок R на множестве A называется *индуктивным* или *правоиндуктивным* (соответственно *левоиндуктивным*), если относительно R всякая цепь множества A обладает точной верхней (соответственно нижней) гранью.

Пример 16. 1) Всякое отношение эквивалентности является нестрогим квазипорядком. 2) Пусть M – семейство подмножеств (некоторого множества) и $R_{\subseteq}$ – отношение *включения* на M, т. е.

$$R_{\subseteq} = \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in M \wedge A_2 \in M \wedge A_1 \subseteq A_2\}.$$

Отношение $R_{\subseteq}$ является нестрогим частичным порядком. 3) Собственное включение $R_{\subset}$ на семействе подмножеств M есть строгий частичный порядок. 4) Обычное отношение $\leqslant$ является линейным (нестрогим) порядком в множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел и полным упорядочением в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Слабый принцип максимальности Цорна. Если R – индуктивное упорядочение на множестве A, то в A существует максимальный относительно R элемент.

Сильный принцип максимальности Цорна. Если R – частичный порядок на множестве A и любая вполне упорядоченная (относительно R) цепь в A имеет верхнюю грань, то в A существует максимальный (относительно R) элемент.

Оба эти принципа эквивалентны друг другу, а также следующим двум принципам.

Принципы максимальных цепей (Хаусдорф – Биркгоф).

1) В каждом частично упорядоченном множестве существует цепь, максимальная относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$.

2) Всякая цепь частично упорядоченного множества содержится в некоторой максимальной (относительно включения $\subseteq$) цепи этого множества.

4.1.4.4. Отображения. *Отображением* множества A во множество B (*функцией* на A со значениями в B) называется правило, по которому каждому элементу множества A сопоставляется один или несколько элементов множества B. Для обозначения отображения φ множества A в множество B используют запись $\varphi\colon A \to B$. Если $x \in A$, то множество всех элементов из B, сопоставляемых при отображении φ элементу x, обозначается через $\varphi(x)$ и называется *образом элемента* x. *Образом подмножества* A_1 множества A при отображении φ (обозначение: $\varphi(A_1)$) называется объединение образов всех элементов x из A_1. Образ всего множества A, т. е. $\varphi(A)$, называется *областью значений* отображения φ. Если $y \in B$, то его *полным прообразом* при отображении φ (обозначение: $\varphi^{-1}(y)$) называется множество всех элементов из A, которым при отображении φ сопоставляется элемент y. Всякий элемент из $\varphi^{-1}(y)$ называется *прообразом* элемента y при отображении φ. Если при отображении $\varphi\colon A \to B$ каждому элементу из A сопоставляется в точности один элемент из B, то отображение (функция) φ называется *однозначным.* Отображение, не являющееся однозначным, называется *многозначным.* Если $\varphi\colon A \to B$ – однозначное отображение, то отображение $\varphi^{-1}\colon B \to A$,

сопоставляющее каждому элементу $y \in B$ его прообраз $\varphi^{-1}(y)$, называется *обратным* (для отображения φ). Отображение φ^{-1} является, вообще говоря, *частичным*, т. е. не для всякого элемента из B его образ при φ^{-1} есть непустое множество. Кроме того, отображение φ^{-1} может быть и многозначным.

Отображение φ: $A \to B$ можно толковать как *отношение между множествами* A и B, т. е. отождествлять его с некоторым подмножеством M декартова произведения $A \times B$, называемым *графиком* отображения φ и определяемым следующим образом:

$$M = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge \varphi(x) = y\}.$$

Однозначное отображение φ: $A \to B$ называется:

сюръективным (*сюръекцией*), если $\varphi(A) = B$ (отображение «на»);

инъективным (*инъекцией*), если образы различных элементов различны (отображение «в»).

биективным (*биекцией*, *взаимно однозначным*), если оно сюръективно и инъективно.

Пусть φ_1: $A \to B$ и φ_2: $B \to C$ – два однозначных отображения. Тогда (однозначное) отображение φ: $A \to C$, сопоставляющее произвольному элементу $x \in A$ элемент $\varphi_2(\varphi_1(x)) \in C$, называется *суперпозицией* (*произведением*, *композицией*) отображений φ_1 и φ_2 и обозначается $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

Через id_A обозначается *тождественное* отображение множества A на него же, т. е. такое (однозначное) отображение, которое каждому элементу из A сопоставляет этот же элемент.

Однозначное отображение φ: $A \to B$ является биекцией тогда и только тогда, когда существует (однозначное) отображение ψ: $B \to A$, удовлетворяющее условиям $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ и $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$.

Однозначное отображение φ: $A \to B$ является инъекцией тогда и только тогда, когда существует (однозначное) отображение ψ: $\varphi(A) \to A$, удовлетворяющее условию $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$.

Однозначное отображение φ: $A \to B$ является сюръекцией тогда и только тогда, когда существует (однозначное) отображение ψ: $B \to A$, удовлетворяющее условию $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$.

4.1.4.5. Последовательности и семейства множеств. Конечные и бесконечные последовательности можно толковать как функции (отображения): конечная последовательность, состоящая из m элементов, – последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – есть функция φ: $\{1, 2, \ldots, m\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ такая, что $\varphi(i) = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$; бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ есть функция φ: $\mathrm{N} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots\}$ такая, что $\varphi(i) = a_i$ при всяком $i \in \mathrm{N}$ (здесь N – множество натуральных чисел).

Семейство множеств можно ввести с помощью понятия функции. Пусть J – множество индексов. Тогда функция φ: $J \to M$, значениями которой являются множества, есть семейство множеств. Если φ – семейство множеств и для каждого $j \in J$ имеем $\varphi(j) = A_j$, то это семейство множеств обозначают часто так: $(A_j)_{j \in J}$.

Пусть $(A_j)_{j \in J}$ – семейство множеств. Функция φ: $J \to \bigcup_J A_j$ такая, что $\forall j$ $(j \in J \to \varphi(j) \in A_j)$, называется *функцией выбора* для семейства $(A_j)_{j \in J}$.

Множество всех функций выбора для семейства множеств $(A_j)_{j \in J}$ есть *декартово произведение* семейства $(A_j)_{j \in J}$:

$$\mathop{\times}_{j \in J} A_j = \{\varphi \mid \varphi \text{ – функция выбора для } (A_j)_{j \in J}\}.$$

Ясно, что если $A_j = \varnothing$ при некотором $j \in J$, то $\mathop{\times}_{j \in J} A_j = \varnothing$. Обращением этого высказывания является следующий

Принцип выбора. Для каждого непустого семейства непустых множеств существует функция выбора.

Этот принцип эквивалентен принципу максимальности Цорна.

4.1.4.6. Операции и алгебры. *n-местная* (*n-арная*) *операция* ω на множестве M (при $n \geqslant 1$) есть однозначная функция из M^n в M; при этом, вообще говоря, не предполагается, что функция ω определена для всякого элемента множества M^n. Если операция ω не всюду определена на M^n, то она называется *n-местной частичной операцией*. Под *нуль-местной* операцией на M понимают выделение элемента из M. Если $a_1, \ldots, a_n$ – элементы из M, то результат применения операции ω к этим элементам, т. е. $\omega(a_1, \ldots, a_n)$, часто записывают в следующем виде: $\omega a_1 \ldots a_n$; при $n = 2$ применяют также запись $a_1 \omega a_2$.

Пример 17. 1) Сложение действительных чисел есть двухместная операция в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. 2) Деление действительных чисел – двухместная частичная операция в $\mathbb{R}$. 3) Выделение какого-либо элемента из $\mathbb{R}$ (например, 1) есть нуль-местная операция в $\mathbb{R}$.

Универсальной алгеброй (или, короче, *алгеброй*) называется пара $\langle M; \Omega \rangle$, где M – некоторое непустое множество элементов и Ω – некоторое непустое множество операций, определенных на множестве M. Множество M называется *носителем* или *основным множеством* алгебры. Если некоторые из операций, входящих в множество Ω, являются частичными, то алгебра называется *частичной*. Очень часто вместо «алгебра $\langle M; \Omega \rangle$» говорят просто «алгебра M».

Полугруппой называется алгебра $\langle M; \top \rangle$ с одной бинарной операцией $\top$, удовлетворяющей *ассоциативному закону*: каковы бы ни были элементы a, b, c из M,

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c).$$

Операция $\top$, удовлетворяющая ассоциативному закону, называется *ассоциативной*. *Группой* называется полугруппа, удовлетворяющая следующим условиям:

а) в M есть такой элемент e (*левая единица*), что для каждого элемента $a \in M$ выполняется равенство $e \top a = a$;

б) для каждого элемента $a \in M$ существует такой элемент b (называемый *левым обратным* для a), что $b \top a = e$.

Группа $\langle M; \top \rangle$ называется *абелевой*, если операция $\top$ *коммутативна*, т. е. для любых a и b из M выполняется равенство $a \top b = b \top a$.

Кольцом называется алгебра $\langle M; \top, \perp \rangle$ с двумя бинарными операциями $\top$ и $\perp$, удовлетворяющими следующим условиям:

а) относительно операции $\top$ множество M образует абелеву группу;

б) справедливы *дистрибутивные законы*:

$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

$$(b \top c) \perp a = (b \perp a) \top (c \perp a)$$

для любых элементов a, b, c из M.

Операцию $\top$ часто называют *сложением*, а $\perp$ – *умножением*. *Нулевым* элементом (*нулем*) кольца называется такой элемент a, что $a \top b = b$ и $b \top a = b$ для всякого $b \in M$. Нулевой элемент в кольце единствен.

Кольцо называется *ассоциативным*, если операция $\perp$ ассоциативна. Если операция $\perp$ коммутативна, то кольцо называется *коммутативным*.

Если в кольце все отличные от нуля элементы образуют группу относительно операции $\perp$, то кольцо называется *телом*. Если операция $\perp$ к тому же коммутативна, то тело называется *полем*.

4.1.5. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

4.1.5.1. Равномощность. Два множества A и B называются *равномощными* (обозначение: $A \sim B$), если существует биекция φ: $A \to B$. *Отношение равномощности*, рассматриваемое на любой заданной совокупности множеств, рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Множество A называется *конечным*, если существует такое натуральное число n, что $A \sim \{k \mid k \in \mathbf{N} \vee k \leqslant n\}$, где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел; при этом говорят, что множество A имеет n элементов.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Каждое непустое подмножество конечного множества конечно. Множество всех подмножеств конечного множества конечно.

Каждое множество, содержащее бесконечное подмножество, бесконечно. Множество всех подмножеств бесконечного множества бесконечно.

Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел бесконечно; следовательно, бесконечны множества $\mathbf{Z}$ (множество целых чисел), $\mathbf{Q}$ (множество рациональных чисел), $\mathbf{R}$ (множество действительных чисел), $\mathbf{C}$ (множество комплексных чисел).

Каждое бесконечное множество имеет собственное подмножество, которому оно равномощно, и наоборот, если множество равномощно своему собственному подмножеству, то оно бесконечно.

Никакое множество не является равномощным множеству всех своих подмножеств.

4.1.5.2. Счетные и несчетные множества. Множество A называется *не более чем счетным*, если оно конечно или равномощно множеству $\mathbf{N}$. Множество A называется *счетным*, если $A \sim \mathbf{N}$. Иногда счетные множества называют *счетно бесконечными*.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называют *несчетным*.

Каждое несчетное множество бесконечно; каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Каждое бесконечное подмножество счетного множества счетно. Объединение и непустое пересечение счетной совокупности счетных множеств – счетные множества.

Множества $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$ – счетные.
Множества $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ – несчетные.

4.2. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.2.1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

4.2.1.1. Основные понятия. Величины, значения которых могут быть выражены действительными числами, называются *скалярами* (например, масса, заряд, температура, работа и т. п.). Величины же, значения которых определяются как числовым значением, так и направлением в пространстве, называются *векторами* (например, скорость, ускорение, сила, напряженность электрического и магнитного полей и т. д.).

Геометрический вектор – это направленный отрезок в пространстве (обозначается: $\overrightarrow{P_1P_2}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... ; $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... ; здесь P_1 – начальная точка, P_2 – конечная точка, рис. 4.9). *Длина* вектора $\mathbf{a}$ называется его *модулем* и обозначается $|\mathbf{a}|$. *Единичные векторы* – это векторы, длина которых равна единице. Единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\mathbf{a}$, обозначают $\mathbf{a}_0$. *Нулевой вектор* $\mathbf{0}$ – это вектор, начало и конец которого совпадают; его модуль равен нулю, направление неопределенное. Два вектора считаются *равными*, если равны их модули и совпадают их направления (см. рис. 4.9). Векторы, которые получаются из данного вектора $\mathbf{a}$ путем параллельного переноса (все такие векторы *равны* $\mathbf{a}$), называют *свободными векторами*, порождаемыми вектором $\mathbf{a}$. Векторы, которые получаются из $\mathbf{a}$ путем параллельного переноса вдоль $\mathbf{a}$ (и лежат на одной прямой), называются *скользящими векторами*, порождаемыми вектором $\mathbf{a}$ (рис. 4.10). Если вектор нельзя переносить по физическим причинам (постоянная точка приложения), то говорят о *связанном векторе*.

4.2.1.2. Умножение на скаляр и сложение. Если α – действительное число и $\mathbf{a}$ – вектор, то произведение $\alpha \cdot \mathbf{a}$ также есть вектор с длиной $|\alpha||\mathbf{a}|$ и направлением, совпадающим с направлением вектора $\mathbf{a}$ при $\alpha > 0$, и с направлением, противоположным направлению вектора $\mathbf{a}$ при $\alpha < 0$. В частности, $-\mathbf{a}$ имеет длину, равную $\mathbf{a}$, но противоположное направление (рис. 4.11). Векторы $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}$

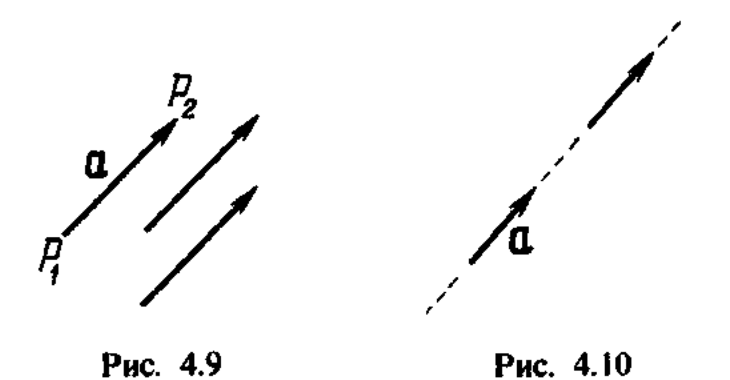


Рис. 4.9 Рис. 4.10

Рис. 4.11

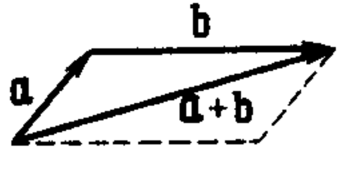


Рис. 4.12

коллинеарны, причем $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$. При $\alpha = 0$ считается, что $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ определяется следующим образом: $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ складываются при помощи параллельного переноса, как показано на рис. 4.12; вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ есть вектор, который имеет начало, совпадающее с началом $\mathbf{a}$, и конец, совпадающий с концом $\mathbf{b}$ (*правило треугольника*). Вообще сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots + \mathbf{e}$ нескольких векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{e}$ определяется как вектор $\mathbf{f}$, который замыкает ломаную, составленную из $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{e}$ (рис. 4.13).

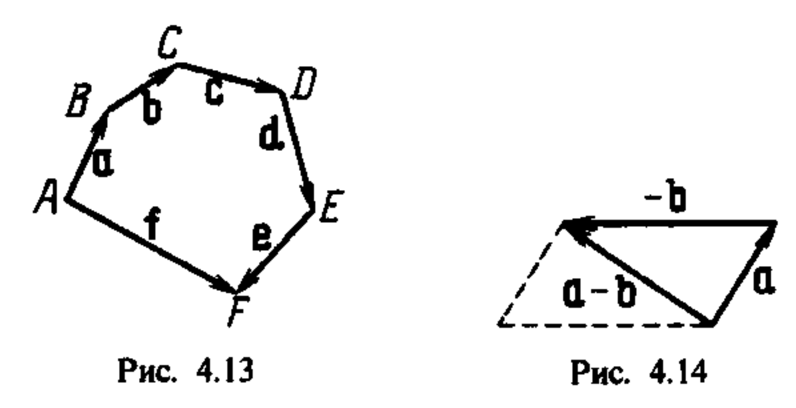


Рис. 4.13 Рис. 4.14

Разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ рассматривается как сумма векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$ (рис. 4.14).

Правила действий с векторами.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},\ \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a},\ (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a},$$

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b},\ |\alpha\mathbf{a}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|,$$

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leqslant |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Под *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{d}$ с действительными коэффициентами α, β, ..., δ понимают вектор, имеющий вид

$$\mathbf{e} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \ldots + \delta\mathbf{d}. \qquad (4.3)$$

Два вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными*, если имеются такие действительные числа α, β, что $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$, причем α, β не равны одновременно нулю (геометрический смысл: прямые, проходящие в направлениях $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, параллельны). Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называются *компланарными*, если существуют такие действительные числа α, β, γ, что $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ и α, β, γ не являются одновременно нулями (геометрический смысл: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ параллельны одной плоскости). Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ не коллинеарны или $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны, то их называют *линейно независимыми* на плоскости или в пространстве. Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *ортогональны* (обозначение: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), если они взаимно перпендикулярны. Такие векторы всегда линейно независимы. Три попарно ортогональных ненулевых вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ также образуют тройку линейно независимых векторов.

Координаты вектора. Если заданы три линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то каждый вектор $\mathbf{a}$ можно однозначно представить в виде (рис. 4.15)

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3. \qquad (4.4)$$

Величины a^i *) называются *аффинными* (или *контравариантными*) *координатами* $\mathbf{a}$ относительно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Это кратко записывается так: $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$. Равные векторы, т. е. векторы, совпадающие при параллельном переносе, обладают одинаковыми аффинными координатами. Если $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)$, то справедливы следующие соотношения:

$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha a^1, \alpha a^2, \alpha a^3),$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3).$$

Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на рис. 4.15 образуют *правую систему координат*, потому что они имеют такую же ориентацию, как соответственно большой,

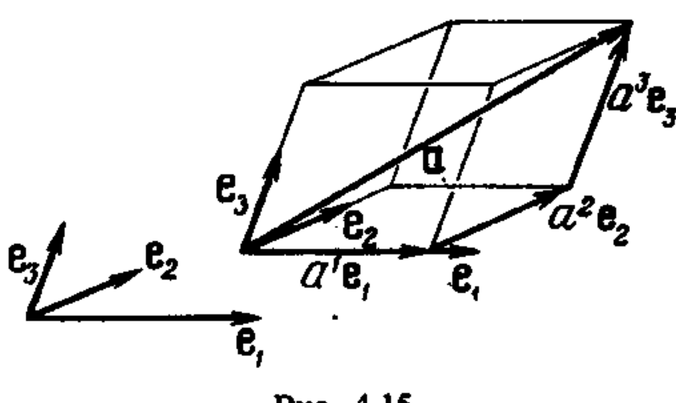


Рис. 4.15

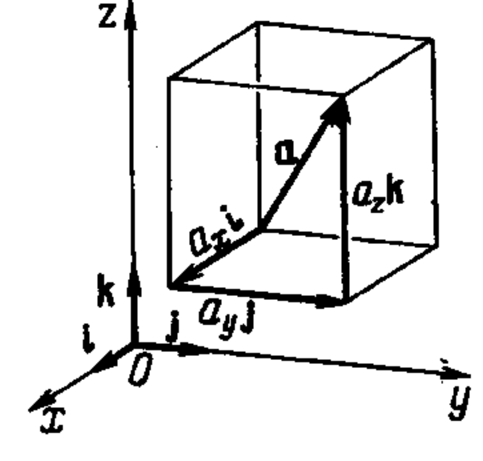
указательный и средний пальцы правой руки; в противном случае говорят о *левой системе координат*.

Если, в частности, в качестве $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ выбирают правую систему из трех единичных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, попарно перпендикулярных друг другу (рис. 4.16), то

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}; \qquad (4.5)$$

a_x, a_y, a_z называются *прямоугольными декартовыми координатами вектора* $\mathbf{a}$.

Если заданы два линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, лежащие в одной плоскости, то каждый вектор $\mathbf{a}$, лежащий в этой плоскости, можно



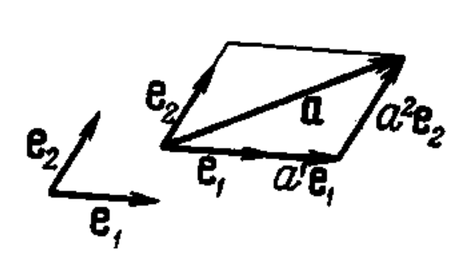


Рис. 4.16 Рис. 4.17

однозначно представить в виде $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$ (рис. 4.17).

Координаты точки. Поясним теперь связь между координатами вектора и координатами точки. Если перенести, как на рис. 4.18, в постоянную точку O (*начало координат*) три единичных вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, попарно перпендикулярных друг другу, то получится *прямоугольная декартова система координат*. Каждой точке M однозначно соответствует вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$, который называется *радиус-вектором* точки M. Декартовы координаты вектора $\overline{OM}$, отнесенные к $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, называются *декартовыми координатами точки* M. Определенные таким образом координаты соответствуют декартовым координатам, введенным в 2.6.5.

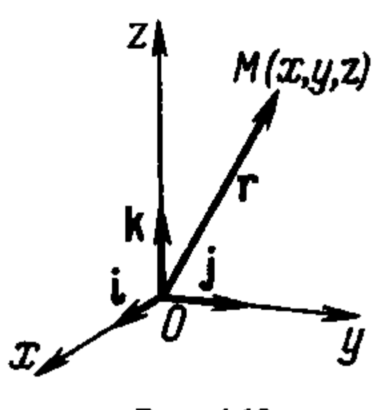


Рис. 4.18

*) Поставленные вверху индексы не надо путать с показателем степени.

Выбирая вместо **i**, **j**, **k** три любых линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, получим *косоугольную систему координат*. Аффинные координаты вектора OM называются *координатами точки* M.

4.2.1.3. Умножение векторов. *Скалярное произведение* векторов **a**, **b**, обозначаемое **ab**, (**a**, **b**), (**a**, **b**), $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ или $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ есть число $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами **a** и **b**.

Под *векторным произведением* векторов **a**, **b**, обозначаемым $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{ab}]$ или $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, понимают вектор **c**, имеющий длину $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$ (площадь параллелограмма, построенного на **a** и **b** как на сторонах) и направленный перпендикулярно к **a** и **b**, причем так, что векторы **a**, **b**, $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ образуют правую тройку векторов (рис. 4.19).

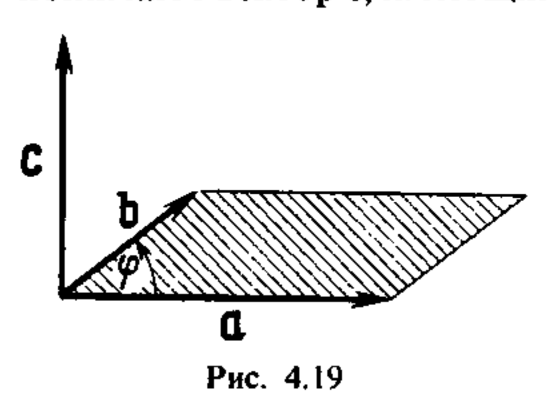


Рис. 4.19

Свойства произведений.

1) $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (*коммутативность*), но $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ (*антикоммутативность*);

2) $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab})$ и $(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (*ассоциативность*) при умножении на действительное число;

3) $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$ и $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (*дистрибутивность*);

4) $\mathbf{ab} = 0$, если **a** и **b** взаимно перпендикулярны; $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, если **a** и **b** коллинеарны;

5) $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$; (4.6)

6) в общем случае $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\mathbf{c}$;

7) линейные комбинации векторов можно перемножать, как скалярные многочлены, однако для векторного произведения важна последовательность сомножителей.

Пример 1. $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(2\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 6\mathbf{a}^2 - 4\mathbf{ba} + 3\mathbf{ab} - 2\mathbf{b}^2 = 6\mathbf{a}^2 - \mathbf{ab} - 2\mathbf{b}^2$, но $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 6(\mathbf{a}\times\mathbf{a}) - 4(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) + 3(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) - 2(\mathbf{b}\times\mathbf{b}) = 4(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + 3(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 7(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Двойное векторное произведение $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ — вектор, компланарный векторам **b** и **c**, вычисляемый по формуле

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}). \quad (4.7)$$

В общем случае $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

Смешанное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ есть скаляр, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c** как на ребрах. Смешанное произведение положительно, если **a**, **b**, **c** образуют правую систему; в противном случае оно отрицательно. Вместо $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ пишут также $(\mathbf{abc})$ или **abc**. Перестановка двух сомножителей в смешанном произведении **abc** меняет знак: $\mathbf{abc} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba}$; циклическая перестановка не меняет знака: $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$. Три вектора тогда и только тогда линейно независимы, когда $\mathbf{abc} \neq 0$. Кроме того, имеют место формулы

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{ad})$$
(*тождество Лагранжа*), (4.8)

$$(\mathbf{abc})(\mathbf{efg}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ae} & \mathbf{af} & \mathbf{ag} \\ \mathbf{be} & \mathbf{bf} & \mathbf{bg} \\ \mathbf{ce} & \mathbf{cf} & \mathbf{cg} \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Выражение произведений в прямоугольных декартовых координатах. Если векторы **a**, **b**, **c** заданы в прямоугольных декартовых координатах:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k},$$

то произведения вычисляются следующим образом.

Скалярное произведение:

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \quad (4.10)$$

Векторное произведение:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Выражение произведений в аффинных координатах. Если известны аффинные координаты двух векторов **a**, **b** относительно линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, т. е.

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3,$$

то для *скалярного произведения*

$$\mathbf{ab} = a^1b^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a^2b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a^3b^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + (a^1b^2 + a^2b^1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (a^2b^3 + a^3b^2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + (a^3b^1 + a^1b^3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1,$$

для *векторного произведения*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2.$$

Следует заметить, что $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Чтобы упростить эти формулы, вводят так называемые *метрические коэффициенты*

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad g_{ij} = g_{ij},$$

и *взаимные векторы* $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ по отношению к векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}^1 = V^{-1}(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}^2 = V^{-1}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1),$$
$$\mathbf{e}^3 = V^{-1}(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2),$$

где $V = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Если **a**, **b** разложить по взаимным векторам, то получим

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}^1 + b_2\mathbf{e}^2 + b_3\mathbf{e}^3.$$

Коэффициенты разложения a_i, b_i называются *ковариантными координатами* векторов **a**, **b** в противоположность *контравариантным координатам* a^i, b^i. Оба типа координат можно вычислить следующим образом:

контравариантные координаты

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \quad a^1 = \mathbf{ae}^1,\ a^2 = \mathbf{ae}^2,\ a^3 = \mathbf{ae}^3;$$

ковариантные координаты

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3, \quad a_1 = \mathbf{ae}_1,\ a_2 = \mathbf{ae}_2,\ a_3 = \mathbf{ae}_3.$$

Таким образом, получаем:

для *скалярного произведения*

$$\mathbf{ab} = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3 = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}a^ib^j; \quad (4.11)$$

для *векторного произведения*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^{-1}\left[(a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}^3\right] = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^{-1}\begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix};$$

для *смешанного произведения*

$$(\mathbf{abc}) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

В случае прямоугольных декартовых координат, т. е. когда $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$, имеем $\mathbf{e}^1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{k}$ (взаимная система векторов и исходная совпадают). Следовательно, ковариантные координаты идентичны контравариантным, т. е. $a^1 = a_1$, $a^2 = a_2$, $a^3 = a_3$, и метрические коэффициенты имеют простой вид $g_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – так называемый *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ для } i = j, \\ 0 \text{ для } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.12)$$

Формула (4.11) переходит тогда в (4.10). Для трех единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (правой системы), попарно перпендикулярных, верны следующие таблицы произведений (например, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$):

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	1	0	0
$\mathbf{e}_2$	0	1	0
$\mathbf{e}_3$	0	0	1

Скалярное произведение

×	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	**0**	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	**0**	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	**0**

Векторное произведение

4.2.1.4. Геометрические приложения векторной алгебры. Векторная алгебра позволяет по-новому представить формулы аналитической геометрии (см. табл.)

Пусть 0 – начало координат и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M (см. рис. 4.18).

В *декартовых координатах*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Ниже приводятся формулы в векторной записи и в записи в декартовых координатах.

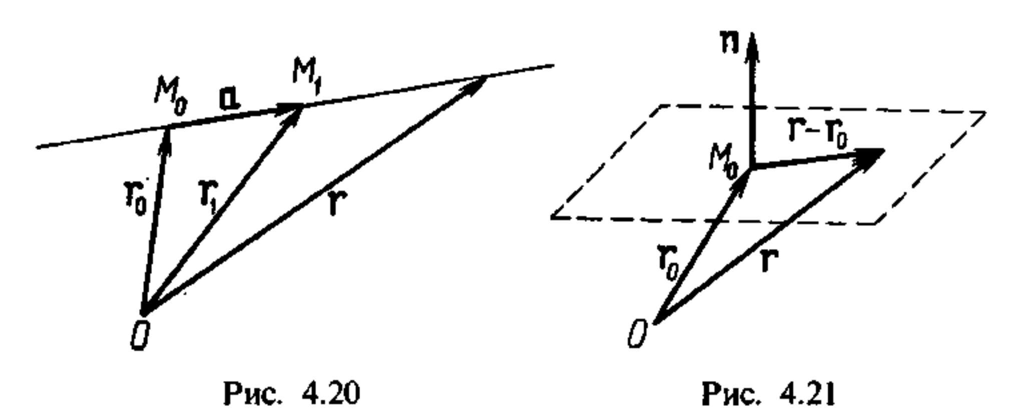


Рис. 4.20 Рис. 4.21

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно $\mathbf{a}$ (рис. 4.20):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$x = x_0 + ta_x, \quad y = y_0 + ta_y, \quad z = z_0 + ta_z.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 4.20):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0),$$

$$y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0).$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$ (рис. 4.21):

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0,$$

$$(x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y + (z - z_0)n_z = 0. \quad (4.13)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + t_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0), \quad -\infty < t_1, t_2 < +\infty,$$

$$x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0),$$

$$y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_2 - y_0),$$

$$z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_2 - z_0).$$

Если использовать (4.13), то надо положить $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$.

Название	Векторная формула	Координатная формула в прямоугольных декартовых координатах
Длина вектора **a**	$\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a}^2}$	$\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** как на сторонах	$S = \lvert\mathbf{a} \times \mathbf{b}\rvert$	$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$
Объем параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c** как на ребрах (с учетом знака)	$V = \mathbf{abc}$	$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Угол между векторами **a** и **b**	$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{\lvert\mathbf{a}\rvert \cdot \lvert\mathbf{b}\rvert}$	$\cos\varphi = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Расстояние между точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Если рассматривать только точки M плоскости x, y, то радиус-вектор имеет вид $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и получаются следующие уравнения плоской геометрии.

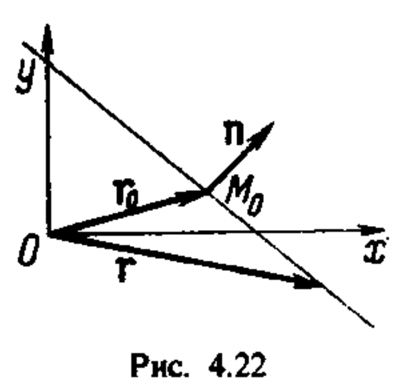


Рис. 4.22

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j}$ (рис. 4.22):

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\mathbf{n} = 0,$$

$$(x - x_0)\,n_x + (y - y_0)\,n_y = 0.$$

Расстояние между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

4.2.2. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Векторный анализ используется при исследовании векторных функций методами дифференциального и интегрального исчисления. Он находит широкое применение в дифференциальной геометрии и физике.

4.2.2.1. Векторные функции скалярного аргумента. Если каждому значению скалярного аргумента t поставить в соответствие вектор $\mathbf{r}(t)$, то $\mathbf{r}(t)$ называется *векторной функцией* (*вектор-функцией*) скалярного аргумента t. Если начало вектора $\mathbf{r}(t)$ (радиус-вектора) поместить в постоянную точку O, то конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ опишет пространственную кривую, которую называют *годографом* векторной функции (рис. 4.23).

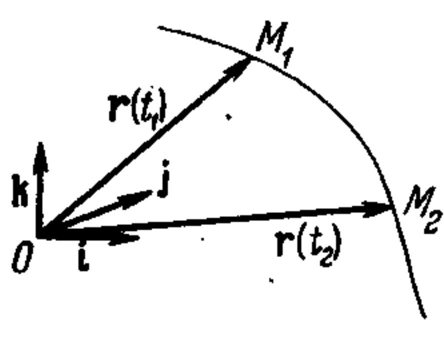


Рис. 4.23

Если t означает время, то $\mathbf{r}(t)$ описывает *траекторию* движения материальной точки. Если $\mathbf{r}(t)$ разложить по базисным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ прямоугольной декартовой системы координат, то

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k},$$

причем компоненты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются функциями от t. Параметрическое представление пространственной кривой (годографа) или траектории движения имеет вид

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Предел и непрерывность. Если $\mathbf{a}^{(n)} = a_1^{(n)}\mathbf{e}_1 + a_2^{(n)}\mathbf{e}_2 + a_3^{(n)}\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ — базис) — последовательность векторов, то вектор $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ называется предельным вектором этой последовательности (обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}$), если $a_i = \lim\limits_{n\to\infty} a_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Вектор $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ называется *пределом векторной функции* $\mathbf{r}(t) = r_1(t)\,\mathbf{e}_1 + r_2(t)\,\mathbf{e}_2 + r_3(t)\,\mathbf{e}_3$ при $t \to t_0$ (обозначается $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$) если $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0$. Это равнозначно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0} r_i(t) = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$. В частности, $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$, что эквивалентно непрерывности компонент $r_i(t)$ в точке t_0.

Дифференцирование векторной функции. Если существует предел

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t},$$

то $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ называется *производной* от $\mathbf{r}(t)$ в точке t (рис. 4.24). В другой записи: $\mathbf{r}'(t)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t)$. В декартовой системе координат:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

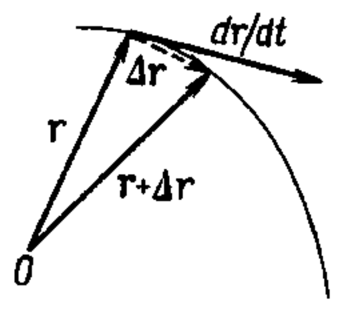


Рис. 4.24

Вектор $\mathbf{r}'(t)$ имеет направление касательной к годографу в точке t и направлен в сторону, отвечающую возрастанию параметра t. Длина $\mathbf{r}'(t)$ зависит от выбора параметра t. Если t есть длина дуги, то $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$.

Если t означает время, а $\mathbf{r}(t)$ — траекторию движения материальной точки, то $\mathbf{r}'(t)$ — *вектор скорости*, $|\mathbf{r}'(t)|$ — величина скорости.

Правила дифференцирования.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{r}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{r} + \varphi\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\varphi(t) \text{ — скалярная функция от } t),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \quad \text{(множители нельзя менять местами)},$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(\varphi(t)) = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Если $\mathbf{r}(t)$ — единичный вектор, то годограф лежит на единичной сфере и касательная всегда перпендикулярна радиус-вектору, т. е. $\mathbf{r}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$.

Производные высших порядков. Рассматривая $\mathbf{r}'(t)$ при переменном t как векторную функцию, производную от $\mathbf{r}'(t)$ обозначают через $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, или $\mathbf{r}''(t)$, или $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. В декартовых координатах:

$$\mathbf{r}''(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + y''(t)\,\mathbf{j} + z''(t)\,\mathbf{k}.$$

Если $\mathbf{r}(t)$ описывает движение материальной точки, то $\mathbf{r}''(t)$ — *вектор ускорения*, $|\mathbf{r}''(t)|$ — величина ускорения. Аналогично определяются третья, четвертая, n-я производные.

Разложение по формуле Тейлора имеет вид

$$\mathbf{r}(t + h) = \mathbf{r}(t) + \frac{h}{1!}\mathbf{r}'(t) + \frac{h^2}{2!}\mathbf{r}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t) + R_{n+1}.$$

Это не что иное, как векторная сумма разложений по формуле Тейлора для функций $x(t+h)$, $y(t+h)$, $z(t+h)$

Остаточный член имеет вид

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[x^{(n+1)}(t+\theta_1 h)\mathbf{i} + y^{(n+1)}(t+\theta_2 h)\mathbf{j} + z^{(n+1)}(t+\theta_3 h)\mathbf{k}],$$

причем $0 < \theta_i < 1$.

Дифференциал функции $\mathbf{r}(t)$ определяется формулой

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt.$$

Векторные функции скалярного аргумента находят приложение в теории кривых и в механике точки.

4.2.2.2. Поля (скалярные и векторные). Если каждой точке пространства M ставится в соответствие скалярная величина U, то возникает *скалярное поле* $U(M)$ (например, поле температуры, плотности в неоднородной среде, электрического направления, потенциал силового поля). Если M имеет декартовы координаты (x, y, z), то пишут также $U = U(x, y, z)$ или $U = U(\mathbf{r})$ с векторным аргументом (радиус-вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$).

Некоторые скалярные поля. а) *Плоское поле*

$$U = U(x, y)\,^{*)}$$

(U не зависит от z).

б) *Центральное поле* (*сферическое поле*)

$$U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

(U зависит только от расстояния точки от начала координат).

в) *Осевое поле* (*цилиндрическое поле*)

$$U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$$

(U зависит только от расстояния от точки до оси z).

Свойства скалярных полей можно наглядно изучить при помощи *поверхностей уровня*. Это поверхности в пространстве, на которых U обладает постоянным значением. Они описываются уравнением $U(x, y, z) = \text{const}$. В центральном поле все поверхности сфер с центром в начале координат являются поверхностями уровня. В осевом (цилиндрическом) поле все поверхности круговых цилиндров с общей осью образуют поверхности уровня. В плоском скалярном поле *линиями уровня* называют кривые, на которых U остается постоянным. Они описываются уравнениями $U(x, y) = \text{const}$. На рисунках принято наносить только линии уровня, которые соответствуют определенным значениям U, следующим друг за другом через равные интервалы (например, $U = 10$, 15, 20, 25, 30; рис. 4.25). Чем ближе друг к другу начерчены линии уровня, тем быстрее растет U. Вспомним о горизонталях на географических картах.

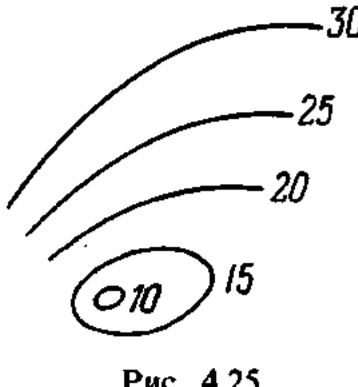


Рис. 4.25

В отдельных случаях линии уровня могут вырождаться в точки, а поверхности уровня — в точки и линии.

Пример 2. На рис. 4.26 соответственно: а) $U = xy$; б) $U = y/x^2$; в) $U = \rho^2$; г) $U = 1/\rho$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

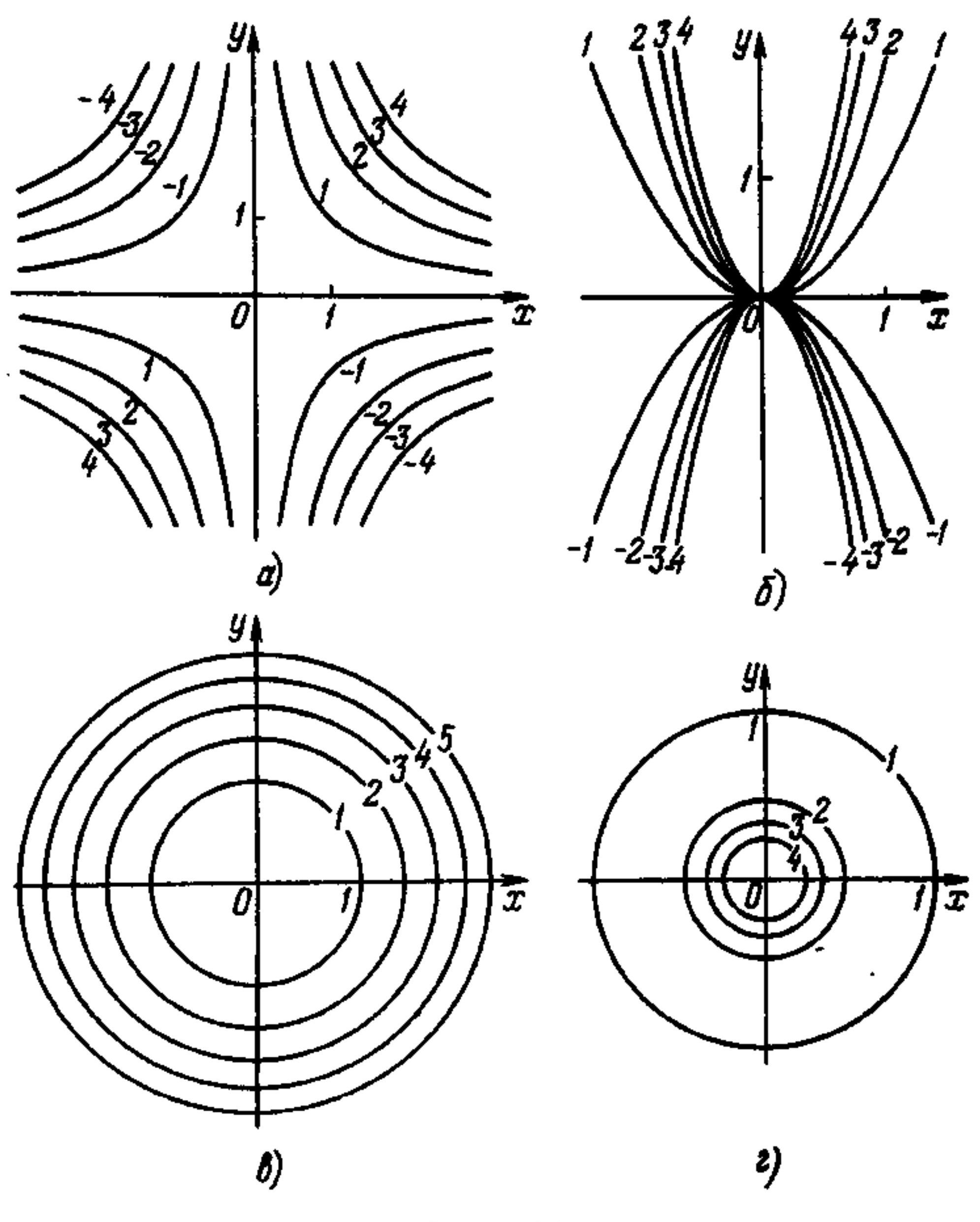


Рис. 4.26

Векторные поля. Если каждой точке M пространства ставится в соответствие вектор $\mathbf{V}$, то говорят о *векторном поле* $\mathbf{V}(M)$ (например, поле скоростей частиц движущейся жидкости, силовое поле Солнца, поле электрической напряженности, поле магнитной напряженности; рис. 4.27).

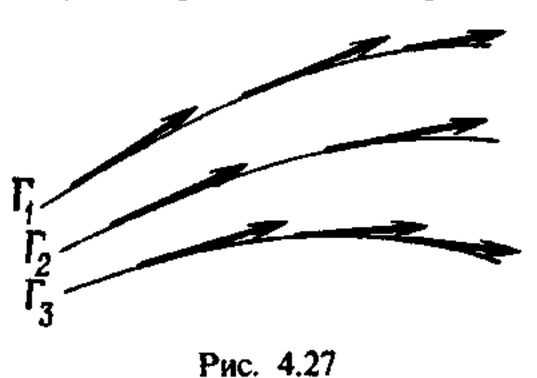


Рис. 4.27

Как и при скалярных полях, в декартовых координатах записывают: $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ или $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор). Векторное поле можно записать в декартовых координатах в следующем виде: $\mathbf{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k}$. Компоненты V_x, V_y, V_z образуют три скалярных поля и однозначно определяют $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ – векторную функцию векторного аргумента.

Некоторые векторные поля. а) *Плоское векторное поле*

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y), \quad V_z = 0$$

*) Иногда плоским полем называют поле, определенное для точек пространства и обладающее тем свойством, что для всех точек любой прямой, параллельной некоторому постоянному направлению, функция U имеет одно и то же значение. Такое поле правильнее называть *плоскопараллельным*; его изучение сводится к изучению поля в плоскости, перпендикулярной этому направлению.

($\mathbf{V}$ не зависит от z; векторы $\mathbf{V}(x, y)$ лежат в (x, y)-плоскости или в плоскости, параллельной этой плоскости, рис. 4.28).

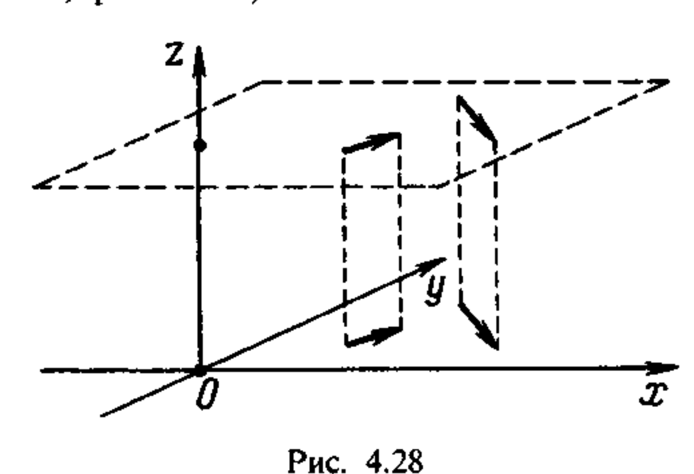


Рис. 4.28

б) *Сферическое векторное поле*

$$\mathbf{V} = \Phi(\rho)\mathbf{r}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

(если ввести в рассмотрение сферу радиуса ρ с центром в начале координат, то $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ в каждой точке сферы имеет одну и ту же длину и параллелен нормали к сфере в этой точке; рис. 4.29).

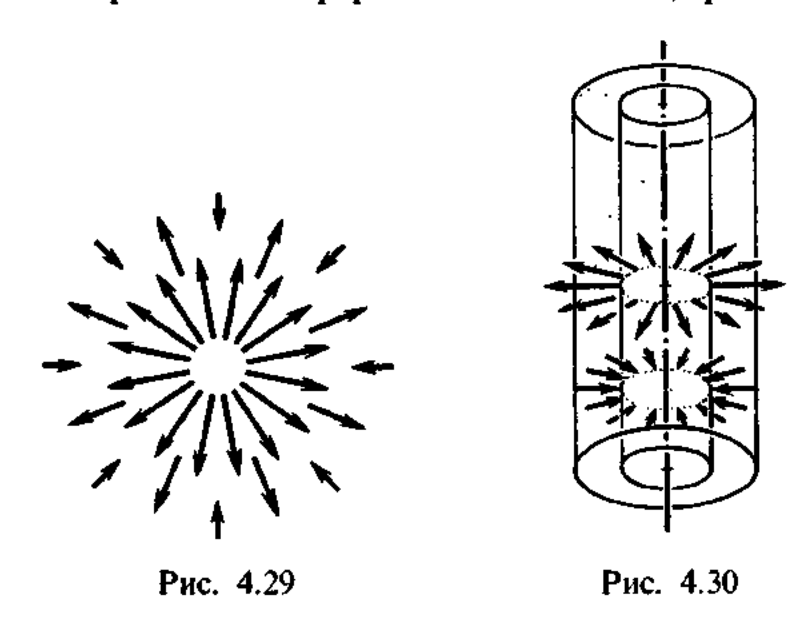


Рис. 4.29 Рис. 4.30

в) *Цилиндрическое векторное поле*

$$\mathbf{V} = \Phi(\rho)\mathbf{r}^*, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathbf{r}^* = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(если ввести в рассмотрение круговой цилиндр с осью z и радиусом ρ, то в каждой точке поверхности цилиндра вектор $\mathbf{V}$ имеет одну и ту же длину и параллелен нормали к поверхности цилиндра в этой точке; рис. 4.30).

Важным частным случаем центрального поля является силовое поле Солнца

$$\mathbf{V} = -\gamma \frac{m_З m_С}{r^3}\mathbf{r}$$

(γ – гравитационная постоянная, $m_З$ – масса Земли, $m_С$ – масса Солнца).

Для наглядного представления векторных полей используют *линии тока.* Это кривые, в каждой точке которых вектор поля $\mathbf{V}(M)$ есть касательный вектор (рис. 4.27).

Через каждую точку M поля проходит одна линия тока. За исключением точек, в которых поле $\mathbf{V}(M)$ не определено либо $\mathbf{V}(M) = \mathbf{0}$, линии тока никогда не пересекаются. В сферическом векторном поле все прямые, проходящие через начало координат, являются линиями тока; в цилиндрическом векторном поле все прямые, которые пересекают ось z перпендикулярно, являются линиями тока. В декартовых координатах дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = V_x(x(t), y(t), z(t)), \quad \frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z,$$

где t – параметр линий тока.

Для плоского поля третье равенство отпадает. Если линии тока записать в виде $y = y(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y(x, y)}{V_x(x, y)}.$$

Цилиндрические координаты. Для решения многих задач часто рекомендуется использование *цилиндрических координат* ρ, φ, z (2.6.5.2), которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующим образом:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Координатные линии:

$\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$, ρ – переменное (прямые, проходящие через ось z, параллельны (x, y)-плоскости);

$z = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, φ – переменное (окружности с центром на оси z и параллельные (x, y)-плоскости);

$\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, z – переменное (прямые, параллельные оси z).

Каждой точке M ставятся в соответствие три единичных вектора $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$, которые являются векторами, касательными к координатным линиям, и указывают направление возрастания соответствующей координаты как параметра. Эти единичные векторы $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ изменяются при переходе от точки к точке в противоположность базисным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ прямоугольной декартовой системы координат. Но они в любой точке M перпендикулярны друг другу и образуют правую систему (рис. 4.31).

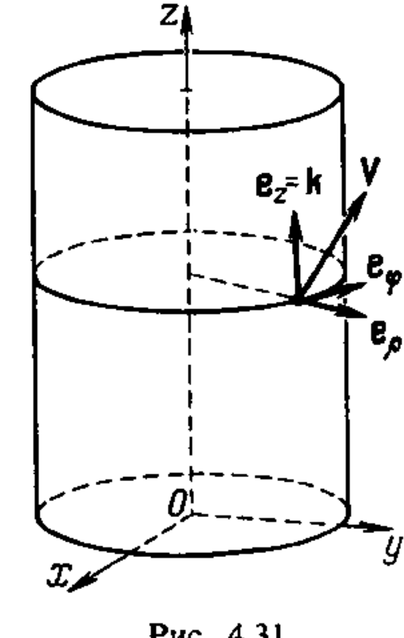


Рис. 4.31

Если разложить вектор $\mathbf{V}(M)$ по единичным векторам $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$, проведенным в точке M, то получим

$$\mathbf{V}(M) = V_\rho(M)\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(M)\mathbf{e}_\varphi + V_z(M)\mathbf{e}_z,$$

где V_ρ, V_φ, V_z называются *цилиндрическими координатами* $\mathbf{V}(M)$ в точке M в противоположность декартовым координатам V_x, V_y, V_z, которые используются в разложении

$$\mathbf{V}(M) = V_x(M)\mathbf{i} + V_y(M)\mathbf{j} + V_z(M)\mathbf{k}.$$

а) Выражение декартовых координат через цилиндрические координаты:

$$V_x = V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi,$$
$$V_y = V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

б) Выражение цилиндрических координат через декартовы координаты:

$$V_\rho = V_x\cos\varphi + V_y\sin\varphi,$$
$$V_\varphi = -V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

Цилиндрическое векторное поле имеет в цилиндрических координатах вид

$$\mathbf{V} = \Phi(\rho)\,\mathbf{e}_\rho.$$

В случае плоского поля $\mathbf{V}(x, y)$ надо в приведенных выше формулах положить $V_z = 0$. В частности (рис. 4.32),

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi)\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Сферические координаты. Иногда полезно использовать сферические координаты

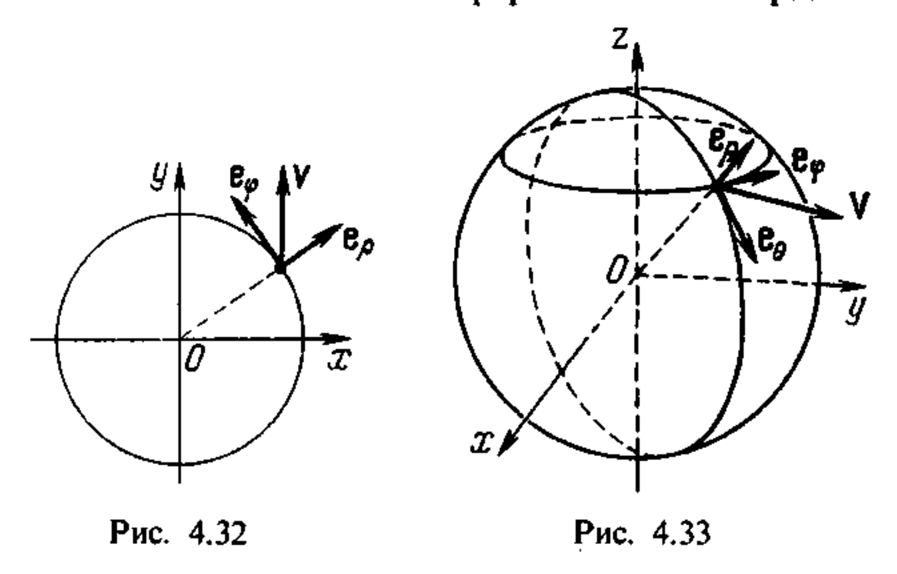


Рис. 4.32 Рис. 4.33

θ, φ, ρ (см. 2.6.5.2), которые связаны с декартовыми координатами формулами:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\theta.$$

Координатные линии:

$\varphi = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$, θ — переменное (меридианы);

$\rho = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, φ — переменное (параллели — широты);

$\theta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$, ρ — переменное (прямые, проходящие через начало координат).

Как и в случае цилиндрических координат, каждой точке M ставятся в соответствие единичные векторы $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\rho$, которые являются векторами, касательными к координатным линиям и идущими в направлении возрастающих значений параметра (рис. 4.33). Если $\mathbf{V}(M)$ разложить по единичным векторам $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\rho$, то получим

$$\mathbf{V}(M) = V_\theta(M)\,\mathbf{e}_\theta + V_\varphi(M)\,\mathbf{e}_\varphi + V_\rho(M)\,\mathbf{e}_\rho;$$

V_θ, V_φ, V_ρ — *сферические координаты* $\mathbf{V}(M)$.

а) Выражение декартовых координат через сферические координаты:

$$V_x = V_\rho\sin\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi + V_\theta\cos\varphi\cos\theta,$$

$$V_y = V_\rho\sin\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi + V_\theta\sin\varphi\cos\theta,$$

$$V_z = V_\rho\cos\theta - V_\theta\sin\theta.$$

б) Выражение сферических координат через декартовы координаты:

$$V_\theta = V_x\cos\theta\cos\varphi + V_y\cos\theta\sin\varphi - V_z\sin\theta,$$

$$V_\varphi = -V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi,$$

$$V_\rho = V_x\sin\theta\cos\varphi + V_\varphi\sin\theta\sin\varphi + V_z\cos\theta.$$

Единичные векторы $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\rho$ перпендикулярны друг другу и образуют правую тройку векторов. Сферическое векторное поле задается уравнением

$$\mathbf{V} = \Phi(\rho)\,\mathbf{e}_\rho.$$

4.2.2.3. Градиент скалярного поля. Производная по направлению и градиент. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор и $U(\mathbf{r})$ — скалярное поле. Проведем через конец вектора $\mathbf{r}$ прямую в направлении $\mathbf{n}$ (рис. 4.34). Все точки прямой имеют радиус-векторы вида $\mathbf{r} + t\mathbf{n}$, где t — действительное число. Если рассматривать $U(\mathbf{r})$ только на этой прямой, то получаем функцию $f(t) = U(\mathbf{r} + t\mathbf{n})$. Производная $f'(0)$ называется тогда *производной* $U(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ в направлении $\mathbf{n}$, короче, *производной по направлению*: $\dfrac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}}$.

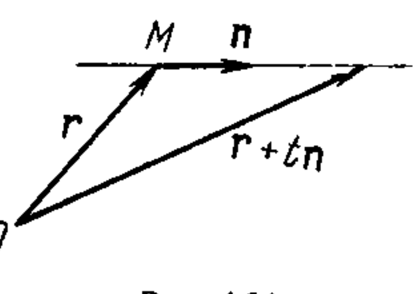


Рис. 4.34

Таким образом, из определения производной как предела следует

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(\mathbf{r} + \Delta t\mathbf{n}) - U(\mathbf{r})}{\Delta t} = f'(0).$$

Запишем векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$ в декартовых координатах:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\quad \mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}.$$

Тогда для дифференцируемого поля U

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = n_x\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} + n_y\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} + n_z\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}.$$

Градиентом поля $U(\mathbf{r})$ называется вектор (обозначение: $\mathrm{grad}\, U$), определяемый в каждой точке поля соотношением

$$\mathrm{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k};$$

тогда

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} = \mathbf{n}\,\mathrm{grad}\, U.$$

Часто вектор $\mathrm{grad}\, U$ обозначают также $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ или ∇U. Полный дифференциал функции $U(\mathbf{r})$ с использованием обозначения $\mathrm{grad}\, U$ можно записать следующим образом:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = (\mathrm{grad}\, U)\,d\mathbf{r}.$$

Интерпретация градиента. Рассмотрим в качестве примера $U(\mathbf{r})$ температурное поле $T(\mathbf{r})$. Поверхности уровня являются поверхностями постоянной температуры; пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор, который построен перпендикулярно поверхности уровня в точке M в направлении возрастающих значений T (вектор нормали) (рис. 4.35). Тогда градиент $\mathrm{grad}\, T$ в точке M имеет направление нормали $\mathbf{n}$, и его длина равна производной в направлении нормали $\dfrac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}}$. Тем самым определение $\mathrm{grad}\, T$ не зависит от вида координатной системы (инвариантное определение). Чем быстрее растет T, тем больше $|\mathrm{grad}\, T|$. В точках, в которых T имеет максимум или минимум, $\mathrm{grad}\, T = \mathbf{0}$.

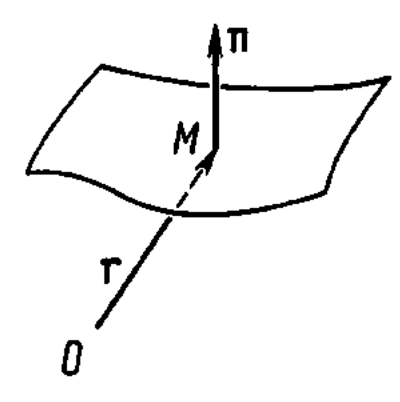


Рис. 4.35

Градиент можно определить инвариантно при помощи пространственной производной скалярного поля (см. 4.2.2.5). Градиенты играют важную роль в теории потенциалов (см. 4.2.2.4).

Координатное представление:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$$

(декартовы координаты),

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

(цилиндрические координаты),

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho$$

(сферические координаты).

Свойства градиента. Если c – постоянная, то

$$\operatorname{grad} c = \mathbf{0},\ \operatorname{grad} cU = c\operatorname{grad} U,$$

$$\operatorname{grad}(U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2,$$

$$\operatorname{grad}(U_1U_2) = U_1\operatorname{grad} U_2 + U_2\operatorname{grad} U_1,$$

$$\operatorname{grad}\varphi(U) = \frac{d\varphi}{dU}\operatorname{grad} U,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1\operatorname{grad})\mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_2\operatorname{grad})\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{V}_1,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{cr}) = \mathbf{c}\ (\mathbf{c} \text{ – постоянный вектор}).$$

Выражения $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ и $(\mathbf{V}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ объясняются в 4.2.2.7 и 4.2.2.8. Если U зависит только от $r = |\mathbf{r}|$, то $\operatorname{grad} U(r) = U'(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (сферическое поле); в частности, $\operatorname{grad} r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (поле единичных векторов).

Согласно формуле Тейлора, в первом приближении имеем

$$U(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = U(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\operatorname{grad} U(\mathbf{r})) + \ldots$$

4.2.2.4. Криволинейный интеграл и потенциал в векторном поле. Пусть заданы векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ и кривая AB (A – начальная точка, B – конечная точка). *Криволинейный интеграл* $\int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ есть скаляр, получаемый следующим образом (рис. 4.36):

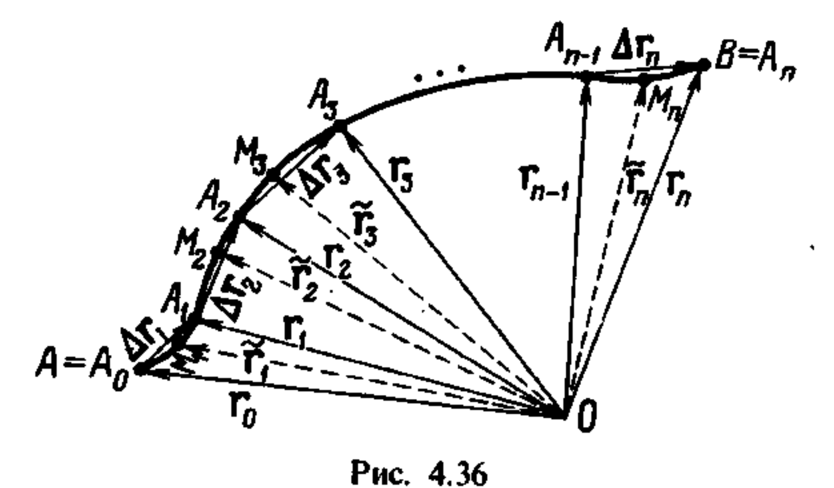


Рис. 4.36

1) Разбиваем $\smile{AB}$ точками $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ на n отрезков, приближенно изображаемых векторами $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \Delta\mathbf{r}_i$; это разбиение обозначаем через Z_n.

2) Векторы $\Delta\mathbf{r}_i$ образуют ломаную, которая аппроксимирует кривую AB. Наибольшую из длин кривых $\smile{A_{k-1}A_k}$, $k = 1, \ldots, n$, назовем *мелкостью* разбиения $\Delta(Z_n)$.

3) На границе или внутри каждой элементарной дуги $A_{i-1}A_i$ выбирается произвольная точка M_i, имеющая радиус-вектор $\tilde{\mathbf{r}}_i$, и составляется сумма

$$S_{Z_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_i.$$

4) Если имеется такое число I, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|S_{Z_n} - I| < \varepsilon$$

для всевозможных сумм S_{Z_n} с $\Delta(Z_n) < \delta(\varepsilon)$, то говорят, что криволинейный интеграл существует и равен $I = \int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$. Криволинейный интеграл можно, таким образом, аппроксимировать как угодно точно при помощи сумм S_{Z_n}, если только разбиение кривой достаточно мелко. Если рассмотреть некоторую последовательность разбиений $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ с $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(Z_n) = 0$ и если криволинейный интеграл существует, то

$$I = \lim_{n\to\infty} S_{Z_n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_i.$$

Если выбрать декартову систему координат

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k},$$

то можно записать также

$$\int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\smile{AB}} V_x\,dx + V_y dy + V_z dz.$$

Рис. 4.37

Если кривая $\smile{AB}$ имеет параметрическое задание $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причем параметр t пробегает значения $t_A \leqslant t \leqslant t_B$ (t_A, t_B соответствуют A, B), то криволинейный интеграл можно свести к определенному интегралу

$$\int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{t_A}^{t_B}\left[V_x(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt} + V_y\frac{dy}{dt} + V_z\frac{dz}{dt}\right]dt.$$

Криволинейный интеграл существует, в частности, если производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ непрерывны (непрерывны касательные к кривой) и непрерывны функции $V_x(x(t), y(t), z(t))$, $V_y(x(t), y(t), z(t))$, $V_z(x(t), y(t), z(t))$ (непрерывность векторного поля $\mathbf{V}(r)$ вдоль кривой $\smile{AB}$).

Свойства (рис. 4.37):

$$\int\limits_{\smile{ABC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int\limits_{\smile{BC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

$$\int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -\int\limits_{\smile{BA}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

$$\int\limits_{\smile{AB}} (\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{r}))\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}_1(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}_2(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

$$\int\limits_{\smile{AB}} c\mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = c\int\limits_{\smile{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\ (c = \text{const}).$$

Криволинейный интеграл по замкнутой кривой обозначается символом $\oint \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$.

Механический смысл. Если $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ – силовое поле, то $P = \int\limits_{\breve{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ означает работу, которую совершает сила $\mathbf{V}$ при переносе материальной точки из A в B вдоль кривой $\breve{AB}$.

Независимость от пути интегрирования. Если рассматривают две различные кривые C_1, C_2, которые соединяют точки A и B (рис. 4.38), то соответствующие криволинейные интегралы в общем

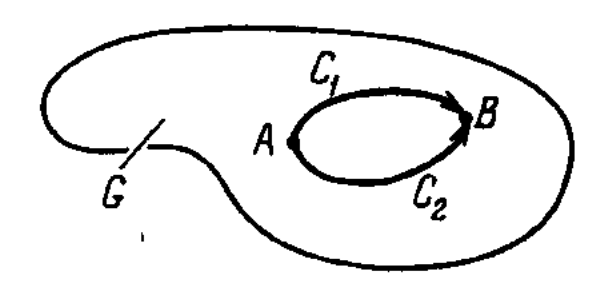


Рис. 4.38

случае будут иметь различные значения. Векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ называется *консервативным* (*потенциальным*) в области G, если криволинейные интегралы в G зависят только от начальной точки A и конечной точки B (это эквивалентно тому, что криволинейные интегралы вдоль замкнутых кривых в области G всегда равны нулю). Если, в частности, $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ – силовое поле, то это означает, что совершенная работа не зависит от пути, а зависит только от положения начальной и конечной точек кривой. Если компоненты V_x, V_y, V_z имеют непрерывные частные производные 1-го порядка в односвязной области G, то $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ тогда и только тогда консервативно в G, когда

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

или, в координатной записи,

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

Эти условия называются *условиями интегрируемости*.

Потенциал. Если для векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ существует функция $U(\mathbf{r})$ такая, что $\mathbf{V} = \operatorname{grad} U$, т. е. в декартовых координатах

$$V_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то $U(\mathbf{r})$ называется *потенциалом* векторного поля $V(\mathbf{r})$ *). В этом случае $\mathbf{V}\,d\mathbf{r} = (\operatorname{grad} U)\,d\mathbf{r} = dU$; следовательно,

$$\int\limits_{\breve{AB}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\breve{AB}} dU = U(B) - U(A).$$

Если $A = A(\mathbf{r}_0)$, $B = B(\mathbf{r}_0)$, то это можно записать и так:

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}.$$

Если поле $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ имеет потенциал, то оно консервативно. И наоборот, каждое консервативное векторное поле обладает потенциалом:

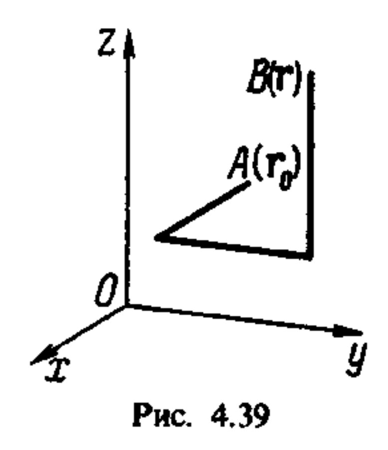


Рис. 4.39

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r}.$$

При этом $A(\mathbf{r}_0)$ – постоянная точка и интеграл можно вычислять вдоль любой кривой, которая связывает A с $B(\mathbf{r})$. Значение $U(\mathbf{r}_0)$ можно произвольно задавать. В декартовых координатах часто выбирают ломаную, звенья которой параллельны координатным осям (рис. 4.39). Тогда

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) + \int\limits_{x_0}^{x} V_x(x, y_0, z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} V_y(x, y, z_0)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} V_z(x, y, z)\,dz.$$

Потенциал $U(\mathbf{r})$ в области G определен всегда с точностью до аддитивной постоянной.

Пример 3. а) Поле притяжения Земли:

$$\mathbf{V} = -g\mathbf{k}, \quad U = -gz.$$

б) Силовое поле Солнца, находящегося в точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{V} = -\frac{\gamma m_C m_З}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad U = \frac{\gamma m_C m_З}{r}.$$

в) Напряженность поля электрического заряда Q, находящегося в $\mathbf{r} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad U = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Здесь γ – гравитационная постоянная, g – ускорение силы тяжести, m_C – масса Солнца, $m_З$ – масса Земли, ε_0 – диэлектрическая постоянная. В электрическом поле U означает напряжение.

4.2.2.5. Поверхностные интегралы в векторных полях. Пусть задана плоская площадка Σ, ограниченная замкнутой ориентированной кривой C (рис. 4.40). Вектор нормали $\mathbf{n}$ является единичным

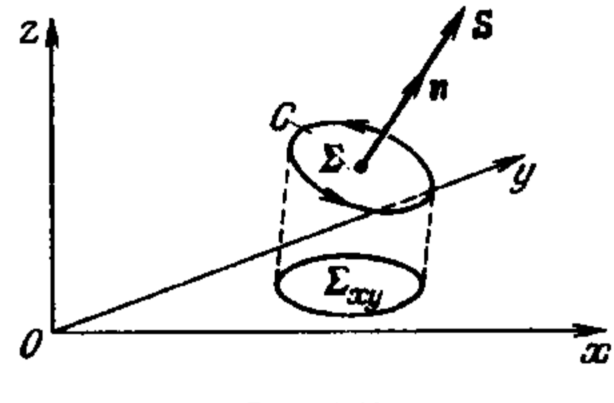


Рис. 4.40

вектором, который направлен перпендикулярно к Σ и выбран так, что из конца вектора $\mathbf{n}$ обход контура C кажется происходящим против часовой стрелки. Сторона площадки, обращенная к вектору $\mathbf{n}$, называется *положительной стороной.* Каждой ориентированной плоской площадке Σ можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{S}$, имеющий направление $\mathbf{n}$ и модуль, равный ее площади S. Выберем декартову систему координат и обозначим через Σ_{xy}, Σ_{yz} и Σ_{zx} проекции Σ на плоскость x, y, плоскость y, z и плоскость z, x соответственно. Пусть площади этих проекций равны S_{xy}, S_{yz} и

*) В физике потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ называют иногда величину, противоположную по знаку.

S_{zx}. Тогда

$$\mathbf{S} = S\mathbf{n} = S_{yz}\mathbf{i} + S_{zx}\mathbf{j} + S_{xy}\mathbf{k}.$$

Если дана изогнутая площадка (рис. 4.41), то ее можно ориентировать, выделяя одну сторону как положительную. Под вектором нормали в точке M понимается единичный вектор, который перпендикулярен к Σ в точке M и конец которого расположен с положительной стороны Σ. Граница области Σ ориентируется таким образом, что обход границы из конца вектора нормали выглядит обходом против часовой стрелки.

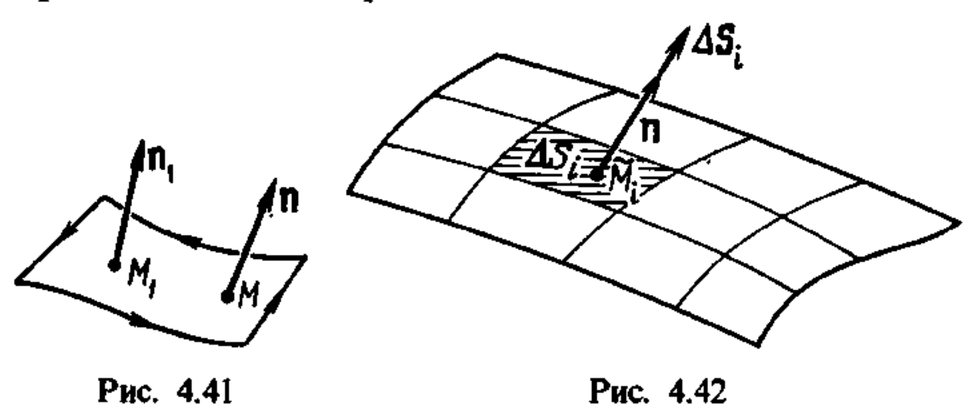


Рис. 4.41 Рис. 4.42

Поверхностные интегралы. Три различных вида поверхностных интегралов в векторном анализе образуются следующим образом:

1) Поверхность Σ, на которой выбрана положительная сторона, разбивается на n элементарных площадок Σ_i (рис. 4.42) с площадями ΔS_i. Это разбиение обозначается Z_n. Под мелкостью разбиения $\Delta(Z_n)$ понимается наибольшее из чисел $d_1, \ldots, d_n$, где d_i – диаметр площади Σ_i, т. е. верхняя грань расстояний между точками площадки Σ_i.

2) Внутри или на границе каждой элементарной площадки выбирается точка $\tilde{M}_i$ и в этой точке проводятся нормальный к поверхности вектор $\mathbf{n}$ (соответствующий выбранной стороне) и вектор $\Delta\mathbf{S}_i = \Delta S_i\mathbf{n}$ (направление которого $\mathbf{n}$, а модуль ΔS_i).

3) При заданной функции $U(M)$ или заданном векторном поле $\mathbf{V}(M)$ составляем следующие интегральные суммы:

$$\mathbf{S}_{Z_n}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} U(\tilde{M}_i)\,\Delta\mathbf{S}_i, \quad S_{Z_n}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{M}_i)\,\Delta\mathbf{S}_i,$$

$$\mathbf{S}_{Z_n}^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{M}_i) \times \Delta\mathbf{S}_i.$$

Тогда мы определяем:

а) *поток скалярного поля:*

$$\mathbf{I}^{(1)} = \iint_{\Sigma} U\,d\mathbf{S} = \lim_{\Delta(Z_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} U(\tilde{M}_i)\,\Delta\mathbf{S}_i;$$

б) *скалярный поток векторного поля*:

$$I^{(2)} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V}\,d\mathbf{S} = \lim_{\Delta(Z_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{M}_i)\,\Delta\mathbf{S}_i;$$

в) *векторный поток векторного поля*:

$$\mathbf{I}^{(3)} = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S} = \lim_{\Delta(Z_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{M}_i) \times \Delta\mathbf{S}_i.$$

Например, поток скалярного поля определяется следующим образом: для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\mathbf{I}^{(1)} - \mathbf{S}_{Z_n}^{(1)}| < \varepsilon$$

для всех возможных интегральных сумм $\mathbf{S}_{Z_n}^{(1)}$, которые удовлетворяют неравенству $\Delta(Z_n) < \delta(\varepsilon)$ (аналогично для $I^{(2)}$, $\mathbf{I}^{(3)}$). Следовательно, интегралы можно с требуемой точностью аппроксимировать суммами, если только разбиение поверхности достаточно мелко. В частности, для последовательности разбиений Z_1, Z_2, Z_3, ... такой, что

$\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(Z_n) = 0$, всегда

$$\mathbf{I}^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{S}_{Z_n}^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} U(\tilde{M}_i)\,\Delta\mathbf{S}_i,$$

если только интеграл существует (аналогично для $I^{(2)}$, $\mathbf{I}^{(3)}$).

Интегралы по замкнутой поверхности обозначаются символами $\oiint U\,d\mathbf{S}$, $\oiint \mathbf{V}\,d\mathbf{S}$, $\oiint \mathbf{V} \times d\mathbf{S}$. При этом подразумевается, что векторы нормали $\mathbf{n}$ должны быть направлены наружу.

Декартовы координаты. Если поверхность задана в виде $z = z(x, y)$ (рис. 4.43), то поверхностные интегралы можно вычислить, полагая

$$d\mathbf{S} = -\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Этот вектор имеет направление вектора нормали $\mathbf{n}$ в точке $M(x, y, z(x, y))$. Его модуль приблизительно

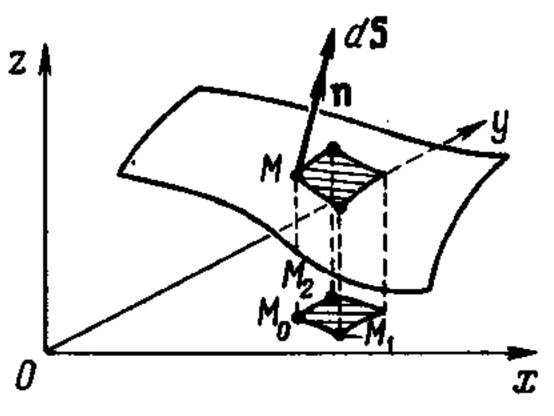


Рис. 4.43

равен величине площади элементарной площадки, проекция которой на плоскость x, y соответствует прямоугольнику, который строится на $M_0(x;\ y)$, $M_1(x + dx;\ y)$, $M_2(x;\ y + dy)$ $\left(|d\mathbf{S}| = dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\right)$:

$$\text{а)} \iint_{\Sigma} U\,d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{xy}} \left[-U(x, y, z(x, y))\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} - U\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + U\mathbf{k}\right]dx\,dy;$$

$$\text{б)} \iint_{\Sigma} \mathbf{V}\,d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{xy}} \left[-V_x(x, y, z(x, y))\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - V_y\frac{\partial z}{\partial y} + V_z\right]dx\,dy;$$

$$\text{в)} \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{xy}} \left[\left(V_y + V_z\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{i} - \left(V_x + V_z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(V_y\frac{\partial z}{\partial x} - V_x\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]dx\,dy.$$

Двойные интегралы при этом должны браться по всей проекции Σ_{xy} поверхности Σ на плоскость x, y; переменная z заменяется в подынтегральных выражениях на $z(x, y)$. В частности, поверхностные интегралы существуют, если $z(x, y)$, $\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ непрерывны (непрерывно меняется вектор нормали, или, как говорят в этом случае, непрерывно меняется касательная плоскость) и функции $U(x, y, z(x, y))$, $V_x(x, y, z(x, y))$, $V_y(x, y, z(x, y))$, $V_z(x, y, z(x, y))$ непрерывны (непрерывность $U(M)$, $\mathbf{V}(M)$ на поверхности).

Параметрическое представление общего вида. Если поверхность Σ имеет параметрическое представление

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

то поверхностные интегралы можно вычислить, учитывая, что

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv,$$

и беря получающиеся двойные интегралы по области плоскости u, v, в которой изменяются параметры u, v. При этом

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Отсюда следует:

$$\text{а)}\ \iint_{\Sigma} U\, d\mathbf{S} = \iint\Big[U\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathbf{i} + U\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\mathbf{j} + U\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathbf{k}\Big]du\, dv;$$

$$\text{б)}\ \iint_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S} = \iint\Big[V_x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + V_y\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + V_z\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Big]du\, dv.$$

Аналогичная формула получается для в) вычислением $\mathbf{V} \times d\mathbf{S}$. В подынтегральных выражениях интеграла а) следует положить $U = U(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ (аналогично для V_x, V_y, V_z в б) и в)).

Производная по объему. Под производной по объему скалярного поля $U(M)$ или векторного поля $\mathbf{V}(M)$ в точке M понимают величины трех типов, которые получают следующим образом. 1) Точка M окружается замкнутой поверхностью Σ, которая охватывает область с объемом V. 2) Вычисляется интеграл по поверхности Σ

$$\left(\oiint_{\Sigma} U\, d\mathbf{S},\ \oiint_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}\ \text{или}\ \oiint_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S}\right).$$

3) Определяется предел отношения этого интеграла к объему V, когда Σ стягивается в точку M, так что V стремится к нулю. В частности,

$$\operatorname{grad} U = \lim_{V \to \infty} \frac{\oiint_{\Sigma} U\, d\mathbf{S}}{V}$$

(см. 4.2.2.3). Производные по объему векторного поля приводят к понятиям *дивергенции* (см. 4.2.2.6) и *ротора* (см. 4.2.2.7).

4.2.2.6. Дивергенция векторного поля. *Дивергенцией* $\operatorname{div}\mathbf{V}$ векторного поля $\mathbf{V}(M)$ называют следующую производную по объему поля в точке M:

$$\operatorname{div}\mathbf{V}(M) = \lim_{v \to 0} \frac{\oiint_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}}{V}.$$

Если M изменяется, то $\operatorname{div}\mathbf{V}$ образует скалярное поле. В другой записи: $\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}}$ или $\nabla\mathbf{V}$. Величина $\oiint_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}$ есть скалярный поток векторного поля через замкнутую поверхность Σ, которая окружает точку M и охватывает область G с объемом V (рис. 4.44). Векторы нормали $\mathbf{n}$ направлены наружу.

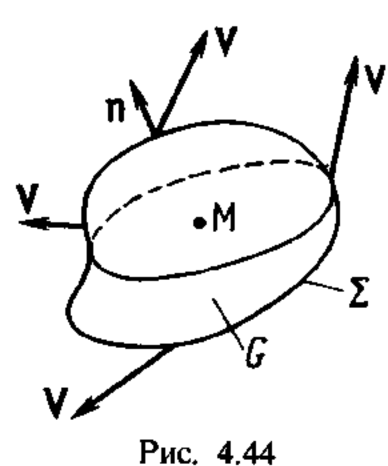


Рис. 4.44

Для того чтобы пояснить эти понятия, рассмотрим текущую жидкость. В этом случае каждой точке из области потока в момент времени t ставятся в соответствие плотность $\rho(M, t)$ и вектор скорости $\mathbf{v}(M, t)$. Скалярный поток векторного поля $u = \rho\mathbf{v}$ (плотность потока) равен тогда

$$\oiint_{\Sigma} \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

При этом величина Δm равна массе, которая протекает через Σ за отрезок времени от t до $t + \Delta t$; Δm положительна, если из области, ограниченной Σ, вытекает больше массы, чем втекает (источники находятся в области G). Это течение массы вызывается изменением плотности жидкости, текущей в G. Понятие дивергенции позволяет описать поведение этой плотности в отдельной точке. В нашем примере

$$\operatorname{div}\rho(M, t)\mathbf{v}(M, t) = -\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t}.$$

Это уравнение описывает закон сохранения массы и называется *уравнением непрерывности.*

Вообще $\operatorname{div}\mathbf{V}$ есть мера источников поля $\mathbf{V}(M)$. Если в области G $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, то векторное поле $\mathbf{V}(M)$ в этой области называется свободным от источников. Если, например, в вакууме имеются электрические заряды с плотностью заряда ρ, то напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, создаваемого этими зарядами, удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E}(M) = \rho(M)$$

(ε_0 – диэлектрическая постоянная); $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ в области G означает, следовательно, что в G нет никаких зарядов (заряды являются источниками $\mathbf{E}$).

Формулы для вычисления дивергенции:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

(в декартовых координатах),

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

(в цилиндрических координатах),

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta V_\theta)}{\partial\theta}$$ (в сферических координатах).

Правила вычисления дивергенции:

$$\operatorname{div}\mathbf{c} = 0,\ \operatorname{div} c\mathbf{V} = c \operatorname{div}\mathbf{V},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \operatorname{div}\mathbf{V}_1 + \operatorname{div}\mathbf{V},$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{V}) = U\operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\operatorname{grad} U$$

$$\left(\text{в частности, } \operatorname{div} r\mathbf{c} = \frac{\mathbf{rc}}{r}\right),$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2 \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1 \operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

При этом $\mathbf{c} = \text{const}$, $c = \text{const}$. В центральном поле

$$\operatorname{div}\Phi(r)\mathbf{r} = 3\Phi'(r) + r\Phi'(r), \quad \operatorname{div}\mathbf{r} = 3.$$

Правила вычисления см. также в 4.2.2.9.

4.2.2.7. Ротор векторного поля. *Ротором* (*вихрем*) $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ векторного поля $\mathbf{V}(M)$ называют производную по объему V поля $\mathbf{V}$ в точке M:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\oiint\limits_\Sigma \mathbf{V}\times d\mathbf{S}}{v}.$$

Если M изменяется, то $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ образует векторное поле. Другая запись: $\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\times\mathbf{V}$ или $\nabla\times\mathbf{V}$ (или иногда $\operatorname{curl}\mathbf{V}$).

Понятие ротора $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ можно ввести наглядно при помощи понятия *циркуляции* векторного поля $\Gamma = \oint\limits_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}$ вдоль замкнутой кривой C. В консервативном векторном поле (см. 4.2.2.4) всегда $\Gamma = 0$. Если C – замкнутая линия тока (рис. 4.45), то $\Gamma \neq 0$. Следовательно, в консервативном векторном поле не могут появляться замкнутые линии тока.

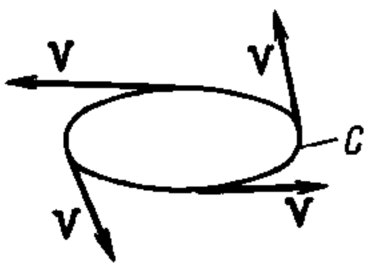


Рис. 4.45

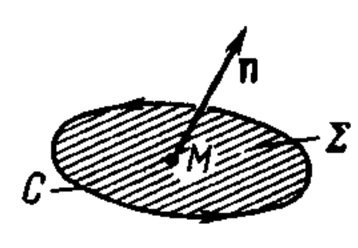


Рис. 4.46

Циркуляция Γ есть мера завихренности поля; $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ позволяет локализовать эти вихри следующим образом (рис. 4.46): 1) в точке M задается единичный вектор нормали $\mathbf{n}$; 2) через M проводят небольшую площадку Σ площади S, для которой $\mathbf{n}$ является нормалью, контур C ограничивает эту площадку и обходит $\mathbf{n}$ против часовой стрелки; 3) вычисляют предел отношения циркуляции Γ к S, когда диаметр $d(\Sigma)$ площадки Σ стремится к нулю (C и Σ стягиваются в точку M):

$$\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{V} = \lim_{d(\Sigma)\to 0}\frac{\oint\limits_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}}{S}.$$

Этот предел $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{V}$ есть проекция $\operatorname{rot}\mathbf{V}(M)$ на направление $\mathbf{n}$. В частности, если $\mathbf{V}$ – поле скоростей вида

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$$

(вращение всех точек пространства с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси с направлением единичного вектора $\mathbf{n}$ (рис. 4.47)), то

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = 2\omega\mathbf{n},$$

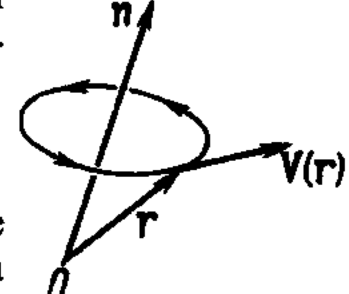


Рис. 4.47

т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ имеет в каждой точке направление оси вращения, а длина вектора $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ равна удвоенной угловой скорости. В произвольном поле скоростей равенство $\operatorname{rot}\mathbf{V}(M) = \mathbf{0}$ означает, что в точке M нет (локального) вращательного движения. Если вообще $\operatorname{rot}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ в области G, то векторное поле в G называется *безвихревым*. *Вихревыми линиями* называются линии тока векторного поля $\operatorname{rot}\mathbf{V}$.

Координатное представление:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

(декартовы координаты),

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

(цилиндрические координаты),

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta V_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\rho$$

(сферические координаты).

Правила вычисления ротора:

$$\operatorname{rot}\mathbf{c} = 0, \quad \operatorname{rot} c\mathbf{V} = c\operatorname{rot}\mathbf{V},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 + \operatorname{rot}\mathbf{V}_2,$$

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{V}) = U\operatorname{rot}\mathbf{V} + (\operatorname{grad} U)\times\mathbf{V},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_2\operatorname{grad})\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_1\operatorname{grad})\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1\operatorname{div}\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_2\operatorname{div}\mathbf{V}_1.$$

При этом $\mathbf{c} = \text{const}$, $c = \text{const}$. Вывод этих формул см. в 4.2.2.9. (Определение $(\mathbf{V}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ см. в 4.2.2.8.)

4.2.2.8. Оператор Лапласа и градиент векторного поля. Пусть $U(M)$ — скалярное поле; тогда *оператор Лапласа* ΔU определяется следующим образом:

$$\Delta U(M) = \operatorname{div}\operatorname{grad} U(M).$$

Координатное представление имеет вид:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \text{ (декартовы координаты)},$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

(цилиндрические координаты),

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

(сферические координаты).

Дифференциальное уравнение $\Delta U = 0$ называется *дифференциальным уравнением Лапласа* и играет большую роль во многих задачах математической физики.

Оператор Лапласа векторного поля. Пусть $\mathbf{V}(M)$ — векторное поле; тогда $\Delta\mathbf{V}$ определяют как

$$\Delta \mathbf{V}(M) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}(M) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}(M). \qquad (4.14)$$

В декартовых координатах:

$$\Delta\mathbf{V} = (\Delta V_x)\mathbf{i} + (\Delta V_y)\mathbf{j} + (\Delta V_z)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

В других системах координат $\Delta\mathbf{V}$ имеет очень сложное выражение. В этом случае следует пользоваться формулой (4.14) и соответствующими выражениями для $\operatorname{grad} U$, $\operatorname{div}\mathbf{V}$, $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ (см. 4.2.2.3, 4.2.2.6, 4.2.2.7).

Градиент векторного поля. Пусть $\mathbf{V}(M)$ — векторное поле и $\mathbf{a}$ — вектор. Определяют

$$(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r} + \Delta t\mathbf{a}) - \mathbf{V}(\mathbf{r})}{\Delta t}.$$

Выражение $(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ называют *градиентом векторного поля* $\mathbf{V}$ по вектору $\mathbf{a}$. Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор, то выражение $(\mathbf{n}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ равно производной по направлению $\dfrac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}}$ векторного поля (см. 4.2.2.3).

В декартовых координатах:

$$(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V} = (\mathbf{a}\operatorname{grad} V_x)\mathbf{i} + (\mathbf{a}\operatorname{grad} V_y)\mathbf{j} + (\mathbf{a}\operatorname{grad} V_z)\mathbf{k}$$

(ср. 4.2.2.1). Вообще имеем формулу

$$2(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V} = \operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{a}) + \operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{V}) + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} - \mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{V} - \mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Разложение векторного поля в первом приближении записывается так:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\operatorname{grad})\mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + \ldots$$

Под *градиентом векторного поля* понимают *диаду* $\Phi = \operatorname{grad}\cdot\mathbf{V}$ (см. 4.2.2.12).

4.2.2.9. Вычисление сложных выражений (оператор Гамильтона). В декартовых координатах можно при помощи формального оператора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

который называют *оператором Гамильтона* или *набла-оператором*, записать все приведенные выше выражения значительно проще:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla U,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nabla\mathbf{V},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \nabla\times\mathbf{V},$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla(\nabla U),$$

$$\Delta\mathbf{V} = (\Delta V_x)\mathbf{i} + (\Delta V_y)\mathbf{j} + (\Delta V_z)\mathbf{k} = (\nabla\nabla)\mathbf{V},$$

$$(\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V} = (\mathbf{a}\operatorname{grad} V_x)\mathbf{i} + (\mathbf{a}\operatorname{grad} V_y)\mathbf{j} + (\mathbf{a}\operatorname{grad} V_z)\mathbf{k} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V}.$$

Свойства оператора Гамильтона. Для того чтобы вычислить сложные выражения вида $\operatorname{grad}(U_1U_2)$, $\operatorname{div}(U\mathbf{V})$, $\operatorname{rot}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)$ и т. д., можно использовать следующие формальные правила:

1) Выражение записывается как формальное произведение с ∇.

2) Если ∇ стоит перед линейной комбинацией $(c_1X + c_2Y)$, где X, Y — функции точки (скалярные или векторные), то

$$\nabla(c_1X + c_2Y) = c_1\nabla X + c_2\nabla Y \quad (c_i = \text{const}).$$

3) Если ∇ стоит перед произведением функций точки X, Y (скалярных или векторных), то оператор ∇ применяется поочередно к каждой из этих функций (над нею в этом случае ставят знак $\downarrow$) и результаты складываются:

$$\nabla(XY) = \nabla(\overset{\downarrow}{X}Y) + \nabla(X\overset{\downarrow}{Y}); \qquad (4.15)$$

аналогично

$$\nabla(XYZ) = \nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ) + \nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z) + \nabla(XY\overset{\downarrow}{Z}).$$

Постоянные величины или постоянные векторы не снабжаются знаком $\downarrow$.

4) Выражения $\nabla(\overset{\downarrow}{X}Y)$, $\nabla(X\overset{\downarrow}{Y})$ и т. д. преобразуются по правилам векторной алгебры таким образом, чтобы за оператором ∇ стояла только величина, снабженная знаком $\downarrow$. При этом оператор ∇ рассматривается как вектор.

5) Наконец, формальное произведение с ∇ записывается снова как выражение векторного анализа,

например

$$U_1(\nabla \overset{\downarrow}{U_2}) = U_1(\operatorname{grad} U_2),$$

$$\mathbf{V} \times (\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) = \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_2$$

и т. д. При этом после вычисления знак ↓ не пишут.

Эти формальные правила учитывают, что, с одной стороны, ∇ – вектор, а с другой – дифференциальный оператор. В (4.15) неявно содержится правило дифференцирования произведения. Знак ↓ указывает на сомножитель, который дифференцируется.

Пример 4. Оператор ∇ действует на линейную комбинацию (c_i = const):

1) $\operatorname{grad}(c_1U_1 + c_2U_2) = \nabla(c_1U_1 + c_2U_2) = c_1\nabla U_1 + c_2\nabla U_2 = c_1 \operatorname{grad} U_1 + c_2 \operatorname{grad} U_2;$

2) $\operatorname{div}(c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2) = \nabla(c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2) = c_1\nabla\mathbf{V}_1 + c_2\nabla\mathbf{V}_2 = c_1 \operatorname{div}\mathbf{V}_1 + c_2 \operatorname{div}\mathbf{V}_2;$

3) $\operatorname{rot}(c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2) = \nabla \times (c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2) = c_1(\nabla \times \mathbf{V}_1) + c_2(\nabla \times \mathbf{V}_2) = c_1 \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 + c_2 \operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$

Пример 5. Оператор ∇ действует на произведение двух функций:

1) $\operatorname{grad}(U_1U_2) = \nabla(U_1U_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{U_1}U_2) + \nabla(U_1\overset{\downarrow}{U_2}) = U_2(\nabla\overset{\downarrow}{U_1}) + U_1(\nabla\overset{\downarrow}{U_2}) = U_2 \operatorname{grad} U_1 + U_1 \operatorname{grad} U_2;$

2) $\operatorname{div}(U\mathbf{V}) = \nabla(U\mathbf{V}) = \nabla(\overset{\downarrow}{U}\mathbf{V}) + \nabla(U\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}) = \mathbf{V}(\nabla\overset{\downarrow}{U}) + U(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}) = \mathbf{V} \operatorname{grad} U + U \operatorname{div}\mathbf{V};$

3) $\operatorname{div}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1} \times \mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1 \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) = \mathbf{V}_2(\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}) - \mathbf{V}_1(\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) = \mathbf{V}_2 \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1 \operatorname{rot}\mathbf{V}_2;$

4) $\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) = (\mathbf{V}_2\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1} + \mathbf{V}_2 \times (\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}) + (\mathbf{V}_1\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2} + \mathbf{V}_1 \times (\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) = (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad})\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \times \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad})\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$

При вычислении надо принимать во внимание тождество Лагранжа $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c} + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Пример 6. Двукратное применение оператора:

1) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{V} = \nabla(\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ для любого векторного поля $\mathbf{V}$ (формально вследствие $\mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \equiv 0$);

2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \nabla \times (\nabla U) = \mathbf{0}$ для любого скалярного поля U (формально вследствие $\mathbf{a} \times \mathbf{a}u \equiv \mathbf{0}$);

3) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla\mathbf{V}) - (\nabla\nabla)\mathbf{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V} - \Delta\mathbf{V}.$

Здесь снова использовано тождество Лагранжа. Иногда вместо ∇ используется символ $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$.

О вычислении интегралов см. 4.2.2.10.

4.2.2.10. Интегральные формулы. Преобразование объемного интеграла в поверхностный интеграл. Пусть G – пространственная область, ограниченная замкнутой поверхностью S; пусть вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен наружу (рис. 4.48). Тогда

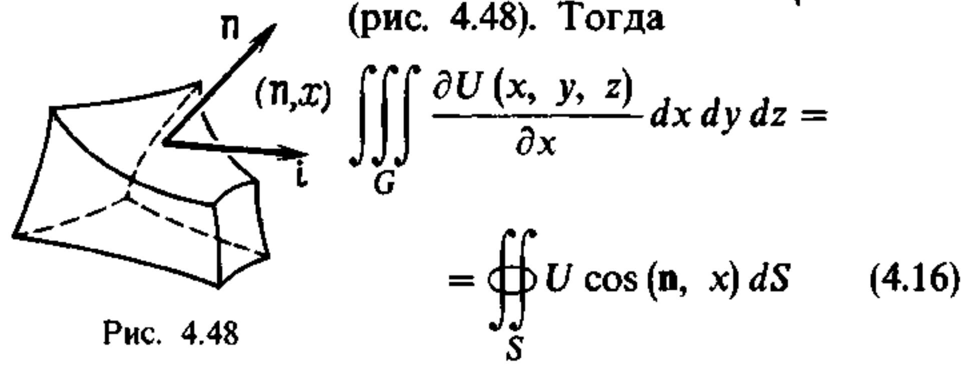


Рис. 4.48

$$\iiint\limits_G \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \oiint\limits_S U \cos(\mathbf{n}, x)\, dS \qquad (4.16)$$

(аналогично для y, z). При этом $\cos(\mathbf{n}, x) = \mathbf{in}$ (косинус угла между вектором нормали и осью x). Формула (4.16) верна при очень общих предположениях: функция U должна быть непрерывна в окрестности $G \bigcup S$ и иметь в окрестности $G \bigcup S$ непрерывные ограниченные первые частные производные; поверхность S должна иметь, за исключением конечного числа угловых точек и ребер, непрерывно меняющиеся (ср. 4.2.2.5) касательные плоскости, при этом телесные углы в угловых точках и внутренние углы в точках ребер должны быть больше нуля. Из соотношения (4.16) получаются следующие формулы ($dv = dx\, dy\, dz$):

а) *Интегрирование по частям*:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial U_1}{\partial x} U_2\, dv = \oiint\limits_S U_1U_2 \cos(\mathbf{n}, x)\, dS - \iiint\limits_G U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x}\, dv$$

(аналогично для y и z).

б) *Формула Гаусса – Остроградского*:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dv = \oiint\limits_S (V_x \cos(\mathbf{n}, x) + V_y \cos(\mathbf{n}, y) + V_z \cos(\mathbf{n}, z))\, dS;$$

в векторной записи:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{V}\, dv = \oiint\limits_S \mathbf{V}\, d\mathbf{S}.$$

в) *Первая формула Грина* (однократное интегрирование по частям):

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right) U_2\, dv = \oiint\limits_S \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z)\right) U_2\, dS - \iiint\limits_G \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\frac{\partial U_2}{\partial z}\right) dv;$$

в векторной записи:

$$\iiint\limits_G (\Delta U_1) U_2\, dv = \oiint\limits_S U_2 (\operatorname{grad} U_1)\, d\mathbf{S} - \iiint\limits_G \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2\, dv;$$

в частном случае при $U_2 \equiv 1$ имеем

$$\iiint\limits_G \Delta U_1\, dv = \oiint\limits_S (\operatorname{grad} U_1)\, d\mathbf{S} \equiv \iint\limits_S \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}}\, dS$$

(величина $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = (\operatorname{grad} U)\,\mathbf{n} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\mathbf{n}, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\mathbf{n}, z)$ называется *производной по нормали*).

г) *Вторая формула Грина* (двукратное интегрирование по частям):

$$\iiint\limits_G [(\Delta U_1)\, U_2 - U_1 \Delta U_2]\, dv = \oiint\limits_G \left(\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} U_2 - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Используя символ оператора Гамильтона, все эти формулы можно записать операторно; для (4.16) имеем

$$\iiint\limits_G dv \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) = \oiint\limits_S dS\,(\cos(\mathbf{n},\ x)\,\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n},\ y)\,\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n},\ z)\,\mathbf{k}),$$

или, кратко,

$$\iiint\limits_G dv\, \nabla = \oiint\limits_S d\mathbf{S}. \qquad (4.17)$$

Пример 7. $\iiint\limits_G dv \operatorname{grad} U \equiv \iiint\limits_G dv \nabla U = \oiint\limits_S d\mathbf{S}\, U.$

Пример 8. $\iiint\limits_G dv \operatorname{div} \mathbf{V} \equiv \iiint\limits_G dv \nabla\mathbf{V} = \oiint\limits_S d\mathbf{S}\,\mathbf{V}.$

Пример 9. $\iiint\limits_G dv \operatorname{rot} \mathbf{V} \equiv \iiint\limits_G dv (\nabla \times \mathbf{V}) = \oiint\limits_S d\mathbf{S} \times \mathbf{V}.$

Пример 10. $\iiint\limits_G dv\, \Delta U \equiv \iiint\limits_G dv\, \nabla(\nabla U) = \oiint\limits_S d\mathbf{S}\, \nabla U = \oiint\limits_S d\mathbf{S} \operatorname{grad} U.$

Пример 11. $\iiint\limits_G dv\, \nabla(U_2 \nabla U_1) \equiv \iiint\limits_G dv\, [(\nabla U_2)(\nabla U_1) + U_2 \Delta U_1] = \oiint\limits_S d\mathbf{S}\, U_2 \nabla U_1 \equiv \oiint\limits_S d\mathbf{S} (\operatorname{grad} U_1)\, U_2$ (первая формула Грина).

Пример 12. $\iiint\limits_G dv\, \nabla(U_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla U_2) \equiv \iiint\limits_G ((\Delta U_1)\, U_2 - U_1 \Delta U_2)\, dv = \oiint\limits_S d\mathbf{S}\, (U_2 \nabla U_1 - U_1 \nabla U_2)$ (вторая формула Грина).

Преобразование двойного интеграла в криволинейный. Пусть S – ограниченная плоская область с граничной кривой C, которая ориентирована так, что S лежит слева; тогда наряду с формулой (4.16) справедлива формула

$$\iint\limits_S \frac{\partial U(x,\ y)}{\partial x}\, dx\, dy = \oint\limits_C U \cos(\mathbf{n},\ x)\, ds \qquad (4.18)$$

(аналогично для y). При этом $\cos(\mathbf{n},\ x)$ есть косинус угла между внешней нормалью $\mathbf{n}$ и осью x (рис. 4.49); ds – дифференциал длины дуги. Теорема верна при очень общих предположениях: функция U должна быть непрерывна в окрестности $S \bigcup C$ и иметь в ней непрерывные ограниченные первые частные производные; граничная кривая C должна обладать непрерывно изменяющимися касательными, за исключением конечного числа точек излома, причем внутренние углы в точках излома должны быть больше нуля. Из (4.18) следует формула Грина

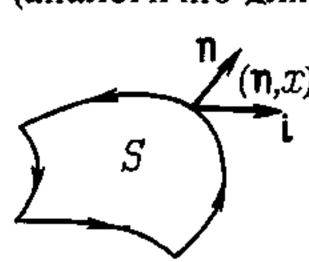


Рис. 4.49

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_C P\, dx + Q\, dy \qquad (4.19)$$

(ср. 3.1.13).

Преобразование поверхностного интеграла в криволинейный интеграл. Пусть Σ – площадка с кусочно гладкой границей L, которая ориентирована, как на рис. 4.41. Пусть U непрерывно дифференцируема в окрестности Σ. Тогда

$$\iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial z} \cos(\mathbf{n},\ y) - \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\mathbf{n},\ z) \right) dS = \oint\limits_L U\, dx \qquad (4.20)$$

(аналогичные формулы получаются циклическими перестановками $x,\ y,\ z$). При этом $\cos(\mathbf{n},\ y) = \mathbf{nj}$, $\cos(\mathbf{n},\ z) = \mathbf{nk}$ (косинус угла между вектором нормали $\mathbf{n}$ и осью y, соответственно осью z). Из (4.20) следует, что $\iint\limits_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{V}\, d\mathbf{S} = \oint\limits_L \mathbf{V}\, d\mathbf{r}$ (*теорема Стокса*). Используя символ оператора Гамильтона, из (4.20) формально получим

$$\iint\limits_\Sigma d\mathbf{S} \times \nabla = \oint\limits_L d\mathbf{r}. \qquad (4.21)$$

Пример 13. $\iint\limits_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{V}\, d\mathbf{S} \equiv \iint\limits_\Sigma d\mathbf{S}\, (\nabla \times \mathbf{V}) = \iint\limits_\Sigma (d\mathbf{S} \times \nabla)\, \mathbf{V} = \oint\limits_L d\mathbf{r}\, \mathbf{V}.$

Пример 14. $\iint\limits_\Sigma d\mathbf{S} \times \operatorname{grad} U \equiv \iint\limits_\Sigma d\mathbf{S} \times \nabla U = \oint\limits_L d\mathbf{r}\, U.$

4.2.2.11. Определение векторного поля по его источникам и вихрям. Пусть G – пространственная область, которая вместе с любой замкнутой кусочно гладкой кривой содержит некоторую двустороннюю кусочно гладкую поверхность, опирающуюся на этот контур. Гладкое векторное поле $\mathbf{E}$ тогда и только тогда является *безвихревым* в области G, т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, когда в G существует функция U такая, что $\mathbf{E} = \operatorname{grad} U$ (U – потенциал поля, см. 4.2.2.4).

Поля без источников (соленоидальные). Пусть G – пространственная область, которая вместе с любой замкнутой поверхностью содержит и ограниченное ею тело. Гладкое векторное поле $\mathbf{H}$ тогда и только тогда является *соленоидальным* в области G, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, когда в G существует векторное поле $\mathbf{A}$ такое, что $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ – векторный потенциал поля).

Источники и вихри. Надо найти векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ в ограниченной области G с заданными источниками $\rho(\mathbf{r})$ и вихрями $\mathbf{w}(\mathbf{r})$, т. е. в области G решить систему уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \rho(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{w}(\mathbf{r}).$$

Эта задача решается однозначно, если вдоль границы заданы значения $\mathbf{Vn}$ ($\mathbf{n}$ – вектор нормали), т. е. на границе ∂G области G

$$\mathbf{Vn} = f(\mathbf{r});$$

при этом должны выполняться следующие дополнительные условия:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \iiint\limits_G \rho\, dv = \oiint\limits_{\partial G} f\, d\mathbf{S}.$$

В предположении, что функции ρ, w_x, w_y, w_z обладают в G непрерывными и ограниченными первыми частными производными, а граница ∂G является достаточно гладкой, решение ищется следующим образом:

1) Найти поле $\mathbf{V}_1$, для которого в области G

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_1 = \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}.$$

Условие $\mathbf{V}_1 = \operatorname{grad} U$ приводит к уравнению $\Delta U = \rho$ с частным решением

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_G \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dx'\,dy'\,dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

при этом $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$. Если под ρ понимают плотность массы, то $U(\mathbf{r})$ представляет собой потенциал размещения этой массы, а $\mathbf{V}_1 = \operatorname{grad} U$ – соответствующую силу. Если под ρ понимают плотность зарядов, размещенных в вакууме, то U/ε_0 (ε_0 – диэлектрическая постоянная) – электрический потенциал, создаваемый ρ, и $\mathbf{E} = \operatorname{grad}\dfrac{U}{\varepsilon_0} \equiv \dfrac{\mathbf{V}_1}{\varepsilon_0}$ – соответствующая напряженность электрического поля.

2) Найти поле $\mathbf{V}_2$, для которого в области G

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_2 = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{V}_2 = \mathbf{w}.$$

Условие $\mathbf{V}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ приводит к уравнению $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{w}$, причем $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Частное решение:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_G \frac{\mathbf{w}(\mathbf{r}')\,dx'\,dy'\,dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (4.22)$$

Если под $\mathbf{w}$ понимают вектор плотности тока зарядов, то $\mathbf{V}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ является полем напряженности магнитного поля. Равенство (4.22) дает требуемое решение в предположении, что $\mathbf{w}$ равно нулю вне данной области G. Если это не имеет места, то $\mathbf{w}$ нужно продолжить на область G_1, охватывающую G, так, чтобы: а) $\mathbf{wn}$ было непрерывно на ∂G; б) $\mathbf{wn} = 0$ на ∂G_1; в) $\operatorname{div}\mathbf{w} = 0$ в слое $G_1\setminus G$. Тогда в равенстве (4.22) нужно интегрировать по области G_1.

3) Найти поле $\mathbf{V}_3$, для которого в области G

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_3 = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{V}_3 = 0,$$

а на границе ∂G выполняется соотношение

$$\mathbf{V}_3\mathbf{n} = f^*(M) = f - \mathbf{V}_1\mathbf{n} - \mathbf{V}_2\mathbf{n}.$$

Замена $\mathbf{V}_3 = \operatorname{grad}\Psi$ приводит ко второй краевой задаче теории потенциалов:

$$\Delta\Psi = 0 \text{ в области } G;$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} \equiv \mathbf{n}\operatorname{grad}\Psi = f^* \quad \text{на границе } \partial G.$$

Искомое поле $\mathbf{V}$ получается тогда как сумма $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

4.2.2.12. Диады (тензоры II ранга). Диады находят применение, например, в теории упругости. Их часто обозначают так же, как тензоры (тензор деформаций, тензор напряжений).

Линейные векторные функции. Под линейной векторной функцией $\Phi\mathbf{V}$ понимают отображение, которое каждому вектору $\mathbf{V}$ ставит в соответствие некоторый вектор $\mathbf{V}' = \Phi\mathbf{V}$; при этом

$$\Phi(c\mathbf{V}) = c\Phi\mathbf{V}, \quad \Phi(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \Phi\mathbf{V}_1 + \Phi\mathbf{V}_2.$$

Если рассматривать вращение всего пространства вокруг оси, которая имеет направление единичного вектора $\mathbf{n}$, на угол φ (рис. 4.50), то в первом приближении (φ или $|\mathbf{r}|$ мало)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \varphi\mathbf{n}\times\mathbf{r} + \ldots$$

При этом $\Phi\mathbf{r} = \varphi\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ – линейная векторная функция (*бесконечно малый поворот*). Каждую линейную векторную функцию можно представить в виде

$$\Phi\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i(\mathbf{b}_i\mathbf{V}) \qquad (4.23)$$

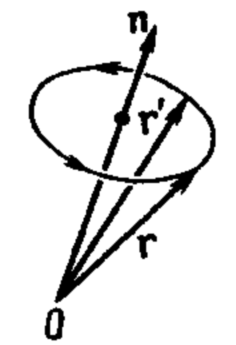


Рис. 4.50

с постоянными векторами $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – три линейно независимых вектора, то под *координатами* линейной векторной функции $\Phi\mathbf{V}$ относительно этого базиса понимают числа

$$a_i^j = \mathbf{e}^j\Phi\mathbf{e}_i \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

($\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ – взаимные для $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ векторы; ср. 4.2.1.3). С использованием координат $\Phi\mathbf{V}$ представляется в виде

$$\Phi\mathbf{V} = \Phi\left(\sum_{i=1}^{3}V^i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}V^ia_i^j\right)\mathbf{e}_j. \qquad (4.24)$$

Для построения конкретных линейных векторных функций имеется три возможности:

а) Инвариантное (независимое от координатной системы) построение при помощи геометрических или физических величин (например, бесконечно малый поворот (4.23), тензор деформаций, тензор напряжений).

б) В фиксированной системе координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задаются числа a_i^j и $\Phi\mathbf{V}$ определяется формулой (4.24); при переходе к другой системе координат величины a_i^j преобразуются, как простой ковариантный или контравариантный тензор 2-го порядка.

в) В каждой системе координат задаются числа a_i^j, которые преобразуются так же, как и в б), и $\Phi\mathbf{V}$ определяется по формуле (4.24).

Диады. Для того чтобы удобнее было вычислять линейные векторные функции, вводят формально *диадное произведение* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с обоими дистрибутивными свойствами:

$$(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b} = \alpha_1(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}) + \alpha_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$
$$\mathbf{a}\cdot(\beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2) = \beta_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1) + \beta_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2);$$

множители в произведении $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ нельзя менять местами. Далее формально определяются правила:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{bc})^*), \qquad \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{ca})\,\mathbf{b}, \qquad (4.25)$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^* = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}), \qquad (4.26)$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}), \qquad \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}, \qquad (4.27)$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) = (\mathbf{bc})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}). \qquad (4.28)$$

Под диадой понимают конечную сумму диадных

---

*) ($\mathbf{bc}$) – скалярное произведение (см. 4.2.1.3). Умножение формального диадного произведения $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ на вектор дает некоторый вектор.

произведений

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i.$$

Каждой диаде Φ можно приписать линейную векторную функцию:

$$\Phi \mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i (\mathbf{b}_i \mathbf{V})$$

(ср. (4.25)). Две диады Φ, Ψ считаются равными тогда и только тогда, когда $\Phi\mathbf{V} = \Psi\mathbf{V}$ для любых векторов **V**. Под $\mathbf{V}\Phi$ мы понимаем линейную векторную функцию

$$\mathbf{V}\Phi = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i.$$

Если посредством равенства

$$\Phi^* = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i)^* = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_i)$$

определить диаду Φ^*, сопряженную с Φ, то можно записать $\mathbf{V}\Phi = \Phi^*\mathbf{V}$. Всегда $\Phi^{**} = \Phi$. Диаде

$$\mathbf{c} \times \Phi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c} \times (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{b}_i$$

(ср. (4.27)) ставится в соответствие линейная векторная функция

$$(\mathbf{c} \times \Phi)\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_i)(\mathbf{b}_i \mathbf{V}).$$

Если

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{d}_j$$

— другая диада, то произведению

$$\Phi\Psi = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i)(\mathbf{c}_j \cdot \mathbf{d}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j)(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{d}_j)$$

(ср. (4.28)) соответствует линейная векторная функция

$$(\Phi\Psi)\mathbf{V} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{a}_i (\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j)(\mathbf{d}_j \mathbf{V}).$$

Всегда $(\Phi\Psi)\mathbf{V} = \Phi(\Psi\mathbf{V})$.

Координатное представление диад. Если векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$, входящие в $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_k$, заданы в некоторой декартовой системе координат:

$$\mathbf{a}_k = (a_k)_x \mathbf{i} + (a_k)_y \mathbf{j} + (a_k)_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_k = (b_k)_x \mathbf{i} + (b_k)_y \mathbf{j} + (b_k)_z \mathbf{k},$$

то, согласно формальному перемножению и объединению подобных членов, имеем

$$\Phi = a_{xx}\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_{xy}\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_{xz}\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_{yx}\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_{yy}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_{yz}\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_{zx}\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_{xy}\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_{zz}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}. \quad (4.29)$$

Новые числа $a_{xx}, a_{xy}, \ldots, a_{zz}$ называются *декартовыми координатами диады* Φ. Если в более общем случае

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^{3} (a_k)^j \mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{b}_k = \sum_{i=1}^{3} (b_k)_i \mathbf{e}^i,$$

то после формального перемножения и объединения соответствующих членов получаем

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{3} a_i^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i.$$

Линейная векторная функция, соответствующая этой диаде, имеет вид

$$\Phi\mathbf{V} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i^j \mathbf{e}_j (\mathbf{e}^i \mathbf{V}) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} V^i a_i^j \right) \mathbf{e}_j.$$

Числа a_i^j называются *координатами* Φ относительно базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Они совпадают с координатами линейной векторной функции $\Phi\mathbf{V}$. В частном случае декартовых координат ($\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = \mathbf{k}$) справедливы равенства $a_1^1 = a_{xx}$, $a_2^1 = a_{xy}$, $a_3^1 = a_{xz}$ и т. д. Под *следом* Φ понимают число

$$\operatorname{Sp}\Phi = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = a_{xx} + a_{yy} + a_{zz},$$

которое не зависит от выбора декартовой системы координат (инвариант).

Симметрические и антисимметрические диады. Диада Φ называется *симметрической*, если $\Phi = \Phi^*$; Φ называется *антисимметрической*, если $\Phi = -\Phi^*$. В декартовых координатах (см. (4.29)) симметричность диады означает, что $a_{xy} = a_{yx}$, $a_{xz} = a_{zx}$, $a_{yz} = a_{zy}$; антисимметричность диады означает, что $a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = 0$, $a_{xy} = -a_{yx}$, $a_{xz} = -a_{zx}$, $a_{yz} = -a_{zy}$. Каждую диаду Φ можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_v + \Phi_u;$$

при этом $\Phi_c = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)$ — симметрическая диада и $\Phi_a = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi^*)$ — антисимметрическая диада.

Чтобы геометрически осмыслить симметрическую диаду, поставим в соответствие каждой симметрической диаде уравнение $2F = \mathbf{r}\Phi\mathbf{r} = 1$, или, в декартовых координатах, уравнение

$$a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + 2a_{xy}xy + 2a_{xz}xz + 2a_{yz}yz = 1,$$

которое является уравнением поверхности 2-го порядка (эллипсоид, гиперболоид, цилиндрическая поверхность) с центром в точке (0, 0, 0). Эта поверхность называется *тензорной поверхностью*. Ее уравнение принимает особенно простой вид (*нормальная форма симметрической диады*):

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1,$$

если совместить оси системы координат с главными осями тензорной поверхности. В декартовой системе координат Φ имеет вид

$$\Phi = \lambda_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

Линейная векторная функция, соответствующая этой диаде, имеет вид

$$\Phi\mathbf{r} = \lambda_1 x\mathbf{i} + \lambda_2 y\mathbf{j} + \lambda_3 z\mathbf{k}.$$

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ (тензорная поверхность — эллипсоид), то вектор $\Phi\mathbf{r}$ получается из $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ путем растяжения в направлении трех координатных осей, или, что то же самое, в направлении главных осей поверхности. Собственные значения λ_i определяются в результате реше-

ния уравнения третьей степени относительно λ:

$$\begin{vmatrix} a_{xx}-\lambda & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{xy} & a_{yy}-\lambda & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{zy} & a_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Главные оси $\mathbf{h}_i$ удовлетворяют уравнению $\Phi\mathbf{h}_i = \lambda_i\mathbf{h}_i$.

Чтобы дать геометрическое пояснение антисимметрической диады, запишем произвольную антисимметрическую диаду в декартовых координатах в виде

$$\Phi = 0\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} - a_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + a_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} - a_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} - a_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_x\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Соответствующая ей линейная векторная функция имеет вид

$$\Phi\mathbf{r} = \mathbf{a}\times r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Если положить $\mathbf{a} = \varphi\mathbf{n}$ и считать, что φ мало, то $\Phi\mathbf{r}$ будет представлять собой бесконечно малый поворот.

Векторный градиент. В 4.2.2.8 был рассмотрен градиент векторного поля $(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{V}$. *Векторным градиентом* Φ векторного поля $\mathbf{V}$ называется диада, для которой при постоянном векторе $\mathbf{a}$ справедливо соотношение

$$\Phi\mathbf{a} = (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{V}.$$

Пишут: $\Phi = \mathrm{grad}\cdot\mathbf{V}$; в декартовых координатах $(\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k})$

$$\mathrm{grad}\cdot\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + \frac{\partial V_x}{cy}\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Так как координаты $\dfrac{\partial V_x(M)}{\partial x}, \ldots$ этой диады зависят от точки M, то в каждой точке M находится своя диада (поле диад). Для $(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{V}$ получается

$$(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{V} = \mathbf{a}\,(\mathrm{grad}\cdot\mathbf{V}) = \left(a_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(a_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + a_y\frac{\partial V_y}{\partial y} + a_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(a_x\frac{\partial V_z}{\partial x} + a_y\frac{\partial V_z}{\partial y} + a_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}. \quad (4.30)$$

Диады Φ_c, Φ_a $(\Phi = \Phi_c + \Phi_a)$, соответствующие $\Phi = \mathrm{grad}\cdot\mathbf{V}$, имеют вид

$$\Phi_c = \frac{\partial V_x}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k};$$

$$\Phi_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}.$$

При помощи этих диад можно записать разложение векторного поля в первом приближении в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathrm{grad})\,\mathbf{V}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\Phi_c + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\Phi_a; \quad (4.31)$$

Φ_c, Φ_a вычисляются в точке $\mathbf{r}_0$. Далее,

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\Phi_a = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \quad (4.32)$$

Механический смысл. Пусть при деформации упругой среды точка $M(\mathbf{r})$ перемещается в $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{V}(\mathbf{r})$ — вектор сдвига). Если исследовать $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ в малой окрестности $\mathbf{r}$, то соотношение (4.31) показывает, что деформация состоит из переноса $(\mathbf{V}(\mathbf{r}_0))$, растяжения $((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\Phi_c)$ и бесконечно малого поворота $((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\Phi_a)$, причем ось поворота имеет направление $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)$, а угол поворота — величину $\dfrac{1}{2}\,|\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)|$. Величина Φ_c называется *тензором деформаций*. Наряду с ним важную роль играет *тензор напряжений* Ψ. Пусть задана упругая среда, находящаяся под воздействием сил напряжения. Для поддержания равновесия выделенного элемента с объемом v (рис. 4.51) в каждом малом элементе нужно к каждому элементарному кусочку его границы с нормалью $\mathbf{n}$, направленной во внешнюю сторону, приложить силу, имеющую величину

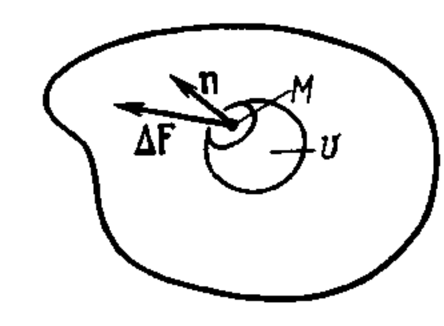


Рис. 4.51

$$\Delta\mathbf{F} = (\Psi\mathbf{n})\,\Delta S \equiv \Psi\,\Delta\mathbf{S}. \quad (4.33)$$

Диада Ψ (тензор напряжений) симметрична и зависит от поверхностной точки M. Поверхностные силы, действующие на v, равны, таким образом,

$$\overline{F} = \oiint \Psi\, dS.$$

Диада Ψ (тензор напряжений) симметрична и зависит от поверхностной точки M. Поверхностные силы, действующие на v, равны, таким образом, $\oiint \Psi\, d\mathbf{S}$.

Дивергенция и ротор. Аналогично 4.2.2.6, 4.2.2.7 определяются для диад *дивергенция* и *ротор*:

$$\mathrm{Div}\,\Phi = \lim_{v\to 0}\frac{\oiint d\mathbf{S}\,\Phi}{v}, \quad (4.34)$$

$$\mathrm{Rot}\,\Phi = \lim_{v\to 0}\frac{\oiint d\mathbf{S}\times\Phi}{v}. \quad (4.35)$$

Если Φ имеет в декартовых координатах представление (4.29), то

$$\mathrm{Div}\,\Phi = \left(\frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zx}}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zy}}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z}\right)\mathbf{k}; \quad (4.36)$$

$$\operatorname{Rot}\Phi=\left(\frac{\partial a_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial a_{yx}}{\partial z}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_{zy}}{\partial y}-\frac{\partial a_{yy}}{\partial z}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial a_{zz}}{\partial y}-\frac{\partial a_{yz}}{\partial z}\right)\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+\left(\frac{\partial a_{xx}}{\partial z}-\frac{\partial a_{zx}}{\partial x}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial a_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial a_{zy}}{\partial x}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+\left(\frac{\partial a_{xz}}{\partial z}-\frac{\partial a_{zz}}{\partial x}\right)\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+$$
$$+\left(\frac{\partial a_{yx}}{\partial x}-\frac{\partial a_{xx}}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial a_{xy}}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial a_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial a_{xz}}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}. \quad (4.37)$$

Если Φ представить в виде $\Phi=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{i}+\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{j}+\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{k}$, то получим, что

$$\operatorname{Div}\Phi=(\operatorname{div}\mathbf{a}_1)\,\mathbf{i}+(\operatorname{div}\mathbf{a}_2)\,\mathbf{j}+(\operatorname{div}\mathbf{a}_3)\,\mathbf{k}, \quad (4.38)$$

$$\operatorname{Rot}\Phi=(\operatorname{rot}\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{i}+(\operatorname{rot}\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{j}+(\operatorname{rot}\mathbf{a}_3)\,\mathbf{k}. \quad (4.39)$$

Вычисление диад при помощи оператора Гамильтона. Используя оператор ∇ (см. 4.2.2.2), можно формально записать:

$$\operatorname{grad}\cdot\mathbf{V}=\nabla\cdot\mathbf{V}, \quad (4.40)$$

$$\operatorname{Div}\Phi=\nabla\Phi, \quad (4.41)$$

$$\operatorname{Rot}\Phi=\nabla\times\Phi. \quad (4.42)$$

Формулы (4.17) и (4.21) также справедливы для диад.

Пример 15.

$$\iiint_G \operatorname{Div}\Phi\,dv=\iiint_G dv\,(\nabla\Phi)=\oiint_{\partial G} d\mathbf{S}\,\Phi \quad (4.43)$$

(*теорема Гаусса – Остроградского*).

Пример 16.

$$\iiint_G \operatorname{Rot}\Phi\,dv=\iiint_G dv\,(\nabla\times\Phi)=\oiint_{\partial G} d\mathbf{S}\times\Phi. \quad (4.44)$$

Пример 17.

$$\iint_\Sigma d\mathbf{S}\operatorname{Rot}\Phi=\iint_\Sigma d\mathbf{S}\,(\nabla\times\Phi)=\iint_\Sigma (d\mathbf{S}\times\nabla)\,\Phi=\oint_C d\mathbf{r}\,\Phi \quad (4.45)$$

(*теорема Стокса*).

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В дифференциальной геометрии кривые линии (плоские и пространственные) и поверхности изучаются методами дифференциального исчисления; поэтому функции, входящие в уравнения, предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные до того порядка, который необходим по характеру исследуемого вопроса. Это условие может нарушаться только для отдельных особых точек кривой или поверхности (например, для точек разрыва или излома кривой). При изучении геометрических образов по их уравнениям различают свойства, *зависящие* от выбора системы координат (например, пересечение кривой или поверхности с осями координат, наклон касательной, точки максимума или минимума и т. п.), и инвариантные свойства, не изменяющиеся при преобразовании системы координат и принадлежащие собственно кривой или поверхности (например, точки перегиба, вершины кривой, кривизна, кручение и т. п.). С другой стороны, различают локальные свойства, относящиеся к весьма малым частям кривой или поверхности (например, кривизна, линейный элемент поверхности, угол между кривыми в точке пересечения), и свойства кривой или поверхности в целом (например, число вершин, длина замкнутой кривой, площадь замкнутой поверхности). Локальные свойства изучают обычно при помощи формулы Тейлора.

4.3.1. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

4.3.1.1. Способы задания плоских кривых. Уравнение плоской кривой. Плоскую кривую аналитически можно задать одним из следующих способов:

в декартовых координатах:

в явном виде:

$$y=y(x),\quad x\in\langle a,b\rangle; \quad (4.46)$$

в неявном виде:

$$F(x,y)=0,\quad (x,y)\in G; \quad (4.47)$$

в параметрическом виде:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in\langle\alpha,\beta\rangle; \quad (4.48)$$

в полярных координатах:

$$\rho=\rho(\varphi),\quad \varphi\in\langle\alpha,\beta\rangle, \quad (4.49)$$

где $\langle a,b\rangle$ – промежуток на числовой прямой, G – область на плоскости.

Пример 1 (рис. 4.52). а) $y=\sin x$; б) $x=t^2$, $y=t^3$; в) $\rho=a\varphi$, $a>0$.

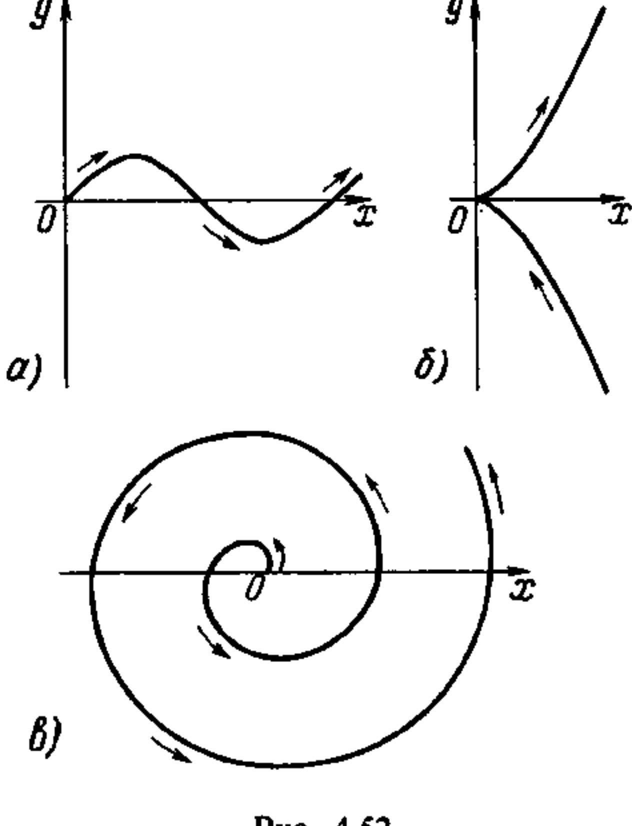


Рис. 4.52

Положительное направление кривой соответствует возрастанию x (см. (4.46)), t (см. (4.48)), φ (см. (4.49)).

Переход от неявного вида к явному. Если (x_0, y_0) – точка кривой, т. е. $F(x_0, y_0)=0$, и $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, то уравнение $F(x,y)=0$ в некоторой малой окрестности точки (x_0,y_0) можно однозначно разрешить относительно y: $y=y(x)$. Кроме того, справедливы формулы

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))},$$
$$y''=\frac{-(F'_y)^2F''_{xx}+2F'_xF'_yF''_{xy}-(F'_x)^2F''_{yy}}{(F'_y)^3}. \quad (4.50)$$

Если $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то можно разрешить уравнение $F(x, y) = 0$ относительно x: $x = x(y)$; тогда в формулах (4.50) следует поменять местами x и y. Если же $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$, то точка (x_0, y_0) называется *особой точкой* (*сингулярной точкой*) (см. 4.3.1.3).

Переход от параметрического вида к явному. Обозначим производные от $x(t)$, $y(t)$ через $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Если $\dot{x}(t_0) \neq 0$, то уравнение $x = x(t)$ можно разрешить в некоторой малой окрестности t_0 относительно t $(t = t(x))$. Тогда получим уравнение в явном виде: $y = f(x) = y(t(x))$. Справедливы равенства

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}, \qquad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}. \tag{4.51}$$

Если $\dot{y}(t_0) \neq 0$, то $y = y(t)$ можно разрешить относительно t $(t = t(y))$ и получить $x = g(y) = x(t(y))$; в этом случае в формулах (4.51) следует поменять местами x и y. При $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$ точка кривой, соответствующая значению $t = t_0$, называется *особой* (*сингулярной*) точкой (см. 4.3.1.3).

4.3.1.2. Локальные элементы плоской кривой. *Касательная* к кривой в точке M определяется как предельное положение секущей, проходящей через M и соседнюю точку N кривой, при условии, что N стремится к M (рис. 4.53).

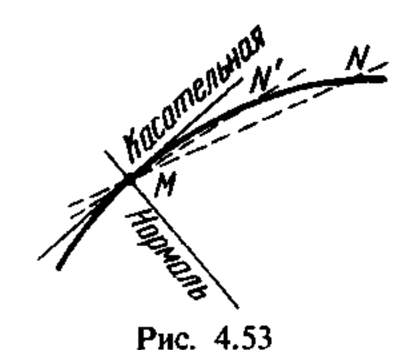


Рис. 4.53

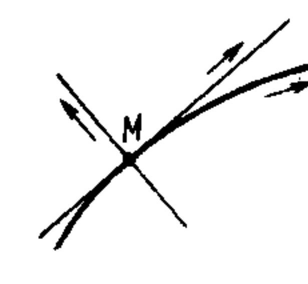


Рис. 4.54

Нормаль – прямая, перпендикулярная касательной в точке касания M. Направление на касательной и нормали выбирается так, как показано на рис. 4.54, т. е. положительное направление касательной указывает в сторону положительного направления кривой, а положительное направление нормали получается при повороте положительного направления касательной на 90° против часовой стрелки. Вектор касательной $\mathbf{t}$ (вектор нормали $\mathbf{n}$) представляет собой единичный вектор, совпадающий с положительным направлением касательной (направлением нормали):

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{i} + y'(x_0)\mathbf{j}}{\sqrt{1 + y'^2(x_0)}}, \qquad \mathbf{n} = \frac{-y'(x_0)\ \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + y'^2(x_0)}}.$$

Пример 2. Кривая $y = \sin x$; $y' = \cos x$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид $y - \sin x_0 = (x - x_0)\cos x_0$; в частности, при $x_0 = y_0 = 0$: $y = x$.

Пример 3. Кривая $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$ (окружность радиуса 5); $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$; так как $x_0^2 + y_0^2 = 25$, то $xx_0 + yy_0 = 25$; в частности, при $x_0 = 3$ и $y_0 = 4$: $3x + 4y = 25$.

Пример 4. Кривая $x = t^2$, $y = t^3$; $\dot{x} = 2t$, $\dot{y} = 3t^2$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0), где $x_0 = t_0^2$, $y_0 = t_0^3$, имеет вид $3t_0^2(x - x_0) - 2t_0(y - y_0) = 0$. Таким образом, $y = \frac{3t_0}{2}x - \frac{1}{2}t_0^3$ при $t_0 \neq 0$.

Для плоских кривых приняты следующие обозначения (рис. 4.55).

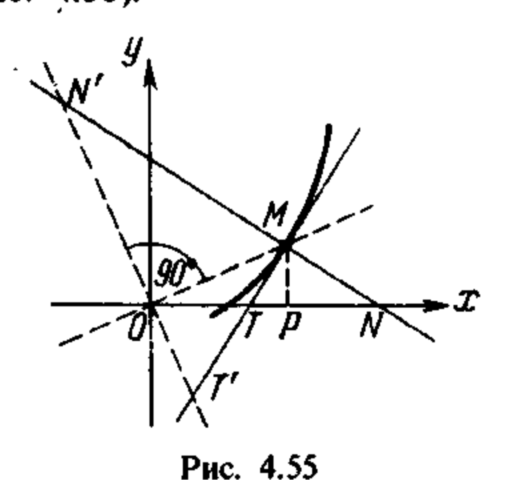


Рис. 4.55

а) В декартовых координатах:

$MT = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right|$ (*отрезок касательной*),

$MN = |y\sqrt{1 + y'^2}|$ (*отрезок нормали*),

$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|$ (*подкасательная*),

$PN = |yy'|$ (*поднормаль*).

б) В полярных координатах:

$MT' = \left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right|$ (*отрезок полярной касательной*),

$MN' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ (*отрезок полярной нормали*),

$OT' = \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right|$ (*полярная подкасательная*),

$ON' = |\rho'|$ (*полярная поднормаль*).

Угол φ *между двумя кривыми* $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в общей точке (x_0, y_0) равен углу между положительными направлениями касательных (измеренному против часовой стрелки) и может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2'(x_0) - y_1'(x_0)}{1 + y_1'(x_0)y_2'(x_0)} = \frac{\dot{x}_1(t_0)\dot{y}_2(\tilde{t}_0) - \dot{x}_2(\tilde{t}_0)\dot{y}_1(t_0)}{\dot{x}_1(t_0)\dot{x}_2(\tilde{t}_0) + \dot{y}_1(t_0)\dot{y}_2(\tilde{t}_0)}.$$

Таблица 4.5

Форма задания кривой	Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)	Уравнение нормали в точке (x_0, y_0)
(4.46)	$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$	$-y_0'(y - y_0) = x - x_0$
(4.47)	$(F_y')_0(y - y_0) + (F_x')_0(x - x_0) = 0$	$(F_x')_0(y - y_0) = (F_y')_0(x - x_0)$
(4.48)	$\frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{x - x_0}{\dot{x}_0}$	$\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) = 0$

Здесь $y_0' = y'(x_0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(t_0)$, $(F_y')_0 = F_y'(x_0, y_0)$ и т. д. (см. (4.50), (4.51)).

Длина дуги кривой $y = y(x)$ $(x = x(t),\ y = y(t))$ между точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 4.56)

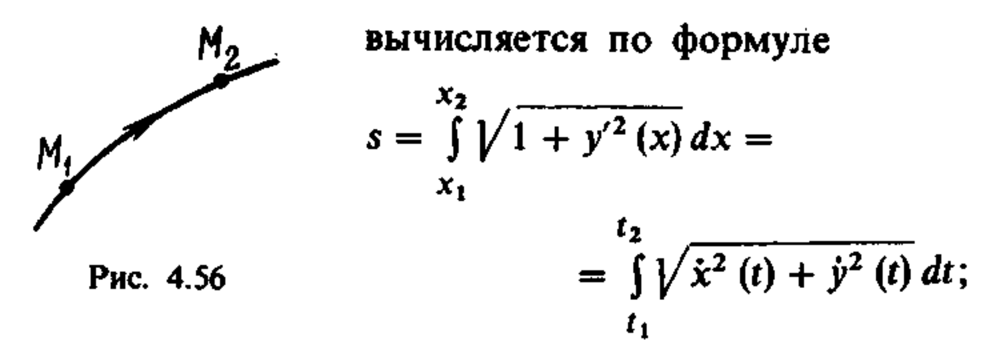


Рис. 4.56

вычисляется по формуле

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt;$$

здесь $x_i = x(t_i)$, $i = 1, 2$.

Дифференциалом длины дуги называется величина

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Этот дифференциал в первом приближении равен расстоянию между точками M_1 и M_2, когда эти точки находятся на достаточно близком расстоянии друг от друга. Для кривой $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах длина дуги равна

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi,$$

а дифференциал длины дуги составляет

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

Если через $\alpha(M)$ обозначить угол между положительным направлением оси x и положительным направлением касательной в точке M (измеренный против часовой стрелки), то *кривизна K кривой* в точке M определяется как предел

$$K = \lim_{N \to M} \frac{\delta}{|\overset{\frown}{MN}|}$$

(где $\delta = \alpha(N) - \alpha(M)$ – угол смежности, а $|MN|$ – длина дуги кривой между точками M и N; рис. 4.57). Для прямой имеем $K \equiv 0$. Чем больше $|K|$, тем сильнее изогнута кривая.

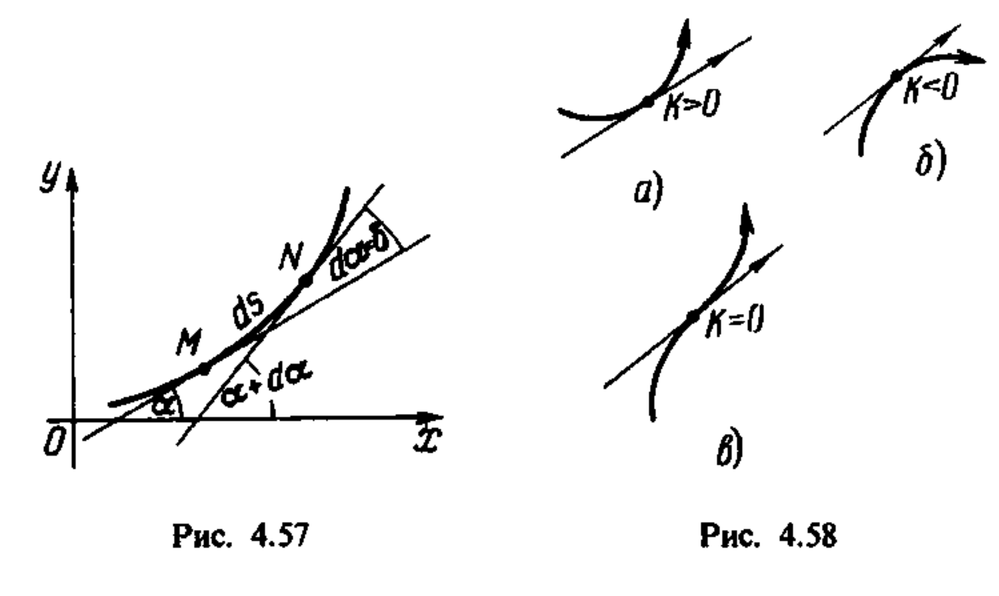


Рис. 4.57 Рис. 4.58

Представление о знаке K дает рис. 4.58.

Таблица 4.6

Способ задания кривой	Кривизна K в точке M
(4.46)	$K = \dfrac{y''(x)}{(1 + y'^2)^{3/2}}$
(4.47)	$K = \dfrac{-F_y'^2 F''_{xx} + 2F'_x F'_y F''_{xy} - F_x'^2 F''_{yy}}{(F_x'^2 + F_y'^2)^{3/2}}$
(4.48)	$K = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$
(4.49)	$K = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$

Пример 5. 1) $y = \operatorname{ch} x$, $K = 1/\operatorname{ch}^2 x$;
2) $x = t^2$, $y = t^3$, $K = \dfrac{6}{t(4 + 9t^2)^{3/2}}$;
3) $y^2 - x^2 - a^2 = 0$, $K = \dfrac{a^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;
4) $\rho = a\varphi$, $K = \dfrac{1}{a} \dfrac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$;
5) $y^2 + x^2 = a^2$, $K = 1/a$.

Кругом кривизны в точке M кривой называется предельное положение окружности, проходящей через точку M и две другие близкие точки N и P (рис. 4.59), когда N и P стремятся к M. Радиус этой окружности называется *радиусом кривизны* R. Справедливо равенство $R = 1/|K|$ (K – кривизна). Центр C круга кривизны называется *центром кривизны*.

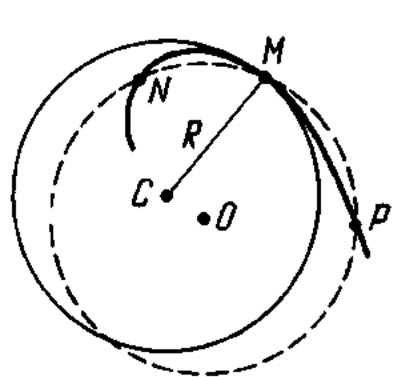


Рис. 4.59

4.3.1.3. Точки специального типа. Точка M кривой называется *точкой перегиба*, если касательная в точке M пересекает кривую (см. рис. 4.58, *в*), так что в точке перегиба $K = 0$, и если K меняет знак в точке, то это – точка перегиба. Чтобы найти точки, в которых $K = 0$, необходимо, согласно табл. 4.7, решить следующие уравнения:

$y = y(x)$: $\quad K = y''(x) = 0$,

$F(x, y) = 0$: $\quad K = F''_{xx}F_y'^2 - 2F'_xF'_yF''_{xy} + F''_yF_x'^2 = 0$, $\quad F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$;

$x = x(t)$, $y = y(t)$: $\quad K = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 0$, $\quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$;

$\rho = \rho(\varphi)$: $\quad K = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$, $\quad \rho^2 + \rho'^2 \neq 0$.

Затем достаточно проверить, меняет ли K знак при прохождении через найденную точку.

Таблица 4.7

Способ задания кривой	Координаты ξ, η центра C кривизны
(4.46)	$\xi = x - \dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''}$, $\quad \eta = y + \dfrac{x'(1 + y'^2)}{y''}$
(4.47)	$\xi = x - \dfrac{F'_x(F_x'^2 + F_y'^2)}{F_y^2F''_{xx} - 2F'_xF'_yF''_{xy} + F_x'^2F''_{yy}}$, $\quad \eta = y - \dfrac{F'_y(F_x'^2 + F_y'^2)}{F_y'^2F''_{xx} - 2F'_xF'_yF''_{xy} + F_x'^2F''_{yy}}$
(4.48)	$\xi = x - \dfrac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$, $\quad \eta = y + \dfrac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$
(4.49)	$\xi = \rho\cos\varphi - \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$, $\quad \eta = \rho\sin\varphi - \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\sin\varphi - \rho'\cos\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$

Пример 6. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y'' = -\dfrac{2(1 - 3x^2)}{(1 + x^2)^3}$. Тогда $y = 0$ при $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}$. При переходе через каждую из точек $x_{1,2}$ величина y'' меняет знак; следовательно, существуют две точки перегиба: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$.

Пример 7. $F \equiv x^2 - y^2 - a^2 = 0$ (гипербола); $F'_x = 2x$, $F'_y = -2y$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{xx} = -F''_{yy} = 2$; $K \equiv 8y^2 - 8x^2$. Уравнения $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ несовместны при $a \neq 0$; таким образом, у гиперболы нет точек перегиба.

Пример 8. $x = a\left(t - \frac{1}{2}\sin t\right)$, $y = a\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right)$ (*укороченная циклоида*); $\dot{x} = a\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right)$, $\dot{y} = \frac{a}{2}\sin t$, $\ddot{x} = \frac{a}{2}\sin t$, $\ddot{y} = \frac{a}{2}\cos t$, $K \equiv \frac{a^2}{4}(2\cos t - 1)$; точки перегиба: $t_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Пример 9. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, $K = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1)$; $\varphi = \frac{1}{2}$ – точка перегиба.

Точки кривой, в которых кривизна K имеет экстремум (максимум или минимум), называются

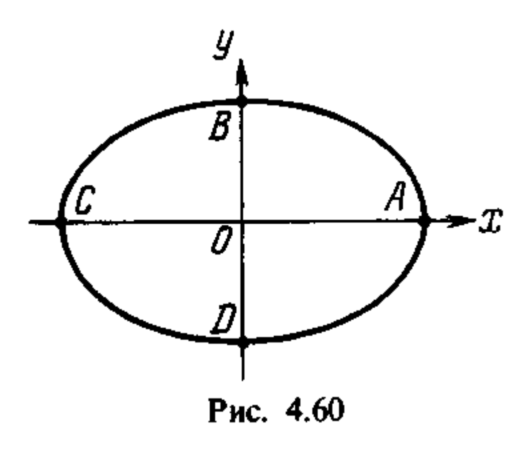


Рис. 4.60

вершинами; например, эллипс (рис. 4.60) имеет вершины в точках A, B, C, D.

Особые точки кривых в параметрическом представлении. Если кривая задана в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$, то, согласно 4.3.1.1, задание кривой в окрестности t_0 в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$ не всегда осуществимо. Поведение кривой в окрестности t_0 исследуют, используя разложение по формуле Тейлора ($x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$):

$$x = x_0 + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}(t_0)(t - t_0)^3 + \ldots,$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2!}\ddot{y}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{y}(t_0)(t - t_0)^3 + \ldots$$

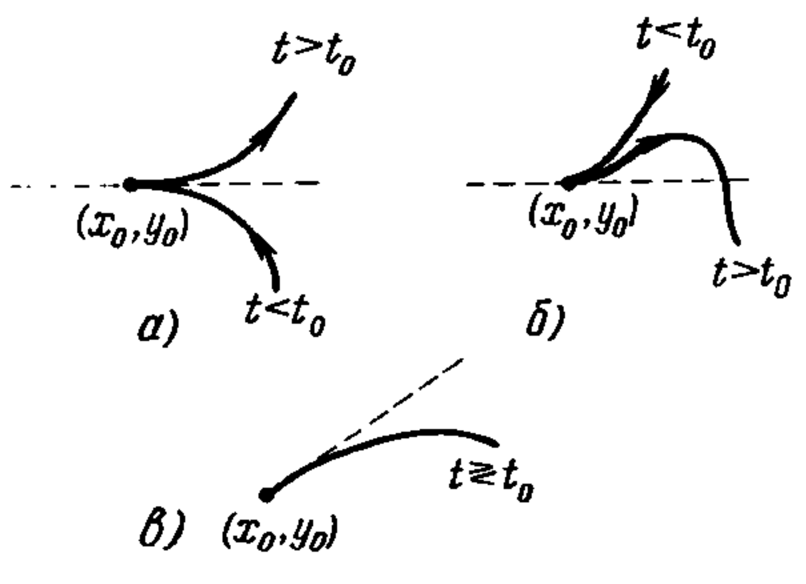


Рис. 4.61

Пример 10. $x = x_0 + (t - t_0)^2 + \ldots$, $y = y_0 + (t - t_0)^3 + \ldots$ (*точка возврата*, рис. 4.61, *а*).

Пример 11. $x = x_0 + (t - t_0)^2 + \ldots$, $y = y_0 + (t - t_0)^4 - (t - t_0)^5 + \ldots$ (*точка возврата*, рис. 4.61, *б*).

Пример 12. $x = x_0 + (t - t_0)^2 + (t - t_0)^4 + \ldots$, $y = y_0 + (t - t_0)^2 - (t - t_0)^4 + \ldots$ (кривая кончается в точке (x_0, y_0); рис. 4.61, *в*). Для вычисления наклона касательной необходимо найти предел

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}.$$

Для упрощения исследования часто рекомендуется сделать замену переменных $\tau = t - t_0$, $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$.

Особые точки кривых, заданных в неявном виде. Если кривая задана в виде $F(x, y) = 0$ и $F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$, то согласно 4.3.1.1, в окрестности точки (x_0, y_0) задание кривой в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$ может оказаться невозможным. В этом случае осуществляют разложение по формуле Тейлора в окрестности (x_0, y_0). Разложение до членов 2-го порядка имеет вид

$$F \equiv a(y - y_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(x - x_0)^2 + \ldots = 0,$$

где $a = F''_{yy}(x_0, y_0)$, $b = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $c = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $\Delta = ac - b^2$.

Если не все коэффициенты a, b, c равны нулю, то решение квадратного уравнения $a(y - y_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(x - x_0)^2 = 0$ дает уравнения касательных к кривой в точке (x_0, y_0).

Случай 1. $a \neq 0$. Уравнения касательных имеют вид

$$y - y_0 = (-b \pm \sqrt{-\Delta})\frac{x - x_0}{a} \equiv k_{\pm}(x - x_0).$$

Если $\Delta > 0$, то $y = y_0$, $x = x_0$ – единственное решение ((x_0, y_0) – *изолированная точка* кривой; рис. 4.62, *а*). Если $\Delta < 0$, то через (x_0, y_0) проходят

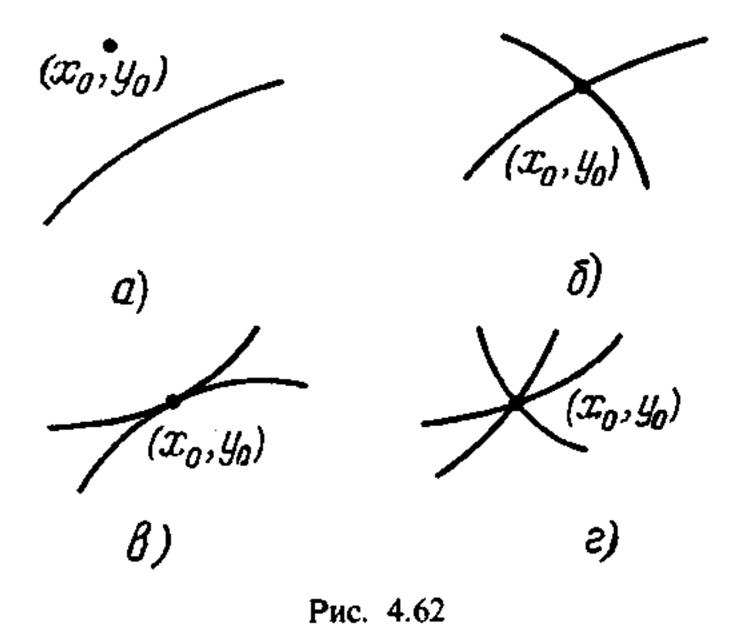


Рис. 4.62

две ветви кривой с наклонами касательных, равными $k_{\pm}$ ((x_0, y_0) – *двойная точка*; рис. 4.62, *б*).

Если $\Delta = 0$, то соотношениями $x - x_0 = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha$, $y - y_0 = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = -b/a$ вводится новая система координат (сдвиг начала координат в точку (x_0, y_0) и поворот на угол α). Тогда получим

$$F \equiv (a + c)\eta^2 + \ldots = 0.$$

При рассмотрении этого уравнения нужно принимать во внимание члены более высокого (выше второго) порядка. Здесь могут встретиться: *изолированная точка* (см. далее пример 14), *точка возврата* (пример 15), *точка самоприкосновения* (рис. 4.62, *в*, пример 16).

Случай 2. $a = 0$, $c \neq 0$ (сводится к случаю 1, если поменять местами x и y).

Случай 3. $a = 0$, $c = 0$, $b \neq 0$. Имеются две ветви кривой с касательными $y = y_0$, $x = x_0$ (*двойная точка*). Преобразованием координат $x - x_0 = \eta - \xi$, $y - y_0 = \eta + \xi$ получаем, что $F \equiv 2b(\eta^2 - \xi^2) + \ldots = 0$ (случай 1).

Если все коэффициенты a, b, c равны нулю, то следует рассмотреть члены 3-го или n-го по-

рядка разложения по формуле Тейлора. В этом случае могут встретиться *точки кратности n* (рис. 4.62, *г*).

Пример 13. $F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ (*лемниската*):

$$F'_x = 4x(x^2 + y^2 - 1), \qquad F'_y = 4y(x^2 + y^2 + 1).$$

Система $F'_x = F'_y = 0$ имеет три решения: (0, 0), (1, 0), (−1, 0), но только (0, 0) удовлетворяет условию $F = 0$. Так как $a \equiv F''_{yy}(0, 0) = 4$, $b = 0$, $c = -4$, $\Delta = ac - b^2 = -16 < 0$, то (0, 0) – двойная точка; уравнения касательных: $y = \pm x$.

Пример 14. $F(x, y) = y^2 + x^4 = 0$; кривая состоит только из изолированной точки (0, 0).

Пример 15. $F(x, y) \equiv y^2 - x^3 = 0$, $y = \pm\sqrt{x^3}$; кривая определена только при $x \geqslant 0$; (0, 0) – точка возврата с горизонтальной касательной.

Пример 16. $F(x, y) \equiv y^2 - x^4 = 0$, $y = \pm x^2$; обе ветви кривой касаются друг друга в (0, 0) – точке самоприкосновения.

Особые точки кривых, заданных в полярных координатах. Пусть мы имеем $\rho = f(\varphi)$. Если $\lim f(\varphi) = 0$ при $\varphi \to +\infty$ или $\varphi \to -\infty$, то $\rho = 0$ – *асимптотическая точка* (вокруг

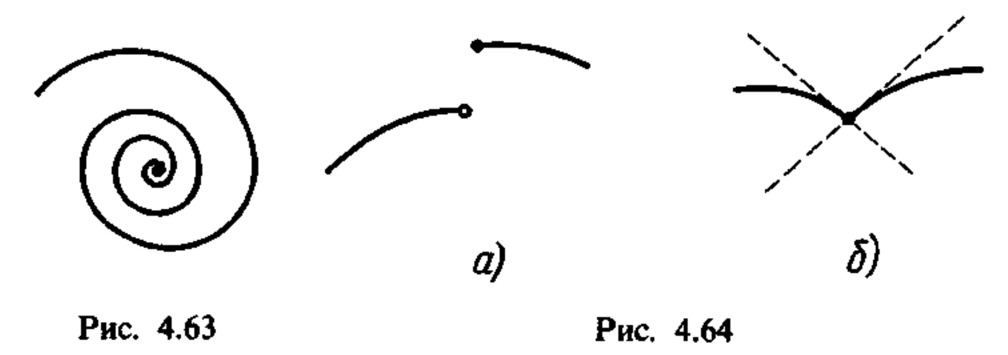


Рис. 4.63 Рис. 4.64

этой точки кривая закручивается бесконечное число раз, неограниченно приближаясь к ней; рис. 4.63).

Пример 17. $\rho = ae^{\varphi}$, $\lim\limits_{\varphi \to -\infty} ae^{\varphi} = \dot{0}$ (*логарифмическая спираль*).

Кривая, заданная выражением $y = f(x)$, имеет при $x = x_0$ *точку разрыва* (рис. 4.64, *а*), если функция $f(x)$ в этой точке испытывает скачок. В точках разрыва первой производной кривая скачком меняет свое направление (*точка излома*; рис. 4.64, *б*).

Пример 18. $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ ($x = 0$ – *точка разрыва*).

Пример 19. $f = |x|$, $f' = -1$ при $x < 0$, $f' = +1$ при > 0 ($x = 0$ – *точка излома*).

В общем же случае все точки, в которых кривая ведет себя так же, как на рис. 4.61–4.64 (независимо от способа представления), называются *особыми точками кривой*. Обратим внимание на то, что в случае параметрического задания кривой определение двойных точек очень затруднительно, так как двойной точке соответствуют различные значения параметра. В этом случае удобно перейти к неявной форме задания.

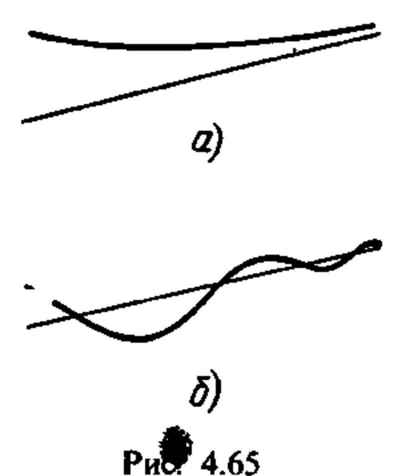


Рис. 4.65

4.3.1.4. Асимптоты. Если кривая какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта часть (бесконечная ветвь кривой) может иногда иметь асимптоту – прямую, к которой кривая неограниченно приближается или с одной стороны (рис. 4.65, *а*), или пересекая ее (рис. 4.65, *б*).

Параметрический вид. Если кривая задана в параметрическом виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то для нахождения асимптот ищут значения $t = t_i$ такие, что $x(t) \to \infty$ или $y(t) \to \infty$ при $t \to t_i \pm 0$.

В случае, если

1) $x(t) \to \infty$, но $y(t) \to a \neq \infty$, прямая $y = a$ является горизонтальной асимптотой;

2) $y(t) \to \infty$, но $x(t) \to a \neq \infty$, прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой;

3) $y(t) \to \infty$, $x(t) \to \infty$, необходимо вычислить

$$k = \lim_{t \to t_i} \frac{y(t)}{x(t)}, \qquad b = \lim_{\tau \to t_i} (y(t) - kx(t));$$

если оба предела существуют, то кривая имеет асимптоту $y = kx + b$.

Явный вид. Если кривая задана уравнением вида $y = y(x)$ и существует число a такое, что $y \to \infty$ при $x \to a + 0$ или при $x \to a - 0$, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота. Для определения горизонтальных и наклонных асимптот $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ вычисляются пределы

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (y(x) - kx),$$

если они существуют (аналогично для $x \to -\infty$).

Пример 20. $x = \frac{n}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$, $m > 0$, $n > 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$, …,

$$\lim_{t \to t_1 \pm 0} x(t) = \lim_{t \to t_1 \pm 0} y(t) = \pm\infty,$$

$$k = \lim_{t \to t_1} \frac{n}{m}(\sin t - t\cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{\tau \to t_1} \left[n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m}\frac{m}{\cos t} \right] =$$

$$= n \lim_{t \to t_1} \frac{\sin t - t\cos t - 1}{\cos t} =$$

$$= n \lim_{t \to t_1} \frac{\cos t - \cos t + t\sin t}{-\sin t} = -\frac{n\pi}{2};$$

симптота: $y = nx/m - n\pi/2$.

Аналогично для t_2 получаем асимптоту $y = nx/m + n\pi/2$ и т. д.

Алгебраическая кривая. Пусть кривая задана в виде $F(x, y) = 0$, причем $F(x, y)$ является многочленом от x и y (m – наибольшая степень x).

1) *Горизонтальная асимптота* $y = a$. Положим $x = 1/\xi$ и умножением на ξ^m уничтожим ξ в знаменателях. Если получающееся таким образом уравнение $G(\xi, y) = 0$ имеет (неизолированное) решение $y = a$, $\xi = 0$, то прямая $y = a$ является горизонтальной асимптотой.

2) *Вертикальная асимптота* $x = a$. Чтобы ее получить, следует в случае 1) поменять местами x и y.

3) *Наклонная асимптота* $y = kx + b$. Подставим $y = kx + b$ в $F(x, y) = 0$ и расположим члены полученного таким образом многочлена по убывающим степеням x:

$$F(x, kx + b) = f_1(k, b)x^n + f_2(k, b)x^{n-1} + \dots$$

Если уравнения $f_1(k, b) = 0$, $f_2(k, b) = 0$ имеют решение, то $y = kx + b$ является наклонной асимптотой.

Пример 21. $F(x, y) \equiv x^2(y - 1) + 2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{\xi}$,

$$\frac{1}{\xi^2}(y - 1) + \frac{2}{\xi} - 1 = 0, \quad (y - 1) + 2\xi - \xi^2 = 0.$$

Для $\xi \to \pm 0$ и тем самым для $x \to \pm\infty$ получаем, что $y \to 1$; $y = 1$ – горизонтальная асимптота.

Пример 22. $F(x, y) \equiv x^2(y-1) + 2x - 1 = 0$, $y = \frac{1}{\xi}$, $x^2\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) + 2x - 1 = 0$, $x^2(1-\xi) + 2x\xi - \xi = 0$, $x = (-\xi \pm \pm\sqrt{\xi})/(1-\xi)$.

Для $\xi \to +0$ и тем самым для $y \to +\infty$ получаем, что $x \to -0$. Следовательно, $x = 0$ является (односторонней) вертикальной асимптотой.

Пример 23. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*декартов лист*), $F(x, kx + b) \equiv (1 + k^3)x^3 + 3(k^2b - ka)x^2 + \ldots$; полагая $1 + k^3 = 0$ и $k^2b - ka = 0$, имеем систему с решением $k = -1$, $b = -a$; уравнение асимптоты: $y = -x - a$.

4.3.1.5. Эволюта и эвольвента. *Эволюта* данной кривой представляет собой кривую, состоящую из центров кривизны данной кривой. Она же является огибающей нормалей этой кривой. Параметрический вид уравнений эволюты $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x)$ или $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ можно получить на основании формул табл. 4.7, положив там $y = y(x)$ или $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Пример 24. Найдем эволюту параболы $y = x^2$. Согласно табл. 4.7

$$\xi = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3, \qquad \eta = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1+6x^2}{2}.$$

Если положить $x = t$, $\xi = x$, $\eta = y$, то будем иметь уравнение эволюты в параметрическом виде $x = -4t^3$, $y = \frac{1+6t^2}{2}$, или, после исключения t, в виде $y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}$ (рис. 4.66).

Эвольвента. Если кривая Γ_2 является эволютой Γ_1, то Γ_1 называется *эвольвентой* (*инволютой*) кривой Γ_2. Каждая нормаль MC эвольвенты является касательной к эволюте. Длина дуги $\breve{CC_1}$ эволюты равна приращению радиуса кривизны эвольвенты (рис. 4.66): $\breve{CC_1} = M_1C_1 - MC$.

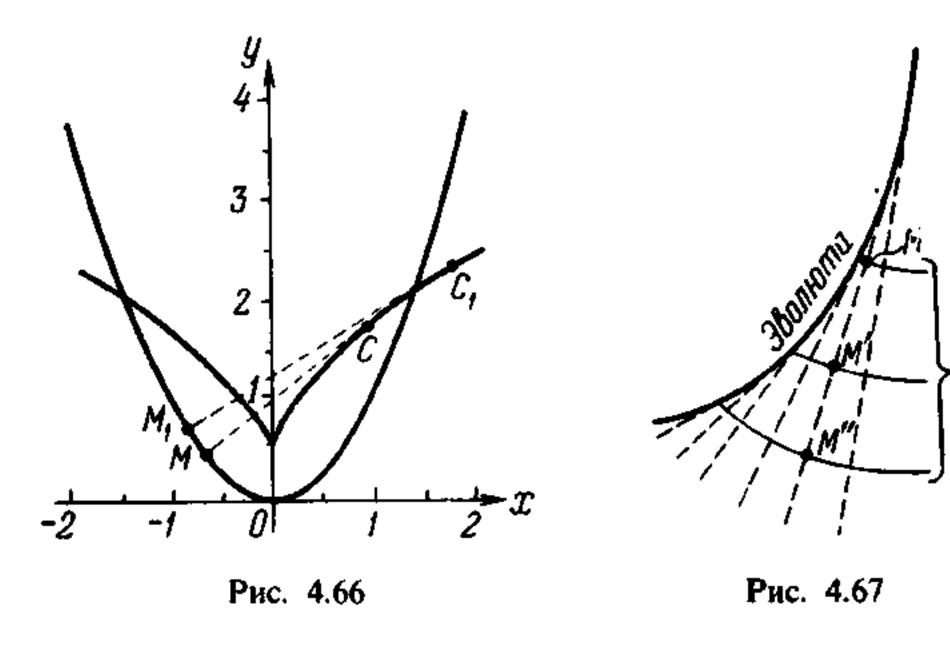


Рис. 4.66 Рис. 4.67

На основании этих свойств эвольвенту Γ_1 можно считать «развертывающей» кривой Γ_2, получающейся из Γ_2 разматыванием натянутой нити. Данной эволюте соответствует семейство эвольвент, каждая из которых определяется первоначальной длиной натянутой нити (рис. 4.67).

Для нахождения эвольвенты на основании формул из табл. 4.7 получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.3.1.6. Огибающая семейства кривых. Под *огибающей* семейства кривых понимается кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой из заданного семейства. Обе прямые на рис. 4.68 представляют собой огибающие семейства окружностей. Если семейство кривых задано в виде

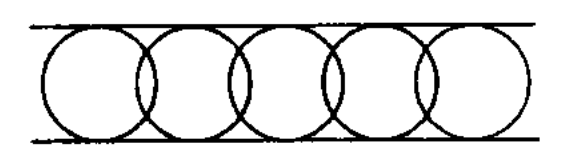


Рис. 4.68

$F(x, y, C) = 0$, то уравнение огибающей получают, исключая C из пары уравнений

$$F(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial C}(x, y, C) = 0.$$

При этом необходимо, чтобы выполнялись неравенства $F''_{CC} \neq 0$; $F'_xF''_{Cy} - F'_yF''_{Cx} \neq 0$.

Пример 25 (рис. 4.68). $F = (x - C)^2 + y^2 - r^2 = 0$, $r = \text{const}$ (семейство окружностей); $F'_C \equiv -2(x - C) = 0$, $F''_{CC} = +2 \neq 0$. Исключая C из этих уравнений огибающей, получим $y^2 - r^2 = 0$, т. е. две параллельные прямые.

4.3.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

4.3.2.1. Способы задания кривых в пространстве. Кривая в пространстве обычно задается в параметрическом виде:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \tag{4.52}$$

где $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ $(-\infty \leqslant \alpha, \beta \leqslant +\infty)$. Если обозначить через $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, то (4.52) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \tag{4.53}$$

Производные по t будут обозначаться точками; например, $\dot{x}(t)$ представляет собой первую производную от $x(t)$ по t. Будем писать

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}.$$

Положительное направление на кривой в пространстве соответствует увеличению значения параметра i. Кривую в пространстве можно задать и как линию пересечения двух поверхностей:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0.$$

4.3.2.2. Локальные элементы кривой в пространстве. *Длина дуги* между двумя точками M_0 и M пространственной кривой, соответствующими значениям параметра t_0, t, равна

$$s = \int_{t_0}^{t} ds, \tag{4.54}$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,dt = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}\,dt = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|dt = |d\mathbf{r}|.$$

Если зафиксировать точку M_0, то в качестве нового параметра кривой можно ввести s (*натуральный параметр*); s положителен, если M следует за M_0 (в смысле задаваемого при помощи t положительного направления). Тогда получим $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, или $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$.

Разложение в ряд Тейлора. В окрестности точки M_1, соответствующей длине дуги $s_1 = M_0M_1$, справедливо равенство

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_1) + \frac{d\mathbf{r}(s_1)}{ds}(s - s_1) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}(s - s_1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\mathbf{r}(s_1)}{ds^3}(s - s_1)^3 + \ldots, \tag{4.55}$$

или в координатной записи (для $x(s)$)

$$x(s) = x(s_1) + \frac{dx(s_1)}{ds}(s - s_1) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x(s_1)}{ds^2}(s - s_1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x(s_1)}{ds^3}(s - s_1)^3 + \ldots$$

Если заменить s на t, то соответствующие формулы будут справедливы для $\mathbf{r}(t)$.

Касательная. Единичный вектор $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ совпадает с направлением касательной в точке M и указывает в положительном направлении кривой.

Главная нормаль и кривизна. Единичный вектор $\mathbf{n}$, сонаправленный вектору $\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}$, называется вектором *главной нормали* к кривой в точке M. Справедливы равенства

$$\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = K\mathbf{n},$$

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2x(s)}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y(s)}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z(s)}{ds^2}\right)^2}.$$

Коэффициент $K \geqslant 0$ называется *кривизной* кривой в точке M. Величина $R = 1/K$ называется *радиусом кривизны*. В случае плоской кривой кривизне приписывают еще знак + или − (см. 4.3.1.2). Если кривизна во всех точках кривой равна нулю ($K \equiv 0$), то мы имеем дело с прямой в пространстве.

Сопровождающий трехгранник. *Вектор касательной* $\mathbf{t}$ всегда перпендикулярен *вектору главной нормали* $\mathbf{n}$. Если дополнить $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ перпендикулярным к ним единичным вектором $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ (*вектор бинормали*) до правой тройки единичных векторов, то получим тройку векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, которую называют *сопровождающим трехгранником* в точке M пространственной кривой (рис. 4.69)

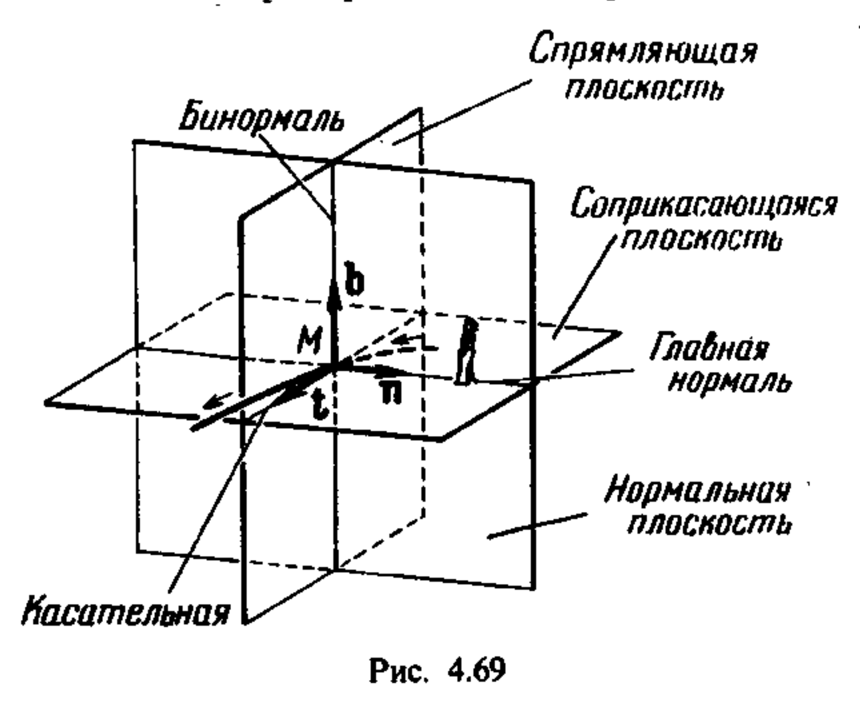


Рис. 4.69

Согласно формуле (4.55), кривая с точностью до членов 2-го порядка малости лежит в плоскости, натянутой на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ (*соприкасающаяся плоскость*), на $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ натянута *нормальная плоскость*, на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$ — *спрямляющая плоскость*.

Кручение. *Кручение* пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ в точке $M(s)$ определяется формулой

$$T = 1/\tau = R^2\,(d\mathbf{r}(s)/ds,\ d^2\mathbf{r}(s)/ds^2,\ d^3\mathbf{r}(s)/ds^3) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2 + y''^2 + z''^2)}$$

(x' — первая производная по s и т. д.). Если кручение во всех точках кривой равно нулю ($T \equiv 0$), то мы имеем дело с плоской кривой. Если в некоторой фиксированной точке M_1 кручение $T = 0$, то, согласно формуле (4.55), кривая в окрестности точки M_1 с точностью до членов 3-го порядка представляет собой плоскую кривую. Знак T позволяет определить *направление закручивания* кривой; $T > 0$ означает, что для наблюдателя, стоящего на соприкасающейся плоскости, натянутой на $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, в направлении $\mathbf{b}$ кривая закручивается вверх против часовой стрелки (правый винт; рис. 4.69); $T < 0$ соответствует левому винту.

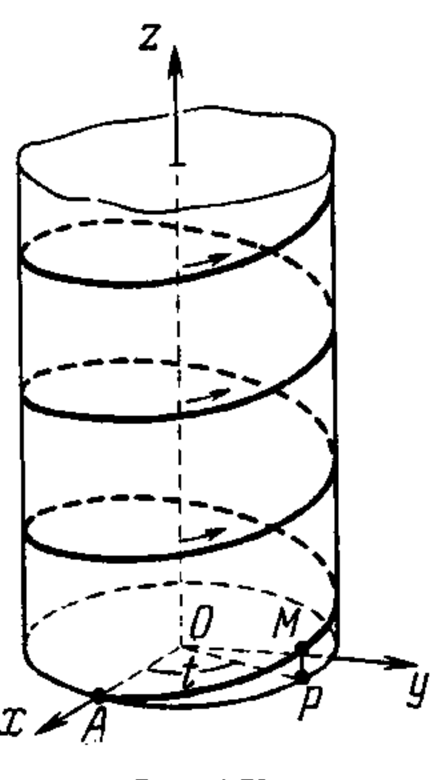


Рис. 4.70

Общий параметрический вид. Если кривая задана в виде (4.52), то

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2\ddot{\mathbf{r}}^2 - (\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}}^2)^3} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3},$$

$$T = \frac{1}{\tau} = R^2\,\frac{(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}^2)^3} = R^2\,\frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}. \quad (4.56)$$

Пример 26. Вычислим кривизну и кручение *винтовой линии*

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad a > 0$$

($b > 0$ — правая винтовая линия, рис. 4.70; $b < 0$ — левая винтовая линия). Заменим параметр t длиной дуги

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = t\sqrt{a^2 + b^2};$$

тогда

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

таким образом, кривизна

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

постоянна. Согласно (4.56), кручение

$$T = \left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)^2 \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2]^3} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

также постоянно.

4.3.2.3. Основная теорема теории кривых. Формулы Серре — Френе. Для производных от векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ сопровождающего трехгранника справедливы так называемые *формулы Серре — Френе*:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = K\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -K\mathbf{t} + T\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -T\mathbf{b}. \quad (4.57)$$

Основная теорема теории кривых. Если на отрезке $0 \leqslant s \leqslant a$ заданы две непрерывные функции $K(s) \geqslant 0$, $T(s)$, то с точностью до расположения в пространстве существует единственная кривая L: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant a$ такая, что s представляет собой длину дуги, а кривизна и кручение кривой L равны соответственно $K(s)$ и $T(s)$.

Построение кривой L проводится так:

а) Система (4.57) представляет собой систему девяти обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент векторов **t**, **n**, **b**. Заданием $\mathbf{t}(0)$, $\mathbf{n}(0)$, $\mathbf{b}(0)$ (задание сопровождающего трехгранника в точке $s = 0$) решение системы (4.57) $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ определяется однозначно.

б) Если, далее, задан $\mathbf{r}(0)$ ($s = 0$ – начальная точка кривой), то $\mathbf{r}(s)$ получаем по формуле

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \int_0^s \mathbf{t}(s)\, ds.$$

4.3.3. ПОВЕРХНОСТИ

4.3.3.1. Способы задания поверхностей. Уравнение поверхности. Поверхность в трехмерном пространстве можно определить следующим образом:

в явной форме:

$$z = z(x, y); \quad (x, y) \in G; \tag{4.58}$$

в неявной форме:

$$F(x, y, z) = 0; \quad (x, y, z) \in U; \tag{4.59}$$

в параметрической форме:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v);\ (u, v) \in G; \tag{4.60}$$

в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v); \quad (u, v) \in G; \tag{4.61}$$

где G – плоская область, U – пространственная область.

Здесь (4.61) представляет собой совокупность уравнений вида (4.60), записанную в векторной форме, причем $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ означает радиус-вектор точки поверхности $M(x, y, z)$:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}.$$

Пример 27. Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O(0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

в параметрической форме ($0 \leqslant u < 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$): $x = R\cos u \sin v$, $y = R \sin u \sin v$, $z = R\cos v$;

в векторной форме: $\mathbf{r} = (R\cos u \sin v)\,\mathbf{i} + (R \sin u \sin v)\,\mathbf{j} + (R\cos v)\,\mathbf{k}$.

Криволинейные координаты на поверхности. Если в формулах (4.60) зафиксировать параметр v ($v = v_k$), то получим уравнение кривой на поверхности, называемой *координатной линией* $v = v_k$ (рис. 4.71). Аналогично при фиксированном u ($u = u_i$) получится *координатная линия* $u = u_i$. В общем случае эти координатные линии покрывают сплошь всю поверхность. Точке M_1, которая является точкой пересечения координатных линий $u = u_1$, $v = v_1$, поставим в соответствие *криволинейные координаты* (u_1, v_1). Координатные линии ориентируют в направлении возрастающих значений параметров.

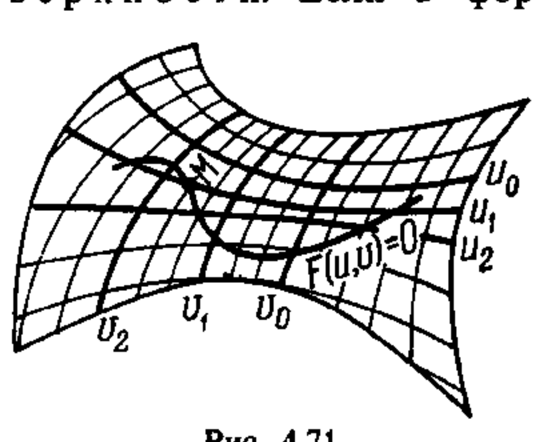


Рис. 4.71

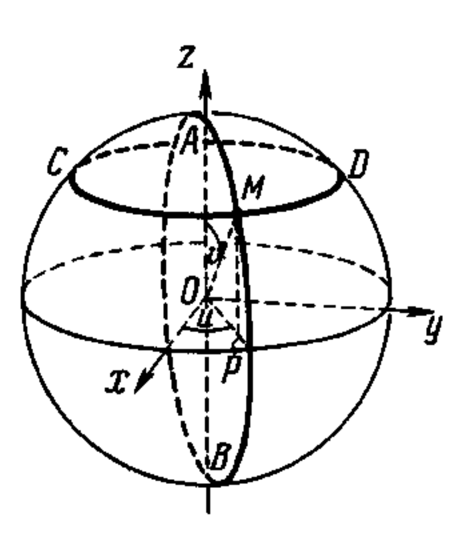


Рис. 4.72

Параметры u, v на сфере (рис. 4.72) имеют следующий смысл: u – *долгота*, v – *полярный угол*, отсчитываемый от северного полюса. Линии $u = \text{const}$ (соответственно $v = \text{const}$) представляют собой *параллели* (соответственно *меридианы*).

Тензорные поля на поверхности. Положим $u^1 = u$, $u^2 = v$. Если на поверхности заданы две функции $a_\alpha(u^1, u^2)$ ($\alpha = 1, 2$), которые при переходе от системы координат u^α к системе координат u'^α на поверхности преобразуются по формулам

$$a'_\alpha(u'^1, u'^2) = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\alpha} a_\gamma(u^1, u^2), \tag{4.62}$$

то $a_\alpha(u^1, u^2)$ называют *один раз ковариантным тензорным полем* на поверхности. В (4.62) использовано (как и во всем разделе 4.3) *соглашение о суммировании*: суммирование от 1 до 2 производится по одинаковым верхним и нижним греческим индексам. Функции $a^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(u^1, u^2)$ (т. е. набор из $2k + 2l$ функций) образуют *k раз ковариантное и l раз контравариантное тензорное поле* на поверхности, если при переходе от системы u^α к системе u'^α они преобразуются по формулам

$$a'^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(u'^1, u'^2) = \frac{\partial u^{\gamma_1}}{\partial u'^{\alpha_1}} \frac{\partial u^{\gamma_2}}{\partial u'^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial u^{\gamma_k}}{\partial u'^{\alpha_k}} \frac{\partial u'^{\beta_1}}{\partial u^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial u'^{\beta_l}}{\partial u^{\delta_l}} a^{\delta_1 \ldots \delta_l}_{\gamma_1 \ldots \gamma_k}(u^1, u^2).$$

4.3.3.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Сопровождающий трехгранник. Пусть поверхность отнесена к криволинейным координатам u, v. Тогда векторы, касательные

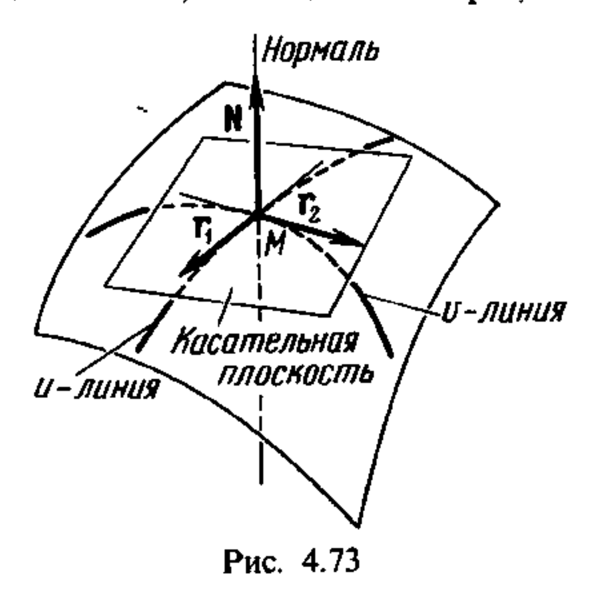


Рис. 4.73

в точке $M(u, v)$ к координатным линиям u и v соответственно, определяются по формулам

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_u(u, v) = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_v(u, v) = \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Единичные векторы $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}$, $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|}$ определяют (при условии, что они неколлинеарны) *касательную плоскость* в точке M (рис. 4.73). Касательная плоскость к поверхности в точке M представляет собой плоскость, в которой лежат все касательные к кривым на поверхности, проходящим через точку M.

Единичный вектор нормали $\mathbf{N}$ в точке M есть вектор, перпендикулярный к касательной плоскости в точке M и направленный таким образом, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{N}$ образуют правую тройку векторов. Справедливо равенство

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}.$$

Тройка векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{N}$, зависящая от точки поверхности, называется *сопровождающим трехгранником*. Вектор

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{r}_1(u, v) \times \mathbf{r}_2(u, v))\, du\, dv$$

по направлению совпадает с $\mathbf{N}\,(du > 0,\ dv > 0)$; его длина $|d\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|\, du\, dv$ приближенно равна площади криволинейного параллелограмма,

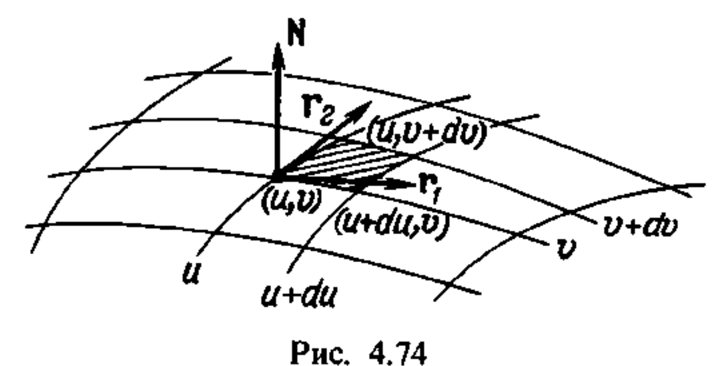


Рис. 4.74

натянутого на точки (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$ (рис. 4.74).

Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

Способ задания поверхности	Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$	Параметрическое уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $x - x_0 = at,\ y - y_0 = bt,\ z - z_0 = ct$
(4.58)	$a = \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x},\quad b = \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y},\quad c = -1$	
(4.59)	$a = \dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x},\quad b = \dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y},\quad c = \dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}$	
(4.60)	$a = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix},\quad b = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix},\quad c = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix}$	
(4.61)	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\mathbf{N}(M_0) = 0$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{N}(M_0)$

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор «текущей» точки $M(x, y, z)$ касательной плоскости (нормали к поверхности). Фиксированная точка M_0 имеет криволинейные координаты (u_0, v_0); $\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_0 = \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u}$ и т. д.

Пример 28. Для сферы $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$, или $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$.

Уравнение нормали к поверхности:

$$x = tx_0,\quad y = ty_0,\quad z = tz_0,\quad -\infty < t < +\infty.$$

Особые точки поверхности. Если в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F(x, y, z) = 0$ выполняется условие $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, то точка M_0 называется *особой точкой* (*конической точкой*). Разложив функцию $F(x, y, z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), получим, что касательные ко всем проходящим через M_0 кривым не лежат в одной плоскости, а образуют конус 2-го порядка, уравнение которого имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 (y - y_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_0 (z - z_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0 (x - x_0)(y - y_0) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\right)_0 (y - y_0)(z - z_0) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x}\right)_0 (z - z_0)(x - x_0) = 0,$$

где $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 = \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}$ и т. д. Если все частные производные 2-го порядка обращаются в нуль, то мы имеем конус 3-го или более высокого порядка.

4.3.3.3. Метрические свойства поверхностей. Первая квадратичная форма поверхности. Пусть поверхность задана в векторной форме: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Если $u = u(t)$, $v = v(t)$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ представляет собой кривую на поверхности. Справедливо равенство

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}'_v \frac{dv}{dt}.$$

Дифференциал длины дуги, согласно (4.54), имеет вид

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad (4.63)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Если поверхность задана в виде $z = z(x, y)$, то

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \; F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}, \; G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Выражение в правой части формулы (4.63) называется *первой квадратичной формой* поверхности. Если положить

$$u^1 = u, \; u^2 = v,$$

$$g_{11} = E, \; g_{12} = g_{21} = F, \; g_{22} = G,$$

то, используя соглашение о суммировании (см. 4.3.3.1), первую квадратичную форму можно записать в виде

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta.$$

При переходе к другой криволинейной системе координат u'^α на поверхности получим $ds^2 = g'_{\alpha\beta} du'^\alpha du'^\beta$, причем справедливо равенство

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\alpha}\frac{\partial u^\delta}{\partial u'^\beta} g_{\gamma\delta}.$$

Таким образом, функции $g_{\alpha\beta}$ представляют собой координаты дважды ковариантного тензорного поля (*метрический тензор*) (см. (4.62)). Положим $g = \det g_{\alpha\beta} = EG - F^2$, $g^{11} = G/g$, $g^{21} = g^{12} = -F/g$, $g^{22} = E/g$. Справедливо равенство $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$. При переходе от системы u^α к системе u'^α функции $g^{\alpha\beta}$ (соответственно g) преобразуются по формулам

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial u'^\alpha}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u'^\beta}{\partial u^\delta} g^{\gamma\delta}$$

(дважды контравариантное тензорное поле) (соответственно

$$g' = \left(\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)}\right)^2 g,$$

где

$$\left.\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} = \frac{\partial u^1}{\partial u'^1}\frac{\partial u^2}{\partial u'^2} - \frac{\partial u^2}{\partial u'^1}\frac{\partial u^1}{\partial u'^2}\right).$$

Чтобы криволинейным системам координат на поверхности поставить в соответствие *ориентацию* $\eta = \pm 1$, выберем в качестве положительной ($\eta = +1$) некоторую фиксированную систему u^α_0, а для произвольной системы u^α определим η как знак функционального определителя: $\eta = \operatorname{sign} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^1_0, u^2_0)}$. Тогда *тензоры Леви-Чивита* (*дискриминантные тензоры*)

$$E^{\alpha\beta} = \frac{\eta}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\alpha\beta} \text{ и } E_{\alpha\beta} = \eta\sqrt{g}\,\varepsilon^{\alpha\beta},$$

где

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \; \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1,$$

преобразуются так же, как $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ соответственно.

Пример 29. Для сферы $\mathbf{r} = R(\cos u \sin v\mathbf{i} + \sin u \sin v\mathbf{j} + \cos v\mathbf{k})$ имеем

$$E = R^2\sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = R^2;$$

таким образом, $ds^2 = R^2(\sin^2 v\, du^2 + dv^2)$.

Первая квадратичная форма определяет все метрические свойства поверхности.

Длина дуги. Длина дуги кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ на поверхности между точками, соответствующими значениям параметра t_0 и t, равна

$$s = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Площадь поверхности. Кусок поверхности, который образуется, когда параметры u, v пробегают область D плоскости u, v, имеет площадь

$$\iint_D dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Угол между двумя кривыми на поверхности. Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1(t), v_1(t))$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_2(t), v_2(t))$ – две кривые на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, которые пересекаются в точке M, то *угол пересечения* α (угол между положительными направлениями касательных в точке M) вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{E\dot u_1\dot u_2 + F(\dot u_1\dot v_2 + \dot v_1\dot u_2) + G\dot v_1\dot v_2}{\sqrt{E\dot u_1^2 + 2F\dot u_1\dot v_1 + G\dot v_1^2}\sqrt{E\dot u_2^2 + 2F\dot u_2\dot v_2 + G\dot v_2^2}},$$

где $\dot u_1$ (соответственно $\dot u_2$) – первые производные от $u_1(t)$ (соответственно $u_2(t)$) при значении параметра, соответствующего точке M, и т. д.

Отображение одной поверхности в другую. Пусть поверхности

$$S_1\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1(u, v) \quad\text{и}\quad S_2\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(u, v)$$

заданы в одной и той же области D плоскости параметров u и v (возможно, после замены параметров). Если точке M_1 поверхности S_1 с радиус-вектором $\mathbf{r}_1(u, v)$ поставить в соответствие точку M_2 поверхности S_2 с радиус-вектором $\mathbf{r}_2(u, v)$, то мы получим взаимно однозначное отображение одной поверхности на другую. Это отображение называется: 1) *сохраняющим длину*, если при нем длина произвольной кривой остается неизменной; 2) *сохраняющим углы* (*конформным*), если при нем не изменяется угол между двумя произвольными пересекающимися кривыми; 3) *сохраняющим площадь* (*эквиареальным*), если при нем не изменяется площадь произвольного куска поверхности.

Отображение	Необходимое и достаточное условие, накладываемое на первую квадратичную форму
Сохраняющее длину	$E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$
Сохраняющее угол (конформное)	$E_1 = \lambda E_2$, $F_1 = \lambda F_2$, $G_1 = \lambda G_2$, $\lambda(u, v) > 0$
Сохраняющее площадь (эквиареальное)	$E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$

В таблице E_i, F_i, G_i – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_i $(i = 1, 2)$. Данные соотношения должны выполняться в каждой точке поверхности.

Каждое отображение, сохраняющее длину, является конформным и сохраняющим площадь. Каждое конформное и сохраняющее площадь отображение сохраняет длину.

4.3.3.4. Свойства кривизны поверхности. Выражение в правой части формулы

$$-d\mathbf{N}\,d\mathbf{r} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

называется *второй квадратичной формой* поверх-

ности. Она определяет свойства кривизны поверхности. Справедливы равенства

$$L = \mathbf{r}''_{uu}\mathbf{N} = \frac{l}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \mathbf{r}''_{uv}\mathbf{N} = \frac{m}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \mathbf{r}''_{vv}\mathbf{N} = \frac{n}{\sqrt{EG - F^2}},$$

где

$$l = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$m = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Если положить $u^1 = u$, $u^2 = v$ и $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$, то вторую квадратичную форму можно записать в следующем виде:

$$-d\mathbf{N}\,d\mathbf{r} = b_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta.$$

При переходе от системы u^α к системе u'^α справедливо равенство

$$-d\mathbf{N}\,d\mathbf{r} = b'_{\alpha\beta}\,du'^\alpha\,du'^\beta,$$

где

$$b'_{\alpha\beta} = \varepsilon\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\alpha}\,\frac{\partial u^\delta}{\partial u'^\beta}\,b_{\gamma\delta};$$

здесь ε – знак функционального определителя: $\varepsilon = \operatorname{sign}\dfrac{\partial(u'^2, u'^2)}{\partial(u^1, u^2)}$. Следовательно, функции $b_{\alpha\beta}$ представляют собой координаты дважды ковариантного псевдотензора. Положим по определению $b = \det b_{\alpha\beta} = LN - M^2$; величина b преобразуется по тому же закону, что и g (см. 4.3.3.3).

Главные кривизны. Для фиксированной точки поверхности M всегда можно выбрать декартову систему координат x, y, z такую, что начало координат лежит в M, а плоскость x, y совпадает с касательной плоскостью, проходящей через M. В этой системе координат поверхность (в некоторой окрестности точки M) можно представить в виде $z = z(x, y)$, причем

$$z(0, 0) = \frac{\partial z(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial z(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Соответствующий сопровождающий трехгранник в точке M_0 состоит из трех единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, которые направлены по координатным осям. Разложение по формуле Тейлора в окрестности точки M имеет вид

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial x\,\partial y}xy + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial y^2}y^2 + \ldots$$

Поворотом декартовой системы координат вокруг оси z можно добиться того, чтобы выполнялось равенство

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \ldots \qquad (4.64)$$

Величины k_1, k_2 называются *главными кривизнами*; $R_1 = \dfrac{1}{k_1}$, $R_2 = \dfrac{1}{k_2}$ – *главными радиусами кривизны*; $K = k_1 k_2$ – *гауссовой кривизной*; $H = \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2)$ – *средней кривизной в точке* M.

Пример 30. Для сферы радиуса R: $R_1 = R_2 = R$, $K = \dfrac{1}{R^2}$, $H = \dfrac{1}{R}$.

В *выделенной системе координат*, в которой поверхность может быть представлена в виде (4.64), квадратичные формы в точке M имеют особенно простой вид:

$$(d\mathbf{r})^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$-d\mathbf{N}\,d\mathbf{r} = k_1\,dx^2 + k_2\,dy^2.$$

Для произвольной системы координат на поверхности справедливы равенства

$$K = \frac{b}{g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = \frac{LG - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}.$$

Главные кривизны k_1, k_2 – корни квадратного уравнения

$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

Существенное преимущество применения тензорного исчисления в дифференциальной геометрии состоит в том, что, зная величины в некоторой удобной системе координат и зная их поведение при преобразовании, можно тотчас же написать выражение этих величин в произвольной системе координат u^α. Главные кривизны при изменении ориентирования меняют только свой знак (псевдоскаляры); следовательно, K при переходе к произвольной системе u^α не изменяется (скаляр). Чтобы найти выражение для K в системе u^α, необходимо лишь построить скаляр, который в выделенной системе координат совпадает с $k_1 k_2$. Таким образом, мы получаем скаляр b/g. Аналогично можно построить псевдоскаляр для H.

Классификация точек поверхности (формула (4.64)) позволяет определить вид поверхности в окрестности точки M_0 (в выделенной системе координат). Благодаря этому в окрестности M_0 получаем следующую классификацию:

Название точки	Аналитическое определение	В окрестности точки M_0 поверхность с точностью до членов 3-го порядка ведет себя как:
Эллиптическая точка	$K = k_1k_2 > 0$ (т. е. $LM - N^2 > 0$)	эллипсоид
Круговая точка	$K = k_1k_2 > 0$, $k_1 = k_2$	сфера
Гиперболическая точка	$K = k_1k_2 < 0$ (т. е. $LM - N^2 < 0$)	однополостный гиперболоид
Параболическая точка	$K = k_1k_2 = 0$ (т. е. $LM - N^2 = 0$)	
	а) $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$	цилиндр
	б) $k_1 = k_2 = 0$	плоскость

Поверхности, для которых $H \equiv 0$, называются *минимальными*. Поверхности, для которых $K = \text{const}$, называются *поверхностями постоянной кривизны*. Простейшие примеры: $K > 0$ — *сфера*, $K < 0$ — *псевдосфера* (поверхность вращения трактрисы; рис. 4.75).

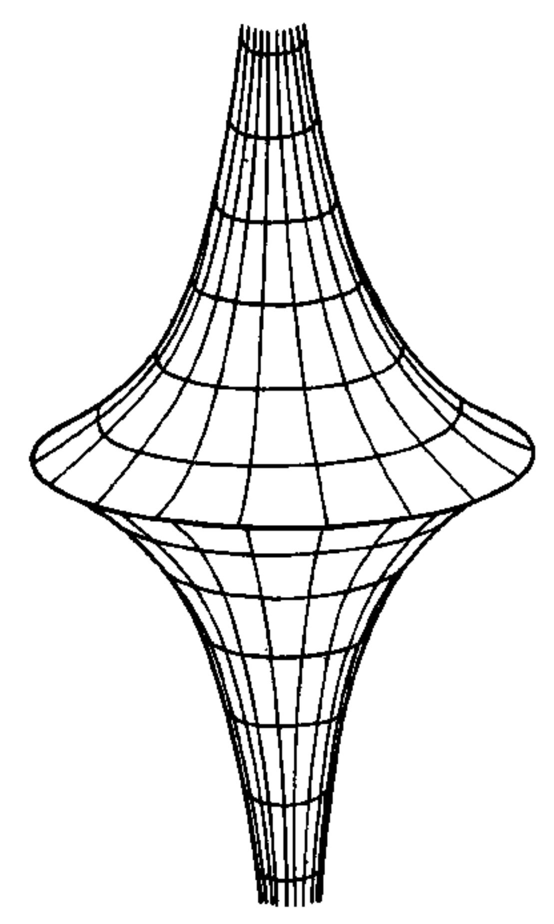


Рис. 4.75

Поверхность называется *линейчатой*, если она получается при движении в пространстве прямой (например, конус, цилиндр, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид). Если поверхность при этом может быть развернута на плоскость, то говорят о *развертывающейся поверхности* (например, конус, цилиндр). Во всех точках развертывающейся поверхности $K = 0$; следовательно, $LN - M^2 = 0$.

Если пересечь поверхность плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке M, то образующаяся кривая называется *нормальным сечением в точке* M. Всегда существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых кривизна соответствующих нормальных сечений в точке M равна главным кривизнам k_1 и k_2. Эти направления соответствуют направлениям осей выделенной системы координат и называются *направлениями главной кривизны*, а соответствующие сечения — *главными нормальными сечениями* поверхности. Если секущая плоскость образует с осью $\mathbf{e}_1$ угол α, то кривизна k_N нормального сечения в точке M равна

$$k_N = k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha$$

(*формула Эйлера*).

Пусть поверхность задана в векторной форме: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Кривизна нормального сечения в точке M, имеющего направление $\lambda\mathbf{r}_u + \mu\mathbf{r}_v$, равна

$$k_N = \frac{b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta}{g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta} = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2}{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2},$$

где $\lambda^1 = \lambda$, $\lambda^2 = \mu$. Направления главных кривизн $\lambda\mathbf{r}_u + \mu\mathbf{r}_v$ можно получить, определив λ, μ из уравнения

$$E^{\alpha\beta} g_{\alpha\alpha} b_{\beta\rho}\lambda^\sigma\lambda^\rho = 0$$

или, более подробно, из уравнения

$$\lambda^2(FN - GM) + \lambda\mu(EN - GL) + \mu^2(EM - FL) = 0. \quad (4.65)$$

В направлениях главных кривизн кривизна нормального сечения k_N принимает экстремальные (максимальное и минимальное) значения, равные главным кривизнам k_1, k_2.

Линии кривизны — кривые $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ на поверхности, направления касательных к которым в каждой точке совпадают с одним из направлений главной кривизны. Их дифференциальные уравнения можно получить из формулы (4.65), положив $\lambda = du/dt$ и $\mu = dv/dt$. Если секущая плоскость, проходящая через точку M, образует с нормалью к поверхности в точке M угол $\gamma \neq 0$, то кривая, являющаяся линией пересечения плоскости и поверхности, называется *наклонным сечением* поверхности. Кривизна k наклонного сечения в точке M вычисляется по формуле

$$k = k_N \cos\gamma$$

(*теорема Менье*).

Кривизна произвольной кривой на поверхности. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ — произвольная кривая на поверхности. Кривизна кривой в точке M равна кривизне наклонного сечения поверхности в точке M, которое образуется при пересечении поверхности с соприкасающейся плоскостью кривой в точке M, натянутой на вектор касательной и вектор главной нормали. Зная главные кривизны в точке M, можно, следовательно, вычислить кривизну всех кривых на поверхности, проходящих через эту точку.

4.3.3.5. Основная теорема теории поверхностей. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена. Изменение сопровождающего трехгранника (см. 4.3.3.2) описывается так называемыми *формулами для производных*:

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\mathbf{r}_\sigma + b_{\alpha\beta}\mathbf{N} \quad (\textit{Гаусс}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^\alpha} = -g^{\sigma\gamma} b_{\gamma\alpha}\mathbf{r}_\sigma \quad (\textit{Вейнгартен}),$$

где $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial u^i$. Все индексы пробегают значения от 1 до 2. По одинаковым верхним и нижним индексам производится суммирование от 1 до 2. Символы Кристоффеля $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ вычисляются по формуле

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\delta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right).$$

Они не обладают свойствами тензоров. Формулы для производных представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для компонент векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{N}$.

Условия интегрируемости. Из равенств

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}$$

получаются так называемые *условия интегрируемости*:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \Gamma^1_{12} b_{11} + (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}) b_{12} + \Gamma^2_{11} b_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \Gamma^1_{22} b_{11} + (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}) b_{12} + \Gamma^2_{12} b_{22} = 0 \tag{4.66}$$

(*формулы Майнарди – Кодацци*),

$$b \equiv b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = R_{1212} \tag{4.67}$$

(*формула Гаусса*). Здесь

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta,\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} g_{\nu\delta},$$

где

$$R_{\alpha\beta,\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \tag{4.68}$$

есть *тензор кривизны Римана.*

Так как $K = b/g$, то *формула Гаусса* (основная теорема Гаусса) может быть записана в виде $K = R_{1212}/g$. Отсюда следует, что гауссову кривизну можно выразить только через коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы и первые и вторые производные от них. Следовательно, кривизна K может быть определена только из измерений на поверхности, без рассмотрения окружающего пространства (свойство внутренней геометрии поверхности). При отображениях, сохраняющих длину, кривизна K в соответствующих точках одинакова. Так как для сферы (плоскости) $K = 1/R^2$ $(K = 0)$, то сферу никогда нельзя отобразить на плоскость, сохраняя длину.

Основная теорема. Если заданы функции

$$g_{11}(u^1, u^2) \equiv E(u, v),$$
$$g_{12}(u^1, u^2) = g_{21}(u^1, u^2) \equiv F(u, v),$$
$$g_{22}(u^1, u^2) \equiv G(u, v)$$

(дважды непрерывно дифференцируемые) и

$$b_{11}(u^1, u^2) \equiv L(u, v),$$
$$b_{12}(u^1, u^2) = b_{21}(u^1, u^2) \equiv M(u, v),$$
$$b_{22}(u^1, u^2) \equiv N(u, v)$$

(один раз непрерывно дифференцируемые), для которых выполнены условия интегрируемости (4.66), (4.67), и, кроме того, для любых действительных чисел λ, μ таких, что $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, справедливо неравенство $E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 > 0$, то существует поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ (трижды непрерывно дифференцируемая), коэффициенты первой и второй квадратичных форм которой совпадают с заданными функциями. Поверхность определена однозначно с точностью до движения в пространстве (сдвига и поворота).

Построение этой поверхности проводится следующим образом:

1) На основании формул Гаусса и Вейнгартена для производных однозначно находится сопровождающий трехгранник $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{N}$, если он задан в некоторой фиксированной точке $M(u_0, v_0)$.

2) Так как $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha$, то отсюда можно вычислить $\mathbf{r}(u, v)$; $\mathbf{r}(u, v)$ определяется однозначно, если поверхность проходит через точку M.

4.3.3.6. Геодезические линии на поверхности. Геодезические линии. Кривая на поверхности называется *геодезической линией*, если в каждой точке главная нормаль к кривой и нормаль к поверхности коллинеарны. *Кратчайшая линия*, лежащая на поверхности и соединяющая две точки поверхности, всегда является частью геодезической линии. На плоскости геодезическими линиями являются прямые. На сфере окружности больших кругов (например, нулевой меридиан и экватор) суть геодезические линии. Геодезические линии на искривленной поверхности соответствуют прямым на плоскости. Геодезическая линия $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \equiv \mathbf{r}(u(s), v(s))$ (s – длина дуги) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \tag{4.69}$$

и, обратно, всякое решение этого дифференциального уравнения представляет собой геодезическую линию (о символах Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ см. 4.3.3.5). Если поверхность задана в явном виде: $z = z(x, y)$, то дифференциальное уравнение геодезической линии $y = y(x)$, $z = z(x, y(x))$ имеет вид

$$\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \frac{dy}{dx} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Геодезическая кривизна. Для кривой на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \equiv \mathbf{r}(u(s), v(s))$ (s – длина дуги) всегда существует разложение вида

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = k_N \mathbf{N} + k_g \left(\mathbf{N} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right),$$

$$k_N = \mathbf{N} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \quad k_g = \left(\mathbf{N} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}.$$

Если кривая представляет собой нормальное сечение в точке M, то в этой точке $k_g = 0$ и k_N равна кривизне нормального сечения; вообще k_N в точке M равна кривизне нормального сечения, проходящего через M, с той же касательной, что и $\mathbf{r}(s)$; k_g называется *геодезической кривизной*. Кривая на поверхности тогда и только тогда является геодезической линией, когда $k_g \equiv 0$.

Пусть S – кусок поверхности, ограниченной простой замкнутой кривой ∂S с геодезической кривизной k_g и длиной дуги s; тогда

$$\oint_{\partial S} k_g \, ds + \iint_S k \, dS = 2\pi \tag{4.70}$$

(*теорема Гаусса – Бонне*); $\iint_S k \, dS$ называется *полной кривизной* куска поверхности. Полная кривизна замкнутой поверхности, которую можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на сферу (тор), всегда равна 4π (нулю).

4.4. РЯДЫ ФУРЬЕ, ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

4.4.1. РЯДЫ ФУРЬЕ

4.4.1.1. Общие понятия. При решении многих задач физики и математики необходимо осуществить разложение периодической функции с периодом 2π в ряд по тригонометрическим функциям:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (4.71)$$

Ряд вида (4.71) называется *рядом Фурье*, а разложение функции в ряд Фурье составляет задачу *гармонического анализа.* В приложениях зачастую ограничиваются конечным числом членов и получают при этом приближение функции тригонометрическим многочленом. Если рассматривается гильбертово пространство $L^2(-\pi, \pi)$ *), то система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 3x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 3x,\ \ldots$$

является *полной ортонормированной системой.* Отсюда следует, что при приближении функции $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ тригонометрическим многочленом $s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ среднеквадратичная погрешность $\delta^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx$ минимальна тогда и только тогда, когда в качестве α_k, β_k выбраны так называемые *коэффициенты Фурье* функции $f(x)$, которые определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \quad (4.72)$$

Отсюда следует, что для каждой функции $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ сумма

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k и b_k вычислены по формулам (4.72), сходится к f в смысле среднего квадратичного:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2\, dx = 0.$$

Во многих случаях представляет интерес вопрос: когда ряд Фурье сходится в обычном смысле, т. е. поточечно, и каким образом он описывает функцию $f(x)$? На так поставленный вопрос дает ответ *теорема Дирихле.* Пусть $f(x)$ удовлетворяет в $(-\pi, \pi)$ так называемым *условиям Дирихле*: а) интервал $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число интервалов, в которых $f(x)$ непрерывна и монотонна; б) если x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$, то существуют $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] = \begin{cases} f(x), & \text{если } f \text{ непрерывна в } x, \\ \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если представить функцию $f(x)$ периодически продолженной на всю ось с периодом 2π, то утверждение теоремы Дирихле будет справедливо для всех x.

Если раскладываемая в ряд Фурье функция имеет период $2l$, то рассматривают интервал $(-l, l)$. При этом коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 1, 2, \ldots); \quad (4.73)$$

ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right).$$

В этом случае все вышеприведенные утверждения остаются в силе.

Ряд Фурье

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

может быть также записан в одной из следующих форм:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k),$$

*) Гильбертово пространство, в котором всюду плотно евклидово пространство непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$.

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_k = \dfrac{a_k}{b_k}$;

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx =$$

$$= \begin{cases} a_0/2, & \text{если } k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{если } k > 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{если } k < 0. \end{cases}$$

Симметрия. Если $f(x)$ в $(-\pi, \pi)$ – четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = 0. \qquad (4.74)$$

При этом ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \qquad (4.75)$$

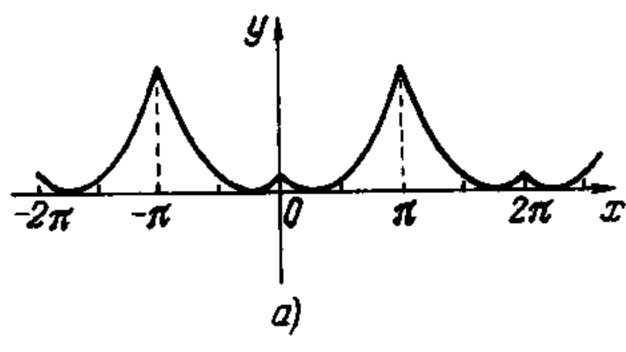
Если $f(x)$ – нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то коэффициенты Фурье находят по формулам

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx\, dx. \qquad (4.76)$$

При этом ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \qquad (4.77)$$

Разложение на интервале $(0, \pi)$. Если функция $f(x)$ задана на интервале $(0, \pi)$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно разложить как в ряд по косинусам вида (4.75), так и в ряд по синусам вида (4.77); в первом случае коэффициенты вычисляются по формулам (4.74), а во втором – по формулам (4.76). Оба ряда в интервале $(0, \pi)$ дают значение функции $f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$ и величину $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в точках разрыва функции $f(x)$. Однако вне $(0, \pi)$ эти разложения описывают разные функции. Ряд по косинусам дает такую функцию, которая получается из $f(x)$ путем четного продолжения на соседний интервал $(-\pi, 0)$ и периодического продолжения с периодом 2π вне $(-\pi, \pi)$ (рис. 4.76, *а*). Ряд по синусам дает такую функцию, которая получается из $f(x)$ путем нечетного продолжения на $(-\pi, 0)$ и периодического продолжения с периодом 2π вне $(-\pi, \pi)$ (рис. 4.76, *б*).



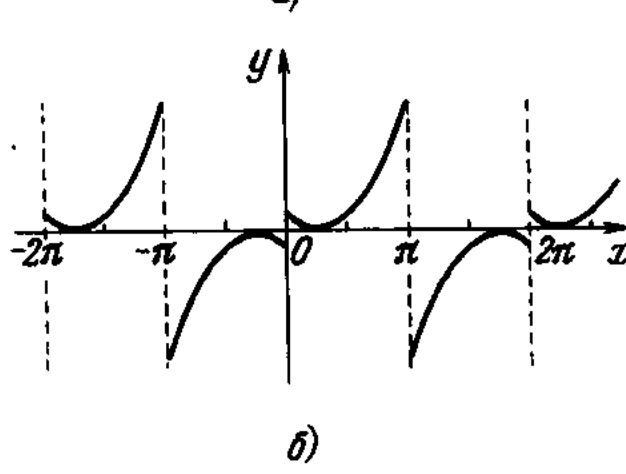


Рис. 4.76

Если $f(x)$ задана на интервале $(0, l)$, то формулы (4.74) (соответственно (4.76)) записывают в следующем виде:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = 0,$$

$$\left(\text{соответственно} \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx\right).$$

Тогда ряд (4.75) (соответственно (4.77)) принимает вид

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}$$

$$\left(\text{соответственно} \quad s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}\right).$$

4.4.1.2. Таблица некоторых разложений в ряд Фурье. Ниже приведены разложения в ряд Фурье некоторых простейших функций, которые заданы в определенных интервалах и продолжены периодически вне их. Для некоторых разложений дано графическое изображение формы кривой. Разложения относятся к интервалу $(-\pi, \pi)$ или к $(0, \pi)$.

В общем случае разложения периодических функций нередко могут быть получены путем изменения масштаба как по оси x, так и по оси y.

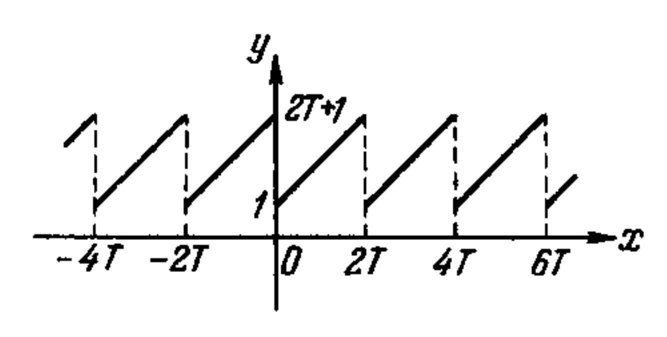


Рис. 4.77

Пусть, например, дана функция $y = x + 1$ при $0 < x < 2T$ с периодом $2T$ (рис. 4.77). Посредством замены переменных $Y = \dfrac{(y - T - 1)\pi}{T}$ и $X =$

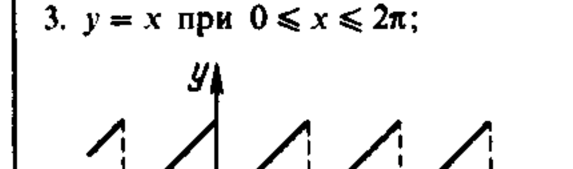
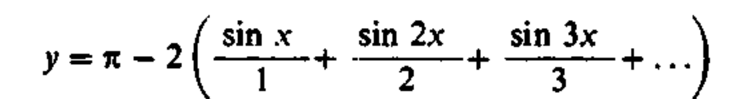
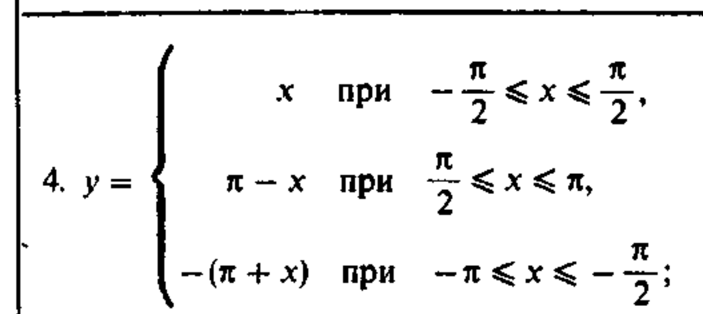
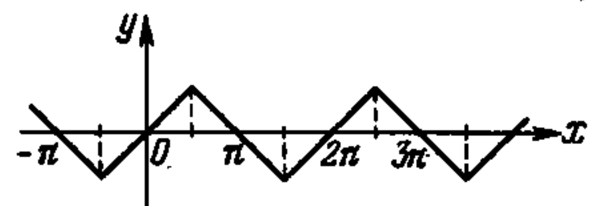
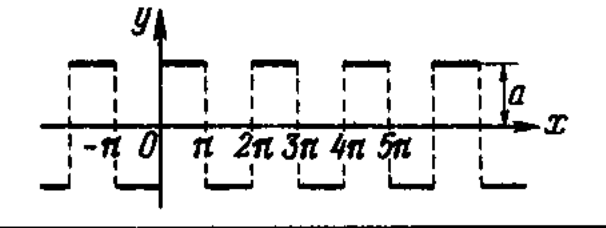
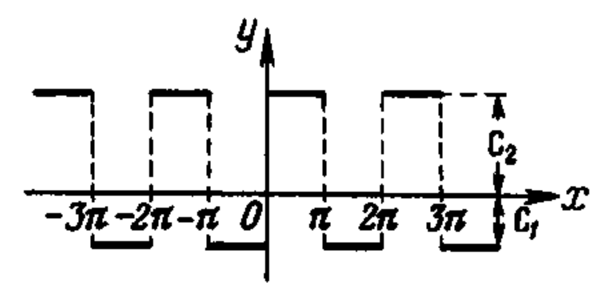
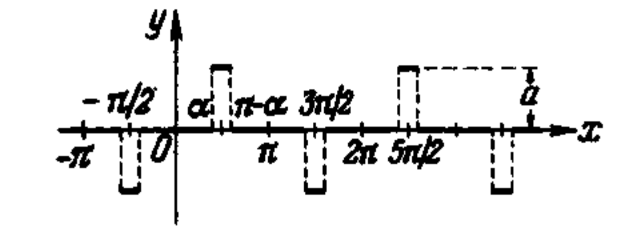
$= \dfrac{(x-T)\pi}{T}$ получаем функцию 1 в табл. 4.8, т. е. функцию $Y = X$, заданную на интервале $-\pi < X < \pi$, с периодом 2π. Согласно этой таблице, получаем

$$Y = 2\left(\frac{\sin X}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Отсюда при помощи указанной выше замены, принимая во внимание свойство линейности разложения в ряд Фурье, получим искомое разложение:

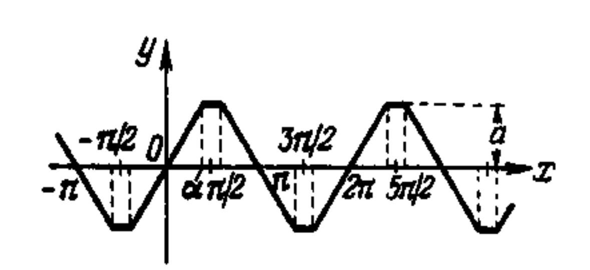
$$y = (T+1) - \frac{2T}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{T} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{T} + \ldots\right).$$

Таблица 4.8

1. $y = x$ при $-\pi < x < \pi$;	$y = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$. При значениях аргумента $\pm k\pi$ ряд дает, согласно теореме Дирихле, значение функции, равное 0
2. $y = \lvert x \rvert$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;	$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right)$
3. $y = x$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; 	 $y = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$
4.  $y = \begin{cases} x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ -(\pi + x) & \text{при } -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}; \end{cases}$	$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots\right)$ 
5. $y = \begin{cases} -a & \text{при } -\pi < x < 0, \\ a & \text{при } 0 < x < \pi,\ a > 0; \end{cases}$ 	$y = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$
6. $y = \begin{cases} c_1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ c_2 & \text{при } 0 < x < \pi; \end{cases}$ 	$y = \frac{c_1 + c_2}{2} - 2\,\frac{c_1 - c_2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$
7. $y = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < -\pi + \alpha,\ -\alpha < x < \alpha,\ \pi - \alpha < x < \pi, \\ a & \text{при } \alpha < x < \pi - \alpha, \\ -a & \text{при } -\pi + \alpha < x < -\alpha,\ a > 0,\ 0 < \alpha < \pi/2; \end{cases}$ $y = \frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha \sin x + \frac{1}{3}\cos 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha \sin 5x + \ldots\right)$	

Продолжение

8. $y = \begin{cases} \dfrac{ax}{\alpha} & \text{при} \quad -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha, \\ a & \text{при} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \pi - \alpha, \\ -a & \text{при} \quad -\pi + \alpha \leqslant x \leqslant -\alpha, \\ \dfrac{a(\pi - x)}{\alpha} & \text{при} \quad \pi - \alpha \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\dfrac{a(x+\pi)}{\alpha} & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \alpha, \; a > 0, \; 0 < \alpha < \pi/2; \end{cases}$



$$y = \frac{4a}{\pi\alpha}\left(\sin\alpha \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha \sin 5x + \ldots\right).$$

В частности, при $\alpha = \pi/3$ получаем

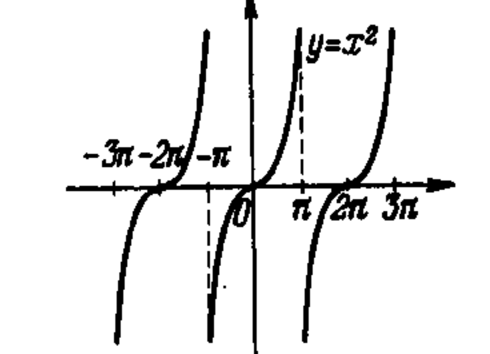
$$y = \frac{6a\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{5^2}\sin 5x + \frac{1}{7^2}\sin 7x - \frac{1}{11^2}\sin 11x + \ldots\right)$$

9. $y = x^2$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

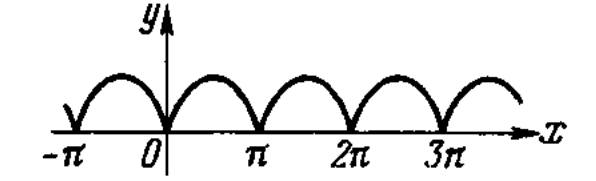
10. $y = \begin{cases} -x^2 & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \pi; \end{cases}$

$$y = 2\pi\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$$



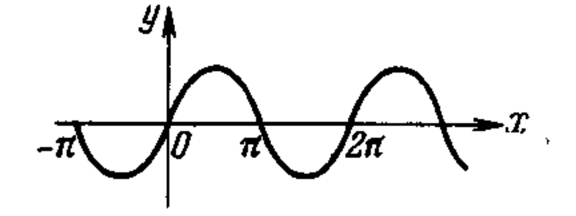
11. $y = x(\pi - x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$
и четно продолжена на $(-\pi, 0)$;

$$y = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$



12. $y = x(\pi - x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$
и нечетно продолжена на $(-\pi, 0)$;

$$y = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$$

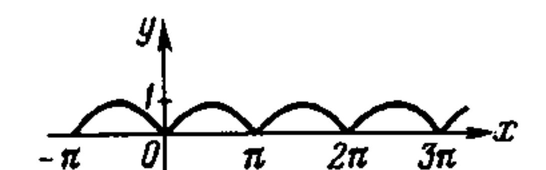


13. $y = Ax^2 + Bx + C$ при $-\pi < x < \pi$;

$$y = \frac{A\pi^2}{3} + C + 4A\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} - 2B\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin kx}{k}$$

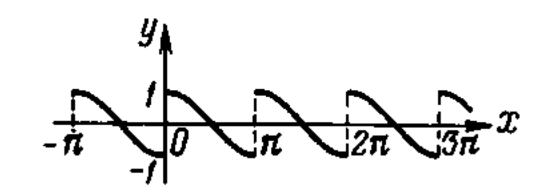
14. $y = |\sin x|$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

$$y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$



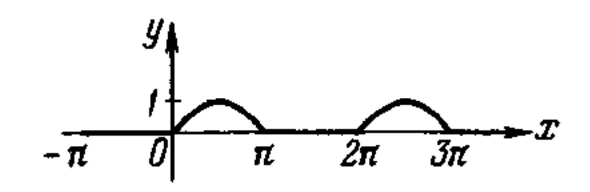
15. $y = \cos x$ при $0 < x < \pi$
и нечетно продолжена на $(-\pi, 0)$;

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{1\cdot 3} + \frac{4\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{6\sin 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$



16. $y = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$

$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$



Продолжение

17. $y=\cos ux$ при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, где u – произвольное не целое действительное число; $y=\frac{2u\sin u\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2u^2}-\frac{\cos x}{u^2-1}+\frac{\cos 2x}{u^4-4}-\frac{\cos 3x}{u^2-9}+\ldots\right)$
18. $y=\sin ux$ при $-\pi<x<\pi$, где u – произвольное не целое действительное число; $y=\frac{2\sin u\pi}{\pi}\left(-\frac{\sin x}{u^2-1}+\frac{2\sin 2x}{u^2-4}-\frac{3\sin 3x}{u^2-9}+\ldots\right)$
19. $y=x\cos x$ при $-\pi<x<\pi$; $y=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{4\sin 2x}{2^2-1}-\frac{6\sin 3x}{3^2-1}+\frac{8\sin 4x}{4^2-1}-\ldots$
20. $y=x\sin x$ при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$; $y=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}-\frac{\cos 3x}{3^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}-\ldots\right)$
21. $y=\operatorname{ch} ux$ при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, $u\neq 0$; $y=\frac{2u\operatorname{sh} u\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2u^2}-\frac{\cos x}{u^2+1^2}+\frac{\cos 2x}{u^2+2^2}-\frac{\cos 3x}{u^2+3^2}+\ldots\right)$
22. $y=\operatorname{sh} ux$ при $-\pi<x<\pi$; $y=\frac{2\operatorname{sh} u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{u^2+1^2}-\frac{2\sin 2x}{u^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{u^2+3^2}-\ldots\right)$
23. $y=e^{ax}$ при $-\pi<x<\pi$, $a\neq 0$; $y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx-k\sin kx)\right]$

В последующих примерах имеют в виду не столько задачу о том, как разложить данную функцию в ряд Фурье, сколько обратный вопрос: к каким функциям сходятся некоторые простые тригонометрические ряды?

24. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<2\pi.$ 25. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$

26. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12},\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

27. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}=-\int_0^x\ln\left(2\sin\frac{z}{2}\right)dz,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}=\int_0^x dz\int_0^z\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3},\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi\qquad\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=\frac{\pi^3}{25{,}79436\ldots}=1{,}20205\ldots\right).$

29. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}=\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12},\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

30. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right),\quad -\pi<x<\pi.$

31. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}=\frac{x}{2},\quad -\pi<x<\pi.$ 32. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

33. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^2}=\int_0^x \ln\left(2\cos\frac{z}{2}\right)dz, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

34. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^3}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^3}-\int_0^x dz\int_0^z \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

35. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^3}=\frac{\pi^2 x-x^3}{12}, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

36. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}=-\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), \quad 0<x<\pi.$

37. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\frac{\pi}{4}, \quad 0<x<\pi.$

38. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2-2\pi x}{8}, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$

39. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}=-\frac{1}{2}\int_0^x \ln\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right)dz, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$

40. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^3}=\frac{1}{2}\int_0^x dz\int_0^z \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)dt+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$

41. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^2 x-\pi x^2}{8}, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$

42. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}=\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$

43. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right], \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$

44. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2-x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right)dz, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$

45. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\frac{\pi x}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$

46. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3-4\pi x^2}{32}, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$

47. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2-x}dz\int_0^z \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)dt+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$

4.4.1.3. Численный гармонический анализ. Если в промежутке $0\leqslant x<L$ функция $f(x)$ известна только в дискретной системе точек $x_k=\frac{kL}{N}$ $(k=0, 1,\ldots,N-1)$, то задача ее приближенного представления тригонометрическим многочленом решается следующим образом.

Система функций

$$g_l(x_k)=\exp\{il\alpha_k\}, \qquad k,\ l=0,\ 1,\ldots,N-1,$$

где $\alpha_k=\frac{2\pi x_k}{L}$, образует ортонормированную систему относительно скалярного произведения

$$(f,\ g)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k)\cdot\bar{g}(x_k) \tag{4.78}$$

(черта над g — знак комплексного сопряжения). Отсюда следует, что тригонометрический многочлен

$$T_N(x)=\sum_{l=0}^{N-1}c_l g_l(x)=\sum_{l=0}^{N-1}c_l\exp\left\{\frac{2\pi i l x}{L}\right\}, \tag{4.79}$$

где

$$c_l = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\exp\left\{-2\pi i\frac{lj}{N}\right\}, \qquad (4.80)$$

принимает в точках x_k значения $f(x_k)$, т. е. решает задачу тригонометрической интерполяции. При этом отрезок этого многочлена дает наилучшее приближение к $f(x)$ в смысле метрики (4.78) по сравнению с аналогичным тригонометрическим многочленом, но с другими коэффициентами.

Так как

$$\exp\left\{2\pi il\frac{k}{N}\right\} = \exp\left\{-2\pi i(N-l)\frac{k}{N}\right\},$$

то из формулы (4.80) следует, что

$$c_l = \bar{c}_{N-l}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $n = \left[\frac{N+1}{2}\right]$ ($[x]$ – целая часть x: наибольшее целое число, не превосходящее x); коэффициент c_0 (а при четном N также и c_n) действителен. Если обозначить $a_k = c_k + c_{N-k}$, $b_k = i(c_k - c_{N-k})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и $a_0 = 2c_0$, а при N четном $a_n = 2c_n$, то формула (4.79) примет вид

$$T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=0}^{n-1}\left(a_l\cos\left(2\pi\frac{lx}{L}\right) + b_l\sin\left(2\pi\frac{lx}{L}\right)\right) + \frac{a_n}{2}\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right). \qquad (4.81)$$

Последний член возникает только при N четном. При этом для вычисления a_l и b_l служат формулы

$$a_l = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\cos\left(2\pi\frac{kl}{N}\right),$$
$$b_l = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\sin\left(2\pi\frac{kl}{N}\right), \qquad (4.82)$$
$$l = 0, 1, \ldots, n, \qquad b_0 = b_n = 0.$$

Погрешность интерполяции $f(x) - T_N(x)$ в точках, не являющихся узловыми, существенно зависит от членов более высоких порядков в разложении $f(x)$ в бесконечный ряд Фурье.

Если $N = pq$, то для вычисления коэффициентов c_l можно применить формулы

$$c_{rm} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f(x_{m+jq})\exp\left\{-2\pi i\frac{jr}{p}\right\},$$
$$c_l = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} c_{rm}\exp\left\{-2\pi i\frac{lm}{N}\right\}, \qquad (4.83)$$

$0 \leqslant r \leqslant p-1$, $0 \leqslant m \leqslant q-1$, $0 \leqslant l = r + mp < N-1$.

Величины c_{rm} являются коэффициентами Фурье q функций, заданных p значениями, совпадающими с $f(x)$ в точках x_{m+jq} $(j = 0, \ldots, p-1)$. По ним вычисляются окончательные значения c_l. Разлагая p на множители, можно рекуррентно применять формулы (4.83) для вычисления c_{rm}. Такой способ вычислений, позволяющий значительно сократить их объем, называется *быстрым преобразованием Фурье*. Особенно эффективным является этот метод, когда $N = 2^s$. В этом случае формулы (4.83) могут быть записаны в виде следующих соотношений:

$$c_{jk}^{r-1} = \frac{1}{2}(c_{jk}^r + \exp\{-ij\alpha_r\}c_{j,k+q}^r), \quad 0 \leqslant k \leqslant q-1,$$
$$c_{j+p,k}^{r-1} = \frac{1}{2}(c_{jk}^r - \exp\{-ij\alpha_r\}c_{j,k+q}^r), \quad 0 \leqslant j \leqslant p-1, \qquad (4.84)$$

где $q = 2^{r-1}$, $p = 2^{s-r}$, $\alpha_r = \pi/p$.

Полагая сначала $r = s$ и $c_{0k}^s = f(x_k)$ и переходя рекуррентно по формулам (4.84) от r к $r-1$, получим в результате значения c_{j0}^0, равные искомым коэффициентам c_j.

Используемые при этом значения $\exp\{-ij\alpha_r\}$ также вычисляются рекуррентно:

при j четном

$$\exp\{-ij\alpha_r\} = \exp\left\{-i\frac{j}{2}\alpha_{r+1}\right\},$$

при j нечетном

$$\exp\{-ij\alpha_r\} = \frac{\exp\left\{-i\frac{j+1}{2}\alpha_{r+1}\right\} + \exp\left\{-i\frac{j-1}{2}\alpha_{r+1}\right\}}{2\cos\alpha_r},$$

где $\cos\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha_{r+1}}{2}}$.

Вычисления по формулам (4.84) требуют числа действий порядка $N\log_2 N$ вместо N^2 по формулам (4.80).

Для действительных коэффициентов Фурье a_j и b_j формулы (4.84) можно преобразовать к следующему виду:

$$a_{jk}^{r-1} = \frac{1}{2}(a_{jk}^r + \cos j\alpha_r \cdot a_{j,k+q}^r - \sin j\alpha_r \cdot b_{j,k+q}^r),$$
$$0 \leqslant k \leqslant q-1,$$
$$a_{p-j,k}^{r-1} = \frac{1}{2}(a_{jk}^r - \cos j\alpha_r \cdot a_{j,k+q}^r + \sin j\alpha_r \cdot b_{j,k+q}^r),$$
$$0 \leqslant j \leqslant \frac{p}{2}, \qquad (4.85)$$
$$b_{jk}^{r-1} = \frac{1}{2}(b_{jk}^r + \sin j\alpha_r \cdot a_{j,k+q}^r + \cos j\alpha_r \cdot b_{j,k+q}^r),$$
$$0 \leqslant k \leqslant q-1,$$
$$b_{p-j,k}^{r-1} = \frac{1}{2}(-b_{jk}^r + \sin j\alpha_r \cdot a_{j,k+q}^r + \cos j\alpha_r \cdot b_{j,k+q}^r),$$
$$0 \leqslant j \leqslant \frac{p}{2}.$$

Как и в формулах (4.84), здесь $q = 2^{r-1}$, $p = 2^{s-r}$, $\alpha_r = \pi/p$. Рекурсия начинается с $r = s$, $a_{0k}^s = 2f(x_k)$, $b_{0k}^s = 0$. При этом всегда $b_{0k}^r = b_{p/2,k}^r = 0$.

Для синусов и косинусов справедливы формулы: при j четном

$$\cos j\alpha_r = \cos \frac{j}{2}\alpha_{r+1},$$

$$\sin j\alpha_r = \sin \frac{j}{2}\alpha_{r+1},$$

при j нечетном

$$\cos j\alpha_r = \frac{\cos\left(\frac{j+1}{2}\alpha_{r+1}\right) + \cos\left(\frac{j-1}{2}\alpha_{r+1}\right)}{2\cos\alpha_r},$$

$$\sin j\alpha_r = \frac{\left(\sin\frac{j+1}{2}\alpha_{r+1}\right) + \sin\left(\frac{j-1}{2}\alpha_{r+1}\right)}{2\cos\alpha_r}.$$

Формулу для $\cos\alpha_r$ см. выше.

На практике кроме $N = 2^s$ часто встречается также $N = 3\cdot 2^s$. В этом случае можно воспользоваться формулами (4.83), полагая $p = 2^s$, $q = 3$, а для вычисления c_{rm} ($m = 0, 1, 2$) трижды применить формулы (4.84).

Так как формулы (4.79) при $x = x_j$ совершенно аналогичны формулам (4.80), то метод быстрого преобразования Фурье с успехом применяется в случаях, когда требуется вычислить значения тригонометрического многочлена $T_N(x)$ с известными коэффициентами в точках $x_j = \frac{jL}{N}$ $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$.

4.4.2. ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

4.4.2.1. Общие понятия. Непериодическая функция $f(x)$ не может быть разложена в ряд Фурье. Однако при определенных предположениях из разложения в ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ посредством предельного перехода при $l \to +\infty$ получают разложение f в так называемый *интеграл Фурье*. Пусть $f(x)$ в любом конечном интервале подчиняется условиям Дирихле (см. 4.4.1.1) и является абсолютно интегрируемой, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$. Тогда для всех x имеет место формула

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} (a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy))\,dy, \quad (4.86)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(yu)\,du,$$
$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(yu)\,du. \quad (4.87)$$

Правая часть формулы (4.86) называется *интегралом Фурье* функции $f(x)$, а вычисляемые, согласно (4.87), коэффициенты напоминают по своему виду коэффициенты ряда Фурье. В точках разрыва функции $f(x)$ правая часть формулы (4.86) принимает значения, равные $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

В то время как разложение в ряд Фурье дает представление периодической функции (с периодом $2l$) в виде суммы гармонических колебаний с частотами $y_n = n\frac{\pi}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, интеграл Фурье представляет функцию $f(x)$ как бы в виде суммы бесконечно большого числа колебаний с непрерывно изменяющейся частотой y; говорят, что интеграл Фурье дает разложение функции в *непрерывный спектр*.

Важным достаточным условием сходимости интеграла Фурье служит признак Жордана—Дирихле. Если функция $f(x)$ в каждом конечном интервале имеет не более чем конечное число точек разрыва, f является функцией ограниченной вариации в каждом конечном интервале и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} (a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy))\,dy = \begin{cases} f(x) \text{ в точках непрерывности } f, \\ \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \text{ в точках разрыва.} \end{cases}$$

При этом $a(y)$, $b(y)$ определяются согласно (4.87). Интеграл Фурье может быть также записан следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos y(u-x)\,du,$$

или (в комплексной форме) в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iy(u-x)}\,du. \quad (4.88)$$

Внешний интеграл в (4.88) понимается в смысле главного значения. Формула (4.88) может восприниматься как суперпозиция следующих двух формул:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}\,dx, \quad (4.89)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y)e^{-ixy}\,dy. \quad (4.90)$$

Функция $F(y)$, которая поставлена в соответствие функции $f(x)$ согласно (4.89), называется *трансформантой Фурье* или *преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а сам переход от f к F называется *преобразованием Фурье*. Если задана трансформанта Фурье $F(y)$, то посредством так называемого обратного преобразования Фурье (4.90) получают снова $f(x)$. Вообще говоря, F — комплексная функция и для действительных f. Исходная функция $f(x)$ также может принимать комплексные значения, обладая действительным аргументом x. Трансформанта Фурье существует, если $f(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям справедливости формулы (4.86). При этом интеграл в

(4.89) понимается, вообще говоря, в смысле главного значения. Преобразование Фурье в (4.89) можно составить из *косинус-преобразования* и *синус-преобразования Фурье*. Косинус-преобразование Фурье и обратное к нему определяются формулами

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx,$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(y)\cos(xy)\,dy; \tag{4.91}$$

соответственно синус-преобразование и обратное к нему — посредством

$$F_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx,$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(y)\sin(xy)\,dy. \tag{4.92}$$

Для четной функции $f(x)$ имеет место равенство $F(y) = F_c(y)$ (при $y < 0$ $F_c(y)$ продолжается четным образом); для нечетной $f(x)$ имеет место равенство $F(y) = iF_s(y)$ (при $y < 0$ $F_s(y)$ продолжается нечетным образом). В общем случае $f(x)$ разлагается на сумму четной и нечетной функций:

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$
$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Отсюда следует, что

$$F(y) = G_c(y) + iH_s(y);$$

при этом $G_c(y)$ есть косинус-трансформанта Фурье функции $g(x)$, а $H_s(y)$ — синус-трансформанта Фурье функции $h(x)$. Следовательно, можно в принципе ограничиваться косинус- и синус-трансформантами Фурье.

Свойства трансформант Фурье.

1. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, +\infty)$, то функция

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\,dx$$

непрерывна при $-\infty < y < +\infty$ и стремится к нулю при $y \to \pm\infty$.

2. Если для некоторого натурального числа n функции $f(x)$ и $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы в интервале $(-\infty, +\infty)$, то $F(y)$ n раз дифференцируема и все производные $F'(y), \ldots, F^{(n)}(y)$ стремятся к нулю при $y \to \pm\infty$.

3. Если $f(x)$ и первые $n-1$ производных стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, а n-я производная $f^{(n)}(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ абсолютно интегрируема, то $\lim\limits_{y \to \pm\infty} y^n F(y) = 0$.

Многообразные применения преобразования Фурье в теории вероятностей (теория характеристических функций), при решении краевых задач и сингулярных интегральных уравнений (метод Винера — Хопфа), а также в электронике и других технических областях обусловливаются главным образом следующими теоремами.

Теорема о свертке. Если функции f и g имеют трансформанты Фурье, то трансформанта Фурье свертки двух функций

$$((f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\,dy)$$

с точностью до $\sqrt{2\pi}$ равна произведению трансформант Фурье сомножителей:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{ixy}\,dx = \sqrt{2\pi}\, F(y) \cdot G(y).$$

Теорема непрерывности. Если

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} F_n(y) = F(y)$$

(F_n, F являются трансформантами Фурье функций f_n, соответственно f), причем $F_n(y)$ равномерно сходятся к непрерывной функции $F(y)$ на числовой прямой.

Теорема о дифференцировании. При преобразовании Фурье операция дифференцирования преобразуется в умножение на независимое переменное; точнее говоря, если $f(x)$ кусочно дифференцируема, $f(x)$ и $f'(x)$ имеют трансформанты Фурье, и если $G(y)$ есть трансформанта Фурье функции $f'(x)$, то $G(y) = -iyF(y)$, где $F(y)$ есть трансформанта Фурье функции f.

Преобразование Фурье в $\mathbf{R}^n$ (общая теория). Рассмотрим множество $\mathfrak{S}(\mathbf{R}^n)$ так называемых быстро убывающих функций на $\mathbf{R}^n$:

$$\mathfrak{S}(\mathbf{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n);\ \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty\};$$

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n),\quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\quad \alpha_j,\ \beta_j \geqslant 0,$$

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n},\quad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

При $f(x) \in \mathfrak{S}(\mathbf{R}^n)$ трансформанта Фурье $F(y)$ $(y = (y_1, \ldots, y_n))$ определяется посредством формулы

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{i\langle x, y\rangle}\,dx,$$

где $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Теоремы, аналогичные указанным для $\mathbf{R}^1$, остаются справедливыми.

4.4.2.2. Таблицы трансформант Фурье. Встречающиеся в таблицах сокращения пояснены в конце раздела.

Косинус-преобразование Фурье

$f(x)$	$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy)\, dx$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ay)}{y}$
$\begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	$4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\cos y \sin^2 \frac{y}{2}\right) y^{-2}$
$\begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{x}, & x > a \end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Ci}(ay)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\frac{2C(ay)}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > a \end{cases}$	$\frac{1 - 2C(ay)}{\sqrt{y}}$
$(a + x)^{-1} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} [-\operatorname{si}(ay) \sin(ay) - \operatorname{Ci}(ay) \cos(ay)]$
$(a - x)^{-1} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos(ay) \operatorname{Ci}(ay) + \sin(ay) \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Si}(ay)\right)\right]$
$(a^2 + x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ay}}{a}$
$(a^2 - x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(ay)}{y}$
$\frac{b}{b^2 + (a - x)^2} + \frac{b}{b^2 + (a + x)^2}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-by} \cos(ay)$
$\frac{a + x}{b^2 + (a + x)^2} + \frac{a - x}{b^2 + (a - x)^2}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-by} \sin(ay)$
$(a^2 + x^2)^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} K_0(ay)$
$\begin{cases} (a^2 - x^2)^{-1/2}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(ay)$
$x^{-\nu}, \ 0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \Gamma(1 - \nu)\, y^{\nu - 1}$
e^{-ax}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2}$

Продолжение

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$
$\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(\frac{a^2+y^2}{b^2+y^2}\right)$
$\sqrt{x}\,e^{-ax}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+y^2)^{-3/4}\cos\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)$
$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}$	$\left(\frac{a+(a^2+y^2)^{1/2}}{a^2+y^2}\right)^{1/2}$
$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,n!a^{n+1}(a^2+y^2)^{-(n+1)}\sum\limits_{0\leqslant 2m\leqslant n+1}(-1)^m C_{n+1}^{2m}\left(\frac{y}{a}\right)^{2m}$
$x^{\nu-1}e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\nu)(a^2+y^2)^{-\nu/2}\cos\left(\nu\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)$
$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x-1}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln(1-e^{-2\pi y})$
e^{-ax^2}	$\frac{\sqrt{2}}{2}a^{-1/2}e^{-y^2/4a}$
$x^{-1/2}e^{-a/x}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\sqrt{2ay}}(\cos\sqrt{2ay}-\sin\sqrt{2ay})$
$x^{-3/2}e^{-a/x}$	$\sqrt{\frac{2}{a}}\,e^{-\sqrt{2ay}}\cos\sqrt{2ay}$
$\begin{cases}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & x>1\end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{Si}(y)}{y}$
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{\sqrt{y}}\left(C+\frac{\pi}{2}+\ln(4y)\right)$
$(x^2-a^2)^{-1}\ln\frac{x}{a}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a}(\sin(ay)\operatorname{Ci}(ay)-\cos(ay)\operatorname{si}(ay))$
$(x^2-a^2)^{-1}\ln(bx)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a}\{\sin(ay)[\operatorname{Ci}(ay)-\ln(ab)]-\cos(ay)\operatorname{si}(ay)\}$
$\frac{1}{x}\ln(1+x)$	$\sqrt{2\pi}\,[(\operatorname{Ci}(y))^2+(\operatorname{si}(y))^2]$
$\ln\left\lvert\frac{a+x}{b-x}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{y}\left\{\frac{\pi}{2}[\cos(by)-\cos(ay)]+\cos(by)\operatorname{Si}(by)+\right.$ $\left.+\cos(ay)\operatorname{Si}(ay)-\sin(ay)\operatorname{Ci}(ay)-\sin(by)\operatorname{Ci}(by)\right\}$
$e^{-ax}\ln x$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{a^2+y^2}\left[aC+\frac{a}{2}\ln(a^2+y^2)+y\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right)\right]$

Продолжение

$f(x)$	$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy)\, dx$
$\ln\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y}(e^{-by} - e^{-ay})$
$\ln\left\lvert \frac{a^2+x^2}{b^2-x^2} \right\rvert$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y}(\cos(by) - e^{-ay})$
$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$	$-2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{si}\,(ay)$
$\frac{\ln(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(C + \ln\left(\frac{2y}{a}\right)\right) K_0(ay)\right]$
$\ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{1-e^{-ay}}{y}$
$\ln\left\lvert 1 - \frac{a^2}{x^2} \right\rvert$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{1-\cos(ay)}{y}$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y < a, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y = a, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
$\frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ab}\,\mathrm{ch}\,(by), & y < a, \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-by}\,\mathrm{sh}\,(ab), & y > a \end{cases}$
$\frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^{-2}(1 - e^{-ab}\,\mathrm{ch}\,(by)), & y < a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^{-2} e^{-by}\,\mathrm{sh}\,(ab), & y > a \end{cases}$
$e^{-bx}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{a+y}{b^2+(a+y)^2} + \frac{a-y}{b^2+(a-y)^2}\right]$
$\frac{e^{-x}\sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{y2}\right)$
$\frac{\sin^2(ax)}{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\ln\left\lvert 1 - 4\,\frac{a^2}{y^2} \right\rvert$
$\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left\lvert \frac{(a+b)^2 - y^2}{(a-b)^2 - y^2} \right\rvert$
$\frac{\sin^2(ax)}{x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(a - \frac{1}{2}y\right), & y < 2a, \\ 0, & y > 2a \end{cases}$

Продолжение

$f(x)$	$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos(xy)\, dx$
$\frac{\sin^3(ax)}{x^2}$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \{(y+3a)\ln(y+3a) + (y-3a)\ln\lvert y-3a\rvert - (y+a)\ln(y+a) - (y-a)\ln\lvert y-a\rvert\}$
$\frac{\sin^3(ax)}{x^3}$	$\begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(3a^2-y^2), & 0<y<a, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y^2, & y=a, \\ \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(3a-y)^2, & a<y<3a, \\ 0, & y>3a \end{cases}$
$\frac{1-\cos(ax)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln\left\lvert 1-\frac{a^2}{y^2}\right\rvert$
$\frac{1-\cos(ax)}{x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a-y), & y<a, \\ 0, & y>a \end{cases}$
$\frac{\cos(ax)}{b^2+x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ab}\operatorname{ch}(by)}{b}, & y<a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-by}\operatorname{ch}(ab)}{b}, & y>a \end{cases}$
$e^{-bx}\cos(ax)$	$\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{b^2+(a-y)^2}+\frac{1}{b^2+(a+y)^2}\right]$
$e^{-bx^2}\cos(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-(a^2+y^2)/(4b)} \operatorname{ch}\left(\frac{ay}{2b}\right)$
$\frac{x}{b^2+x^2}\operatorname{tg}(ax)$	$\sqrt{2\pi}\operatorname{ch}(by)(1+e^{2ab})^{-1}$
$\frac{x}{b^2+x^2}\operatorname{ctg}(ax)$	$\sqrt{2\pi}\operatorname{ch}(by)(e^{2ab}-1)^{-1}$
$\sin(ax^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right)-\sin\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right)$
$\sin[a(1-x^2)]$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}+\frac{y^2}{4a}\right)$
$\frac{\sin(ax^2)}{x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y\left[S\,\frac{y^2}{4a}-C\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]+\sqrt{2a}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y^2}{4a}\right)$
$\frac{\sin(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{2}-\left[C\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]^2-\left[S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]^2\right\}$

Продолжение

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$
$e^{-ax^2}\sin(bx^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a^2+b^2)^{-1/4}\,e^{-\frac{1}{4}ay^2(a^2+b^2)^{-1}}\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{by^2}{4(a^2+b^2)}\right]$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right)+\sin\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\cos[a(1-x^2)]$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}+\frac{y^2}{4a}\right)$
$e^{-ax^2}\cos(bx^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a^2+b^2)^{-1/4}e^{-\frac{1}{4}ay^2(a^2+y^2)^{-1}}\cos\left[\frac{by^2}{4(a^2+b^2)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$
$\frac{1}{x}\sin\left(\frac{a}{x}\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,J_0(2\sqrt{ay})$
$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{y}}[\sin(2\sqrt{ay})+\cos(2\sqrt{ay})-e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\sin\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}[\sin(2\sqrt{ay})+\cos(2\sqrt{ay})+e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{y}}[\cos(2\sqrt{ay})-\sin(2\sqrt{ay})+e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\cos\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}[\cos(2\sqrt{ay})-\sin(2\sqrt{ay})+e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(a\sqrt{x})$	$\frac{2}{\sqrt{y}}\left[C\left(\frac{a^2}{4y}\right)\sin\left(\frac{a^2}{4y}\right)-S\left(\frac{a^2}{4y}\right)\cos\left(\frac{a^2}{4y}\right)\right]$
$e^{-bx}\sin(a\sqrt{x})$	$\frac{a}{\sqrt{2}}(b^2+a^2)^{3/4}\,e^{-\frac{1}{4}a^2b(b^2+y^2)^{-1}}\cos\left[\frac{a^2y}{4(b^2+y^2)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{b}\right)\right]$
$\frac{\sin(a\sqrt{x})}{x}$	$\sqrt{2\pi}\left[S\left(\frac{a^2}{4y}\right)+C\left(\frac{a^2}{4y}\right)\right]$
$\frac{1}{\sqrt{x}}\cos(a\sqrt{x})$	$\sqrt{\frac{2}{y}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a^2}{4y}\right)$
$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\cos(b\sqrt{x})$	$\sqrt{2}(a^2+y^2)^{-1/4}\,e^{-\frac{1}{4}ab^2(a^2+b^2)^{-1}}\cos\left[\frac{b^2y}{4(a^2+y^2)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right)\right]$
$e^{-a\sqrt{x}}\cos(a\sqrt{x})$	$a\sqrt{2}\,(2y)^{-3/2}\,e^{-a^2/(2y)}$
$\frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}[\cos(a\sqrt{x})-\sin(a\sqrt{x})]$	$\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-a^2/(2y)}$

Синус-преобразование Фурье

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$
$\begin{cases} 1, & 0<x<a, \\ 0, & x>a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos(ay)}{y}$
$\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 2-x, & 1<x<2, \\ 0, & x>2 \end{cases}$	$4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y^{-2}\sin y\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<x<a, \\ 0, & x>a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Si}\,(ay)$
$\begin{cases} 0, & 0<x<a, \\ \frac{1}{x}, & x>a \end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{si}\,(ay)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x<a, \\ 0, & x>a \end{cases}$	$\frac{2S\,(ay)}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} 0, & 0<x<a, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x>a \end{cases}$	$\frac{1-2S\,(ay)}{\sqrt{y}}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$	$2\sqrt{y}$
$(a+x)^{-1}\ (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[\sin(ay)\,\mathrm{Ci}\,(ay)-\cos(ay)\,\mathrm{si}\,(ay)]$
$(a-x)^{-1}\ (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\sin(ay)\,\mathrm{Ci}\,(ay)-\cos(ay)\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Si}\,(ay)\right)\right]$
$\frac{x}{a^2+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ay}$
$(a^2-x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{a}\,[\sin(ay)\,\mathrm{Ci}\,(ay)-\cos(ay)\,\mathrm{Si}\,(ay)]$
$\frac{b}{b^2+(a-x)^2}-\frac{b}{b^2+(a+x)^2}$	$\sqrt{2\pi}\,e^{-by}\sin(ay)$
$\frac{a+x}{b^2+(a+x)^2}-\frac{a-x}{b^2+(a-x)^2}$	$\sqrt{2\pi}\,e^{-by}\cos(ay)$

Продолжение

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cdot\sin(xy)\,dx$
$\frac{x}{a^2-x^2}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(ay)$
$\frac{1}{x(a^2-x^2)}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1-\cos(ay)}{a^2}$
$\frac{1}{x(a^2+x^2)}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1-e^{-ay}}{a^2}$
$x^{-\nu}$, $0<\operatorname{Re}\nu<2$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\Gamma(1-\nu)\,y^{\nu-1}$
e^{-ax}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{a^2+y^2}$
$\frac{e^{-ax}}{x}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}$
$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{2}y\ln\left(\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2}\right)+b\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{b}\right)-a\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right)\right]$
$\sqrt{x}\,e^{-ax}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+y^2)^{-3/4}\sin\left[\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right]$
$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}$	$\left(\frac{(a^2+y^2)^{1/2}-a}{a^2+y^2}\right)^{1/2}$
$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,n!a^{n+1}(a^2+y^2)^{-(n+1)}\sum\limits_{m=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^m C_{n+1}^{2m+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{2m+1}$
$x^{\nu-1}e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\nu)(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}\nu}\sin\left[\nu\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right]$
$e^{-\frac{1}{2}x}(1-e^{-x})^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{th}(\pi y)$
xe^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{y}{4a}e^{-y^2/(4a)}$
$x^{-1/2}e^{-a/x}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\sqrt{2ay}}\left[\cos\sqrt{2ay}+\sin\sqrt{2ay}\right]$
$x^{-3/2}e^{-a/x}$	$\sqrt{\frac{2}{a}}\,e^{-\sqrt{2ay}}\sin\sqrt{2ay}$

Продолжение

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$
$\begin{cases}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & x>1\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{Ci}(y)-C-\ln y}{y}$
$\frac{\ln x}{x}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(C+\ln y)$
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{\pi}{2}-C-\ln(4y)\right]$
$x(x^2-a^2)^{-1}\ln(bx)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\cos(ay)(\ln(ab)-\mathrm{Ci}(ay))-\sin(ay)\,\mathrm{si}(ay)]$
$x(x^2-a^2)^{-1}\ln\left(\frac{x}{a}\right)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\cos(ay)\,\mathrm{Ci}(ay)+\sin(ay)\,\mathrm{si}(ay)]$
$e^{ax}\ln x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{a^2+y^2}\left[a\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{a}\right)-Cy-\frac{1}{2}y\ln(a^2+y^2)\right]$
$\ln\left\lvert\frac{a+x}{b-x}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{y}\left\{\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\cos(by)\,\mathrm{Ci}(by)-\cos(ay)\,\mathrm{Ci}(ay)+\sin(by)\,\mathrm{Si}(by)-\right.$ $\left.-\sin(ay)\,\mathrm{Si}(ay)+\frac{\pi}{2}[\sin(by)+\sin(ay)]\right\}$
$\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y}\sin(ay)$
$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{a}[1-\cos(ay)-ay\,\mathrm{si}(ay)]$
$\ln\left(\frac{a^2+x^2+x}{a^2+x^2-x}\right)$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{y}e^{-y\sqrt{a^2-1/4}}\sin\left(\frac{y}{2}\right)$
$\ln\left\lvert 1-\frac{a^2}{x^2}\right\rvert$	$\frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[C+\ln(ay)-\cos(ay)\,\mathrm{Ci}(ay)-\sin(ay)\,\mathrm{Si}(ay)]$
$\ln\left(\frac{a^2+(b+x)^2}{a^2+(b-x)^2}\right)$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{y}e^{-ay}\sin(by)$
$\frac{1}{x}\ln\lvert 1-a^2x^2\rvert$	$-\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Ci}\left(\frac{y}{a}\right)$
$\frac{1}{x}\ln\left\lvert 1-\frac{a^2}{x^2}\right\rvert$	$\sqrt{2\pi}[C+\ln(ay)-\mathrm{Ci}(ay)]$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left\lvert\frac{y+a}{y-a}\right\rvert$

Продолжение

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$
$\frac{\sin(ax)}{x^2}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,y, & 0<y<a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a, & y>a\end{cases}$
$\frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin y, & 0\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & y\geqslant\pi\end{cases}$
$\frac{\sin(ax)}{b^2+x^2}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-ab}}{b}\,\mathrm{sh}(by), & 0<y<a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-by}}{b}\,\mathrm{sh}(ab), & y>a\end{cases}$
$e^{-bx}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,b\left[\frac{1}{b^2+(a-y)^2}-\frac{1}{b^2+(a+y)^2}\right]$
$\frac{e^{-bx}\sin(ax)}{x}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\left(\frac{b^2+(y+a)^2}{b^2+(y-a)^2}\right)$
$e^{-bx^2}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2b}}\,e^{-(a^2+y^2)/(4b)}\,\mathrm{sh}\left(\frac{ay}{2b}\right)$
$\frac{\sin^2(ax)}{x}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & 0<y<2a,\\ \frac{1}{8}\sqrt{2\pi}, & y=2a,\\ 0, & y>2a\end{cases}$
$\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}$	$\begin{cases}0, & 0<y<a-b,\\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & a-b<y<a+b,\\ 0, & y>a+b\end{cases}$
$\frac{\sin^2(ax)}{x^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[(y+2a)\ln(y+2a)+(y-2a)\ln\lvert y-2a\rvert-2y\ln y]$
$\frac{\sin^2(ax)}{x^3}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,y\left(2a-\frac{y}{2}\right), & 0<y<2a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a^2, & y>2a\end{cases}$
$\frac{\cos(ax)}{x}$	$\begin{cases}0, & 0<y<a,\\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & y=a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y>a\end{cases}$

Продолжение

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$
$\frac{x\cos(ax)}{b^2+x^2}$	$\begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ab}\,\mathrm{sh}(by), & 0<y<a,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-by}\,\mathrm{ch}(ab), & y>a\end{cases}$
$\sin(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right)C\left(\frac{y^2}{4a}\right)+\sin\left(\frac{y^2}{4a}\right)S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\frac{\sin(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[C\left(\frac{y^2}{4a}\right)-S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\sin\left(\frac{y^2}{4a}\right)C\left(\frac{y^2}{4a}\right)-\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right)S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\frac{\cos(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[C\left(\frac{y^2}{4a}\right)+S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$e^{-a\sqrt{x}}\sin(a\sqrt{x})$	$\frac{a}{2y\sqrt{y}}\,e^{-a^2/(2y)}$

Преобразование Фурье. В большинстве случаев оно может быть составлено указанным в 4.4.2.1 способом из косинус-преобразования Фурье и синус-преобразования Фурье.

$f(x)$	$F(y)=\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$
$\begin{cases} A, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x<a \text{ и } x>b\end{cases}$	$\frac{iA}{y\sqrt{2\pi}}(e^{iay}-e^{iby})$
$\begin{cases} x^n, & 0\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x<0 \text{ и } x>b\end{cases}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[n!\,(-iy)^{-(n+1)}-e^{iby}\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!}(-iy)^{m-n-1}\,b^m\right]$
$\frac{1}{(a+ix)^{\nu}}$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu)}y^{\nu-1}e^{-ay}, & y>0,\\ 0, & y<0\end{cases}$
$\frac{1}{(a-ix)^{\nu}}$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\begin{cases} 0, & y>0,\\ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu)}(-y)^{\nu-1}e^{ay}, & y<0\end{cases}$

Обозначения, используемые в таблице:

C – постоянная Эйлера ($C=0{,}57721\ldots$);

$\Gamma(z)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt$, $\mathrm{Re}\,z>0$ (*гамма-функция*);

$J_\nu(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ (*функции Бесселя*);

$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\pi(\sin(\pi\nu))^{-1}[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)]$,

где $I_\nu(z)=e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(ze^{i\pi/2})$ (*функции Бесселя мнимого аргумента*);

$$\left.\begin{aligned} C(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt,\\ S(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\end{aligned}\right\}\ (\textit{интегралы Френеля});$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, \\ \operatorname{si}(x) &= -\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \operatorname{Si}(x) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}$$

(*интегральный синус*);

$$\operatorname{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt \text{ (интегральный косинус).}$$

4.4.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

4.4.3.1. Общие понятия. *Преобразование Лапласа* является интегральным преобразованием, которое тесно связано с преобразованием Фурье и обладает аналогичными свойствами. Оно очень часто используется в технических дисциплинах, в особенности в электротехнике и технической кибернетике. Комплекснозначная функция $f(x)$ действительного переменного t называется *оригиналом*, если она определена при $t \geqslant 0$, интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет экспоненциальный порядок:

$$|f(t)| \leqslant Ke^{st}, \qquad s = \text{const}. \tag{4.93}$$

Функцию

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{4.94}$$

где p — комплексный параметр, называют *изображением* (иногда трансформантой) оригинала $f(t)$ и пишут $F(p) = L[f(t)]$. Интеграл (4.94) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p > s$, где s — постоянная из (4.93). Следовательно, изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re}\, p > s$. Изображение $F(p)$ в этой полуплоскости является аналитической функцией от p, которая стремится к нулю при $\operatorname{Re} p \to +\infty$ и остается ограниченной в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant s_0$, где $s_0 > s$.

Следующие девять теорем являются основанием для широкой применимости преобразования Лапласа. Названия теорем соответствуют операциям, которые выполняются над функциями-оригиналами.

1. Теорема о сложении (линейность преобразования): $L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)]$.

2. Теорема о свертке: $L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau\right] = L[f_1(t)]\,L[f_2(t)]$, т. е. свертке во множестве оригиналов соответствует обычное произведение функций во множестве изображений.

3. Теорема об интегрировании: $L\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{p}F(p)$, $F(p) = L[f]$. Следовательно, интегрированию в области оригиналов соответствует деление изображения на независимое переменное.

4. Теорема о дифференцировании: $L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f_0 - \ldots - p f_0^{(n-2)} - f_0^{(n-1)}$, где $f_0^{(k)} = \lim\limits_{t \to +0} \frac{d^k f(t)}{dt^k}$. Эта теорема является одним из важнейших обоснований описанных в 4.4.3.2 применений преобразования Лапласа к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями.

5. Теорема о запаздывании: $L[f(t-b)] = e^{-bp} L[f(t)]$.

6. Теорема о подобии: При $a > 0$ имеет место формула $L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

7. Теорема о смещении: $L[e^{-\lambda t} f(t)] = F(p + \lambda)$.

8. Теорема об умножении: $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

9. Теорема о делении: Если для $\frac{1}{t}f(t)$ выполнимо преобразование Лапласа, то имеет место формула $L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$.

Пример. Справедлива формула $L(1) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$. Для того чтобы получить отсюда $L[t^n]$, принимаем во внимание, что $\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}$. Тогда по теореме об умножении получаем, что $L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$. Отсюда, согласно теореме о смещении, имеем $L[e^{-\lambda t} t^n] = \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$.

Этот пример показывает, что зачастую изображения можно находить без сложного вычисления интеграла Лапласа, а лишь путем использования теорем 1–9.

Обратное преобразование Лапласа. Оригинал при преобразовании Лапласа определяется по своему изображению однозначно. Имеет место следующая теорема об обращении преобразования Лапласа (**комплексная формула обращения**).

Если $F(p)$ — аналитическая функция в области $\operatorname{Re}\, p \geqslant s$, $\lim\limits_{|p| \to \infty} F(p) = 0$ равномерно относительно $\arg p$ и $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)||dp| < +\infty$, то $F(p)$ является изображением для функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp.$$

Особую значимость для приложений имеет обратное преобразование дробно-рациональных функций относительно p. Такую функцию достаточно разложить на элементарные дроби и, воспользовавшись теоремой о сложении, ограничиться обратным преобразованием элементарных дробей. Функцию-оригинал для элементарной дроби можно взять из таблиц, например из 4.4.3.3.

Пример 1. Найдем функцию-оригинал $F(p) = \frac{1}{p(p+a)}$, $a \neq 0$; $\frac{1}{p(p+a)} = \frac{1}{ap} - \frac{1}{a(p+a)}$. Оригинал находится по теореме о сложении при помощи таблицы из 4.4.3.3: $f(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$.

4.4.3.2. Применение преобразования Лапласа к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Большое преимущество при решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений посредством преобразования Лапласа состоит в том, что искомое частное решение получают непосредственно, а не подгоняют общее решение к заданным начальным условиям.

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами ($a_0 \neq 0$, $n > 0$) $a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)$ и начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$. Применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению с учетом теоремы о дифференцировании и начальных условий приводит во множестве изображений к уравнению вида

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) Y(p) = F(p) + y_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + y'_0(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + y_0^{(n-2)}(a_0 p + a_1) + y_0^{(n-1)} a_0$$

или вида

$$Q(p) Y(p) = F(p) + P(p);$$

при этом $Y(p) = L[y(t)]$ – изображение искомого решения, $F(p) = L[f(t)]$ – изображение правой части исходного уравнения, а $Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ – характеристический многочлен дифференциального уравнения. Отсюда получается, что

$$Y(p) = F(p) \frac{1}{Q(p)} + \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются оригиналами функций $1/Q(p)$ и $P(p)/Q(p)$ (они могут быть получены разложением на элементарные дроби), то для искомого решения, согласно теореме о свертке, получается формула

$$y(t) = \int_0^t f(t-\tau) y_1(\tau) d\tau + y_2(t).$$

При этом $F(p)$ вычислять не нужно.

Совершенно аналогично можно решать систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если задана система уравнений

$$y'_1(t) + a_{11} y_1(t) + \ldots + a_{1n} y_n(t) = f_1(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y'_n(t) + a_{n1} y_1(t) + \ldots + a_{nn} y_n(t) = f_n(t)$$

с начальными условиями $y_1(0), \ldots, y_n(0)$, то преобразованием Лапласа она переводится в систему n линейных алгебраических уравнений относительно n искомых изображений $Y_1(p), \ldots, Y_n(p)$:

$$(p + a_{11}) Y_1(p) + a_{12} Y_2(p) + \ldots + a_{1n} Y_n(p) = F_1(p) + y_1(0),$$
$$a_{21} Y_1(p) + (p + a_{22}) Y_2(p) + \ldots + a_{2n} Y_n(p) = F_2(p) + y_2(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1} Y_1(p) + a_{n2} Y_2(p) + \ldots + (p + a_{nn}) Y_n(p) = F_n(p) + y_n(0).$$

Решения $Y_1(p), \ldots, Y_n(p)$ этой системы должны быть затем подвергнуты обратному преобразованию для того, чтобы получить решения $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ исходной задачи Коши.

Пример 2. $y'(t) + 2y(t) = f(t)$, где $f(t) = 2[(t+1)e^{t^2} + (1+2t)]$, $y(0) = 1$. Преобразование Лапласа приводит к уравнению $pY(p) - 1 + 2Y(p) = L[f(t)]$, откуда $Y(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{L[f]}{p+2}$. Согласно таблице из 4.4.3.3 и теореме о свертке, получаем, что

$$y(t) = e^{-2t} + 2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}[(\tau+1)e^{\tau^2} + (1+2\tau)]d\tau.$$

Вычисление интеграла завершает поиск решения задачи:

$$y(t) = e^{t^2} + 2t.$$

Пример 3. $y^{(4)}(t) + 2y'''(t) + 2y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$, где $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 4$. Преобразование Лапласа дает

$$(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1) Y(p) = -2p.$$

Характеристический многочлен имеет корень -1 кратности два и простые корни $\pm i$. Следовательно, $Y(p) = \frac{-2p}{(p^2+1)(p+1)^2}$. Разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{-2p}{(p^2+1)(p+1)^2} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Сравнивая коэффициенты, находим $A = 0$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 0$, т. е. $Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}$. По таблице из 4.4.3.3 получается в итоге

$$y(t) = te^{-t} - \sin t.$$

Пример 4. Решить задачу Коши для системы

$$y'_1(t) + y_2(t) = e^t, \qquad y_1(0) = 1,$$
$$y'_2(t) - y_1(t) = -e^t, \qquad y_2(0) = 1.$$

Так как правые части системы имеют простой вид, то она может быть легко преобразована:

$$pY_1(p) + Y_2(p) = \frac{1}{p-1} + 1, \quad pY_2(p) - Y_1(p) = -\frac{1}{p-1} + 1,$$

т. е.

$$pY_1(p) + Y_2(p) = \frac{p}{p-1}, \quad pY_2(p) - Y_1(p) = \frac{p-2}{p-1}.$$

Отсюда получаем

$$Y_1(p) = \frac{p^2 - p + 2}{(p-1)(p^2+1)}, \quad Y_2(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Раскладывая на простейшие дроби:

$$\frac{p^2 - p + 2}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1},$$

и приравнивая коэффициенты, получаем $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, т. е. $Y_1(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2+1}$. Из таблицы находим $y_1(t) = e^t - \sin t$. Оригинал $y_2(t)$ непосредственно указан в таблице: $y_2(t) = \cos t$.

4.4.3.3. Таблица обратного преобразования Лапласа дробно-рациональных функций. Функции в таблице расположены по возрастанию степени знаменателя. Таблица является полной вплоть до степени знаменателя, равной 3, а также содержит несколько функций, знаменатели которых – многочлены степени 4.

$L[f(t)]$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{sh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch}(at)$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{(p+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{a}e^{-bt}\sin(at)$
$\frac{p}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\left(\cos(at)-\frac{b}{a}\sin(at)\right)$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at}+at-1)$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab(a-b)}[(a-b)+be^{-at}-ae^{-bt}]$
$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[(c-b)e^{-at}+(a-c)e^{-bt}+(b-a)e^{-ct}]$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[a(b-c)e^{-at}+b(c-a)e^{-bt}+c(a-b)e^{-ct}]$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[a^2(c-b)e^{-at}+b^2(a-c)e^{-bt}+c^2(b-a)e^{-ct}]$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}(e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}\{-ae^{-at}+[a+bt(b-a)e^{-bt}]\}$
$\frac{p^2}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{1}{(b-a)^2}[a^2e^{-at}+b(b-2a-b^2t+abt)e^{-bt}]$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$e^{-at}t\left(1-\frac{a}{2}t\right)$

$L[f(t)]$	$f(t)$
$\frac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\frac{a^2}{2}t^2\right)$
$\frac{1}{p[(p+b)^2+a^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos(at)+\frac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos(at))$
$\frac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-at}+\frac{a}{b}\sin(bt)-\cos(bt)\right]$
$\frac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}[-ae^{-at}+a\cos(bt)+b\sin(bt)]$
$\frac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2}(a^2e^{-at}-ab\sin(bt)+b^2\cos(bt))$
$\frac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}\cos(ct)+\frac{a-b}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\frac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos(ct)-\frac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\frac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[a^2e^{-at}+((a-b)^2+c^2-a^2)e^{-bt}\cos(ct)-\right.$ $\left.-\left(ac+b\left(c-\frac{(a-b)b}{c}\right)\right)e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{1}{6}t^3$
$\frac{1}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}t+\frac{1}{2a}t^2-\frac{1}{a^3}e^{-at}$
$\frac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\frac{a+b}{a^2b^2}+\frac{1}{ab}t+\frac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\frac{1}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
$\frac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}t(1+e^{-at})+\frac{2}{a^3}(e^{-at}-1)$
$\frac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\frac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\frac{2}{(a-b)}\right)+e^{-bt}\left(t-\frac{2}{a-b}\right)\right]$
$\frac{1}{(p+a)^4}$	$\frac{1}{6}t^3e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^4}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}-\frac{a}{6}t^3e^{-at}$
$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\sin(at)-\frac{1}{b}\sin(bt)\right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[\cos(at)-\cos(bt)]$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a\sin(at)+b\sin(bt)]$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a^2\cos(at)+b^2\cos(bt)]$
$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}t\sin(at)$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2}(2\cos(at)-at\sin(at))$
$\frac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\frac{e^{-bt}}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{1}{a}\sin(at)\right)$

5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5.1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

5.1.1.1. Случайные события. Многие явления в природе, технике, экономике и в других областях носят случайный характер, т. е. невозможно точно предсказать, как явление будет происходить. Оказывается, однако, что течение и таких явлений может быть описано количественно, если только они наблюдались достаточное число раз при неизменных условиях. Так, например, нельзя при бросании монеты предсказать, выпадет «герб» или «цифра». Однако если бросать монету очень часто, то можно заметить, что отношение числа бросаний с выпадением «цифры» к общему числу бросаний мало отличается от 1/2 и тем менее отклоняется от 1/2, чем больше совершено бросаний.

Теория вероятностей дает математическую модель для описания случайных явлений такого рода в объективной действительности. Так как многие реальные процессы подвержены случайным воздействиям, то основы этой теории важно знать специалистам, занимающимся естественными, техническими, а также и общественными науками.

Случайный эксперимент, или *опыт*, есть процесс, при котором возможны различные исходы, так что заранее нельзя предсказать, каков будет результат. Опыт характеризуется тем, что его в принципе можно повторить сколько угодно раз. Особое значение имеет множество возможных, взаимно исключающих друг друга исходов опыта.

Возможные, исключающие друг друга исходы опыта называются его *элементарными событиями*. Множество элементарных событий обозначается через E.

Пример 1. *Однократное бросание игральной кости.* Возможные исключающие друг друга исходы этого опыта – выпадения одного из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Множество E состоит из шести элементарных событий e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, причем элементарное событие e_i означает: выпадает число i.

Пример 2. *Одновременные бросания двух игральных костей.* Множество E элементарных событий состоит здесь из 36 элементов $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{66}$, причем элементарное событие e_{ij} означает: на первой кости выпадает i, а на второй j.

Пример 3. Определение длительности службы электрической лампы. Элементарные события можно отождествить с множеством положительных чисел, дополненным символом $+\infty$.

Помимо элементарных событий, часто интересны события более сложной природы, например в случае игральных костей событие «выпадает четное число» или в случае определения длительности службы лампы событие «длительность службы не менее 3000 часов».

Пусть осуществляется некоторый опыт, и пусть E – множество его элементарных событий. Каждое подмножество $A \subseteq E$ называется *событием*. Событие A *происходит* тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий, из которых состоит A.

Пример 4. В примере 1 подмножество $A = \{e_2, e_4, e_6\}$ образует событие «выпадает четное число». Событие «выпадает четное число» в случае двух игральных костей происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий, содержащихся в подмножестве $A = \{e_{ij} \mid i+j \text{ четно}\}$. В примере 2 подмножество $A = \{e_{46}, e_{64}, e_{55}, e_{56}, e_{65}, e_{66}\}$ множества E может быть интерпретировано как событие «сумма выпавших очков не менее 10».

В примере 3 $A = (3000, +\infty]$ может быть интерпретировано как событие «электрическая лампа служит больше 3000 часов».

Подмножества E, а следовательно, и само E, и пустое множество $\varnothing$ интерпретируются, согласно общему определению, как события. Так как E состоит из всех элементарных событий, а при каждом опыте обязательно происходит одно из элементарных событий, то, таким образом, E происходит всегда. Такое событие называется *достоверным событием*; его мы будем обозначать буквой U. Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементарных событий и, следовательно, никогда не происходит. Такое событие называют *невозможным событием*; его мы будем обозначать буквой V.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – события, т. е. подмножества некоторого фиксированного множества E элементарных событий. Тогда объединение $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ снова есть событие, так как оно является подмножеством E. Объединение $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Событие $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ называют *суммой событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Его часто обозначают $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Точно так же пересечение $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$ событий A_i есть снова некоторое событие. Пересечение $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$ происходит тогда и только тогда, когда происходят одновременно все A_i. Событие $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$ называется *произведением событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Его часто обозначают так: $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Пример 5. Пусть при определении длительности жизни A_1 есть событие «продолжительность жизни лежит между 0 и t_1», а A_2 – событие «продолжительность жизни

лежит между t_1 и t_2»; тогда $A_1 \bigcup A_2$ есть событие «продолжительность жизни лежит между 0 и t_2».

Пример 6. Если при одновременном бросании двух костей A_1 есть событие «сумма очков не менее 11», а A_2 – событие «выпадает одинаковое количество очков», то $A_1 \bigcap A_2$ есть событие «выпадают две шестерки».

Пример 7. Пусть в случае двух игральных костей A_1 есть событие «сумма выпавших очков не более 2», а A_2 – событие «сумма выпавших очков не менее 5»; тогда $A_1 \bigcap A_2$ есть невозможное событие: $A_1 \bigcap A_2 = V$.

Два события A_1 и A_2 называются *несовместными*, если $A_1 \bigcap A_2 = V$, т. е. если события A_1 и A_2 не могут произойти одновременно.

Если A – некоторое событие, то дополнение $\bar{A} = E \setminus A$ также является подмножеством E, т. е. некоторым событием. Событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит A; $\bar{A}$ называется *событием, противоположным* (*дополнительным*) A. События A и $\bar{A}$ всегда несовместны: $A \bigcap \bar{A} = V$.

Пример 8. Если при каком-нибудь измерении A есть событие «измеренная величина не менее α», то $\bar{A}$ есть событие «измеренная величина менее α».

Для действий со случайными событиями (суммы, произведения, дополнения) справедливы формулы элементарной теории множеств:

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \qquad A \bigcap B = B \bigcap A$$

(*коммутативность*),

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C), (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$$

(*ассоциативность*),

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C),$$
$$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$$

(*дистрибутивность*),

$$\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcap \bar{B}, \quad \overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$$

(*формулы де Моргана*),

$$A \bigcup \bar{A} = U, \quad A \bigcap \bar{A} = V.$$

Для того чтобы построить теорию вероятностей, нужно событиям поставить в соответствие вероятности, которые будут давать количественную оценку возможности их осуществления. Если E несчетно (как, например, в опыте «определение продолжительности службы электрической лампы»), то не всем подмножествам E разумно ставить в соответствие вероятность. Нужно ограничиться определенным классом событий. События этого класса называются *случайными событиями*. Они являются предметом теории вероятностей. Если E конечно, то этот класс совпадает с классом всех событий. Оказывается, что класс случайных событий всегда можно выбрать так, чтобы, во-первых, не появилось никаких математических трудностей при введении вероятностей и, во-вторых, чтобы все интересующие нас на практике события находились в выбранном классе, т. е. являлись случайными событиями в математическом смысле. Поэтому для естествоиспытателя и инженера важно знать, что все интересующие его случайные события являются также случайными в смысле математической теории, так что изложенная ниже аксиоматика теории вероятностей применима к ним.

5.1.1.2. Аксиомы теории вероятностей. Пусть опыт повторяется n раз и при этом подсчитывается, как часто происходит интересующее нас событие. Допустим, что оно произошло m раз. Отношение $\frac{m}{n} = W_n(A)$ называется *относительной частотой* (или кратко – *частотой*) случайного события A в n опытах. При этом $0 \leqslant W_n(A) \leqslant 1$. Практика показывает, что во многих случаях при увеличении n частота приближается к некоторому постоянному значению. В свое время понятие вероятности случайного события пробовали определить как предел частоты. Это привело, однако, к теоретическим и математическим трудностям, которые не удавалось преодолеть. В современной теории не делается попыток дать определение понятию вероятности; его считают основным понятием, удовлетворяющим некоторым аксиомам. Формулировка аксиом, принадлежащая А. Н. Колмогорову, опирается на следующие свойства частоты, которые можно рассматривать как опытные факты:

1. Для больших n частота $W_n(A)$ колеблется все меньше около определенного значения.

2. $W_n(U) = 1$.

3. $W_n(A \bigcup B) = W_n(A) + W_n(B)$, если A и B несовместны.

Аксиомы теории вероятностей.

1. Каждому случайному событию A поставлено в соответствие число $P(A)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, которое называют *вероятностью* A.

2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(U) = 1$.

3. Аксиома аддитивности. Если A_1, A_2, …, A_n, … – *попарно несовместные* случайные события, т. е. $A_i \bigcap A_j = V$ при $i \neq j$, то

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i). \tag{5.1}$$

Для конечного числа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ аксиома аддитивности дает соотношение

$$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n);$$

в частности,

$$1 = P(U) = P(U \bigcup V) = P(U) + P(V) = 1 + P(V),$$

откуда следует, что $P(V) = 0$, т. е. вероятность невозможного события равна нулю. Из (5.1) следует, что $P(A \bigcup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, так как A и $\bar{A}$ несовместны. Учитывая, что $A \bigcup \bar{A} = U$, и аксиому 2, получаем

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{5.2}$$

Для *произвольных* (не обязательно попарно несовместных) случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеет место неравенство

$$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{5.3}$$

Фактическое определение вероятности некоторого случайного события чисто теоретически часто невозможно. В этих случаях необходимо произвести достаточное число испытаний и принять относительную частоту рассматриваемого события в качестве приближенного значения вероятности. Так, например, нет ни математической, ни биологической теории, которая позволяет вычислить априори вероятность $P(A)$ случайного события «рождение близнецов». Для определения $P(A)$ нужно использовать статистику большого числа рождений и под-

считать, как часто происходило это событие. Тогда соответствующую частоту можно приблизительно принять за вероятность $P(A)$. Определение $P(A)$ по частоте иногда называется «статистическим определением» вероятности. Речь здесь, однако, идет не об определении вероятности, а об ее оценке (см. 5.2.2).

5.1.1.3. Классическое определение вероятности события. Если опыт таков, что он подразделяется только на конечное число элементарных событий, которые к тому же являются равновероятными, то говорят, что речь идет о классическом случае. Для опытов этого типа теорию вероятностей разрабатывал еще Лаплас. Примерами таких опытов являются бросания монеты (два равновероятных элементарных события) или бросания игральной кости (шесть равновероятных элементарных событий). В классическом случае из аксиом для вероятности $P(A)$ события A получаем

$$P(A)=\frac{\text{число элементарных событий, благоприятных для } A}{\text{число всех возможных элементарных событий}}. \tag{5.4}$$

При этом под «элементарными событиями, благоприятными для A», понимают такие события, осуществление которых ведет к осуществлению A; иными словами, это события, из которых состоит A (понимаемое как подмножество E). Лаплас использовал (5.4) для определения вероятности. (Формула (5.4) непригодна, например, в случае фальшивой игральной кости.)

Пример 9. Пусть правильная игральная кость брошена один раз, и пусть A есть событие «выпадает четное число». Благоприятными для A являются элементарные события e_2, e_4, e_6. Всего имеется шесть возможных элементарных событий. Следовательно, $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Пример 10. Пусть одновременно бросают две игральные кости, при этом выигрыш выплачивается, если сумма выпавших очков не менее 10. Как велика вероятность выигрыша? Имеется 36 элементарных событий. Благоприятными для A являются элементарные события e_{46}, e_{64}, e_{55}, e_{56}, e_{65}, e_{66}. При этом e_{ij} означает: на первой кости выпадает i, на второй j. Тогда $P(A) = 6/36 = 1/6$.

В классическом случае часто используют формулы комбинаторики, например, для того, чтобы вычислить число всех возможных элементарных событий.

Пример 11. Игра в лото: угадать «k чисел из n», например спортлото 6 из 49. Какова вероятность получить главный выигрыш, указав k чисел правильно? Имеется одно благоприятное событие, при котором происходит выигрыш главного приза игры. Число всех элементарных событий равно числу возможных выборок k чисел из n чисел без учета порядка и без повторов, т. е. равно C_n^k. Таким образом, вероятность главного выигрыша в спортлото равна $\frac{1}{C_{49}^6}=\frac{1}{13983816}$.

5.1.1.4. Условные вероятности. Вероятность некоторого случайного события A, как правило, изменяется, если уже известно, что произошло некоторое другое случайное событие B. Вероятность A при условии, что событие B с вероятностью $P(B) \neq 0$ уже произошло, обозначается $P(A/B)$ и называется *условной вероятностью* A при условии B.

Пример 12. Пусть одновременно бросают две игральные кости. Пусть A – событие «сумма очков не менее 10», B – событие «сумма очков четная». Если известно, что B произошло, то для A имеется 18 возможных элементарных событий (например, e_{11} возможно, а e_{12} нет); из них благоприятными для A являются e_{46}, e_{64}, e_{55}, e_{66}. Следовательно, $P(A/B) = 4/18 = 2/9$.

Пример 13. Пусть имеются две урны. В первой находятся пять белых и пять черных шаров, во второй – один белый и девять черных. Опыт состоит в том, что наугад выбирается урна и наугад из нее вынимается шар. Пусть B есть событие «вынутый шар белый» и A_i – события «шар вынимается из i-й урны» ($i = 1, 2$). Тогда $P(B/A_1) = 5/10 = 1/2$, $P(B/A_2) = 1/10$.

Условная вероятность удовлетворяет следующим соотношениям (которые можно считать определением):

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad P(B)\neq 0, \tag{5.5}$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \quad P(A)\neq 0. \tag{5.6}$$

Если их разрешить относительно $P(A\cap B)$, то получают правило умножения:

$$P(A\cap B)=P(B)\,P(A/B)=P(A)\,P(B/A), \tag{5.7}$$

т. е. вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Два случайных события A и B называются *независимыми*, если осуществление одного не влияет на вероятность осуществления другого, т. е. если

$$P(A/B)=P(A). \tag{5.8}$$

Тогда правило умножения имеет вид

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B), \tag{5.9}$$

т. е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей. Так как формулы (5.8) и (5.9) эквивалентны, то для определения понятия «независимость двух случайных событий» часто используется соотношение (5.9).

Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для каждого m и каждой m-комбинации $i_1, \ldots, i_m$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$, выполняется соотношение

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m})=P(A_{i_1})\,P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_m}).$$

Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно независимыми*, если для произвольных i, j ($i \neq j$) A_i и A_j независимы.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость, но не наоборот.

5.1.1.5. Полная вероятность. Формула Байеса. Предположим, что достоверное событие E можно представить в виде суммы n попарно несовместных событий, т. е. $U = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$, где $A_i\cap A_j = V$ при $i \neq j$. Тогда для любого случайного события B выполнено соотношение

$$B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_n\cap B).$$

Согласно аксиоме аддитивности, отсюда следует, что $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)$. Если применить формулу (5.7), то получим

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,P(B/A_i). \tag{5.10}$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности.*

Пример 14. Пусть даны три урны I типа: два белых и шесть черных шаров; одна урна II типа: один белый и восемь черных шаров. Пусть наудачу выбирается урна, а оттуда — шар. Обозначим через B событие «вынутый шар — белый»; его вероятность $P(B)$. Обозначим через A_1 событие «выбрана урна I типа», а через A_2 — событие «выбрана урна II типа». Тогда $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, так как $A_1 \cap A_2 = V$. Следовательно,

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2).$$

Но $P(A_1) = 3/4$, $P(A_2) = 1/4$; $P(B/A_1) = 2/8 = 1/4$, $P(B/A_2) = 1/9$. Окончательно:

$$P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} = \frac{31}{144}.$$

Пусть предпосылки закона полной вероятности выполнены. Тогда можно вычислить вероятность события A_i при условии, что событие B произошло. Для этого служит *формула Байеса,* или *формула вероятности гипотез*:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}. \qquad (5.11)$$

Пример 15. Проводится тот же эксперимент, что и в примере 14. Пусть вынут белый шар. Какова вероятность того, что он вынут из урны I типа?

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}} = \frac{27}{31}.$$

5.1.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Действительное переменное, которое в зависимости от исхода опыта, т. е. в зависимости от случая, принимает различные значения, называется *случайной величиной.*

Пусть X — некоторая случайная величина. *Функцией распределения* $F(x)$ случайной величины X называется функция

$$F(x) = P(X < x). \qquad (5.12)$$

Значение функции распределения в точке x_0, таким образом, равно вероятности того, что случайная величина принимает значение, меньшее x_0. В теории вероятностей случайная величина полностью характеризуется своей функцией распределения, т. е. может рассматриваться как заданная, если задана ее функция распределения. При помощи функции распределения можно указать вероятность того, что случайная величина попадает в заданный полуоткрытый промежуток:

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \qquad (5.13)$$

Функция распределения $F(x)$ произвольной случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

2) $F(x)$ монотонно не убывает, т. е. при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

3) $F(x)$ непрерывна слева.

5.1.2.1. Дискретные случайные величины. Случайная величина X называется *дискретной,* если она может принимать только конечное или счетное множество значений. Таким образом, она характеризуется значениями $x_1, x_2, \ldots$, которые она может принимать, и вероятностями $p_i = P(X = x_i)$, с которыми она принимает эти значения и которые должны удовлетворять условию $\sum_i p_i = 1$. Однозначное отображение множества x_i на множество p_i рассматривается как *функция вероятности* дискретной случайной величины. Для функции распределения дискретной случайной величины имеем

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \qquad (5.14)$$

Суммирование производится по всем i, для которых $x_i < x$. Таким образом, $F(x)$ является

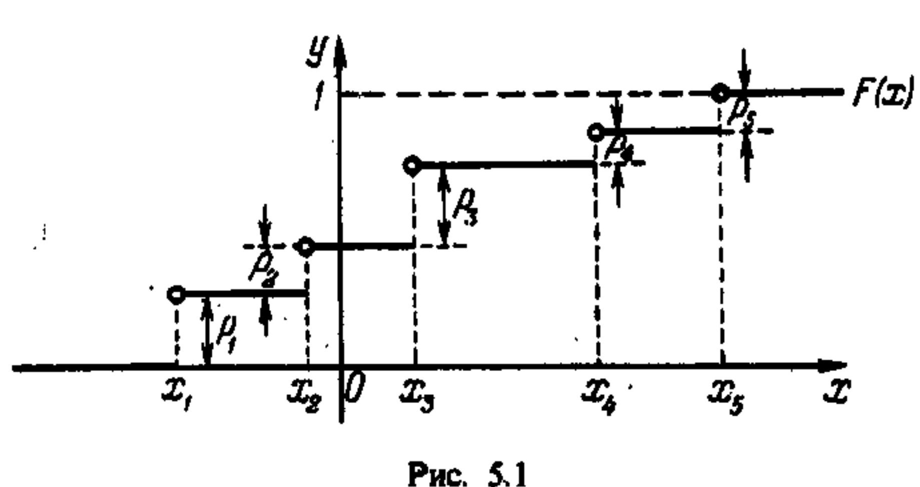


Рис. 5.1

ступенчатой функцией со скачками высотой p_i в точках x_i (рис. 5.1).

5.1.2.1.1. Индикатор события. Пусть A — некоторое случайное событие, где $P(A) = p$. Случайная величина

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ происходит,} \\ 0, & \text{если } A \text{ не происходит,} \end{cases}$$

называется *индикатором* A (*характеристической случайной величиной*). Возможными значениями являются 0 и 1; соответствующие вероятности: $p_0 = P(X = 0) = 1 - p$, $p_1 = P(X = 1) = p$.

5.1.2.1.2. Биномиальное распределение. Пусть некоторый опыт повторяется n раз и отдельные опыты этой серии не зависят друг от друга. Пусть в каждом опыте может произойти или не произойти событие A, а вероятность его осуществления в отдельном опыте не зависит от номера опыта и равна p. Пусть $X^{(n)}$ — число наступлений события A в такой серии из n опытов. Очевидно, что возможные значения случайной величины $X^{(n)}$ суть числа $0, 1, 2, \ldots, n$. Вероятности $P(n, k) = P(X^{(n)} = k)$ вычисляются по *биномиальному закону*:

$$P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \qquad (5.15)$$

Случайная величина называется *биномиально распределенной с параметрами* n и p, если возможные значения $0, 1, \ldots, n$ она принимает с вероятностями $P(n, k)$, задаваемыми формулой (5.15). Параметры n и p полностью определяют биномиальное распределение. На рис. 5.2 показаны «полигоны» биномиальных распределений для $n = 20$ и различных p. При этом соответствующие

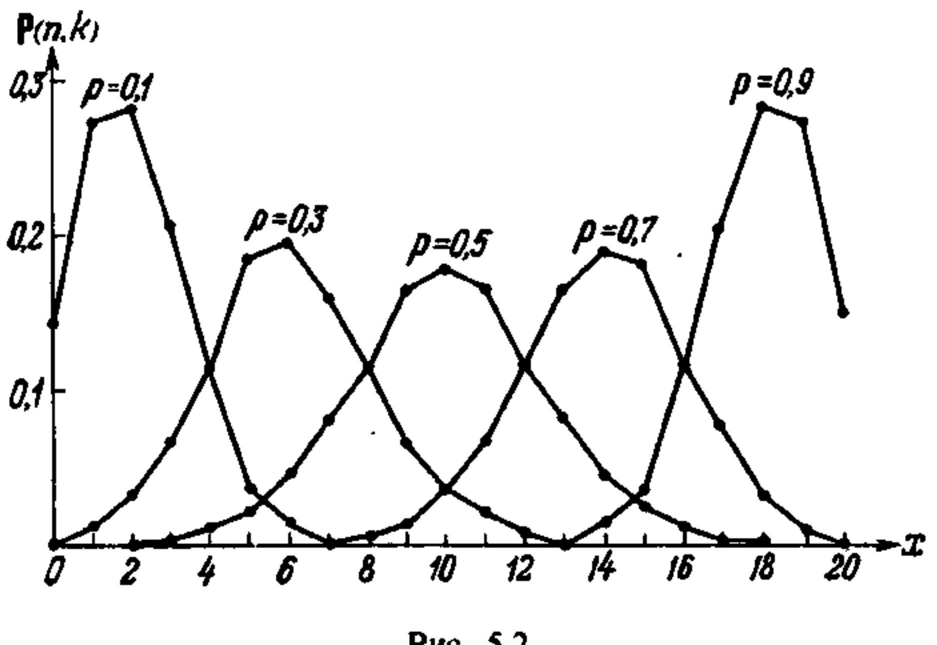


Рис. 5.2

$P(n, k)$ отложены по ординате и соединены ломаной линией.

Начиная с $P(n, 0)$, вероятности $P(n, k)$ могут быть легко вычислены по следующей рекуррентной формуле:

$$\frac{P(n, k)}{P(n, k-1)} = \frac{(n-k+1)p}{kq}. \qquad (5.16)$$

Пример 16. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Как велика вероятность того, что из десяти наугад выбранных новорожденных будет шесть мальчиков? Предположение независимости может считаться выполненным. Следовательно, для искомой вероятности имеем $P(A) = P(10, 6) = C_{10}^{6}(0{,}515)^6(0{,}485)^4 \approx 0{,}2167$.

Пример 17. В урне N шаров, из которых ровно M белых. Из урны n раз вынимался шар и после регистрации снова возвращался в урну. Какова вероятность события, что белый шар был зарегистрирован k раз? Эта вероятность $P(n, k)$ вычисляется при помощи биномиального закона (5.15):

$$P(n, k) = C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \qquad (5.17)$$

Биномиальный закон описывает в самой общей форме осуществление признака в *выборке объемом n с возвратом.*

Пример 18. Пусть вероятность получения бракованного изделия равна 0,01. Какова вероятность того, что среди 100 изделий окажется не более трех бракованных? Согласно биномиальному закону и закону сложения, получаем, что

$$P(A) = C_{100}^{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{100} + C_{100}^{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^{99} + C_{100}^{2}(0{,}01)^2(0{,}99)^{98} + C_{100}^{3}(0{,}01)^3(0{,}99)^{97} = 0{,}9816.$$

5.1.2.1.3. Гипергеометрическое распределение. В урне находится N шаров, из которых ровно M белых. Пусть один за другим *без возврата* (или одновременно, что одно и то же) вынимается n ($\leqslant M$) шаров. Тогда вероятность того, что среди этих вынутых n шаров будет k белых, равна

$$P_{N,M}(n, k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \qquad (5.18)$$

Случайная величина называется распределенной гипергеометрически, если возможные значения 0, 1, ..., n она принимает с вероятностями $P_{N,M}(n, k)$, определяемыми формулой (5.18). Числа N, M, n — *параметры распределения.*

Гипергеометрическое распределение, таким образом, описывает осуществление признака *в выборке без возврата.* Если N очень велико по сравнению с n, то не имеет существенного значения, возвращаются шары обратно или нет, и формула (5.18) может быть приближенно заменена формулой (5.17) биномиального распределения.

5.1.2.1.4. Распределение Пуассона. Случайная величина называется *распределенной по закону Пуассона*, если она принимает счетное множество возможных значений 0, 1, 2, ... с вероятностями

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \qquad (5.19)$$

Число λ называется *параметром распределения.*

Распределение Пуассона может использоваться в качестве хорошего приближения биномиального распределения, если n велико, а p мало. Тогда в качестве λ нужно взять np (см. 5.1.5).

Пример 19. Машина проехала 100 000 км. Пусть X — число проколов шины на этом расстоянии. Тогда X можно считать случайной величиной, распределенной по закону Пуассона (с подходящим λ), т. е. вероятность трех проколов шины равна $\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$.

Пример 20. Рассмотрим пример 18. Имеем $n = 100$, $p = 0{,}01$. Таким образом, $100 \cdot 0{,}01 = 1$,

$$P(A) \approx \frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} + \frac{1^3}{3!}e^{-1} = \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 0{,}9810,$$

что дает хорошее совпадение с точным значением, однако вычисляется гораздо быстрее.

Распределение Пуассона затабулировано для различных λ (таблица в 1.1.2.5).

5.1.2.2. Непрерывные случайные величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функцию распределения (*интегральную функцию распределения*) можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (5.20)$$

Неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ называется *плотностью распределения.* Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, то должно выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \qquad (5.21)$$

При заданной плотности вероятности в силу (5.13) и (5.20) вероятность того, что случайная

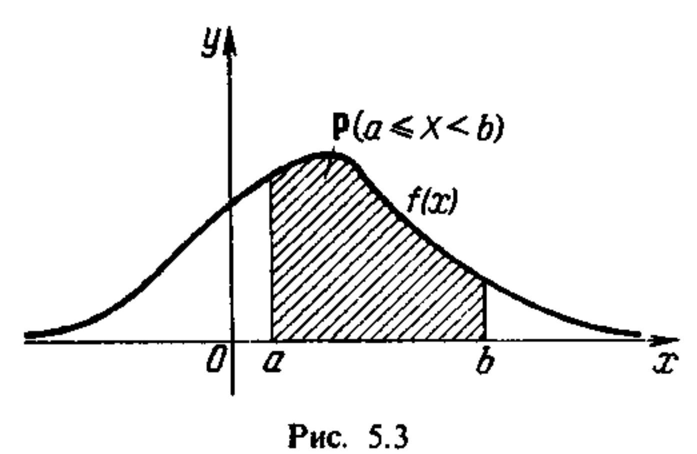


Рис. 5.3

величина попадает в заданный промежуток, равна (рис. 5.3)

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (5.22)$$

Вероятность $P(X = a)$, т. е. вероятность того, что непрерывная случайная величина равна заданному

действительному числу, всегда равна 0. Отметим, что из равенства $P(A) = 0$ не следует, что A является невозможным событием, хотя $P(V) = 0$.

Для любого p из интервала $(0, 1)$ наименьшее число x_p, для которого $F(x_p) = p$, называется p — *квантилью* непрерывной случайной величины x.

5.1.2.2.1. Равномерное распределение. Случайная величина называется *равномерно распределенной* на $[a, b]$, если ее плотность вероятности

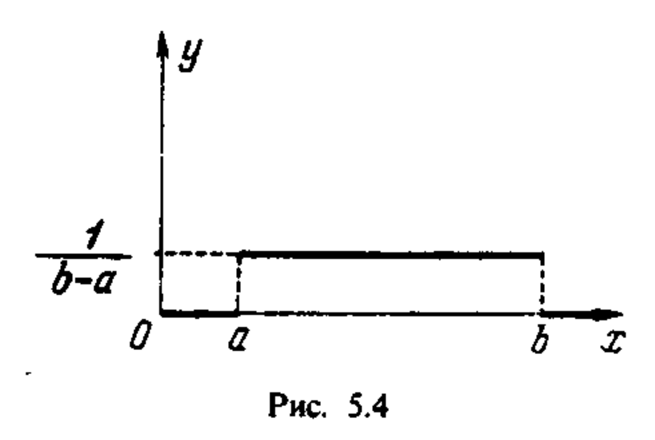


Рис. 5.4

на $[a, b]$ постоянна, а вне $[a, b]$ равна 0 (рис. 5.4). Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, то

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

5.1.2.2.2. Нормальное распределение (распределение Гаусса). Случайная величина называется *распределенной нормально*, если она имеет плотность вероятности следующего вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}; \qquad (5.23)$$

здесь a и σ — *параметры распределения*.

Функция (5.23) представляет собой колоколообразную кривую. Параметр a — точка максимума, через которую проходит ось симметрии, параметр σ — расстояние от этой оси до точки перегиба. Если σ мало, то кривая высокая и заостренная; если σ велико, то она широкая и плоская. Рис. 5.5

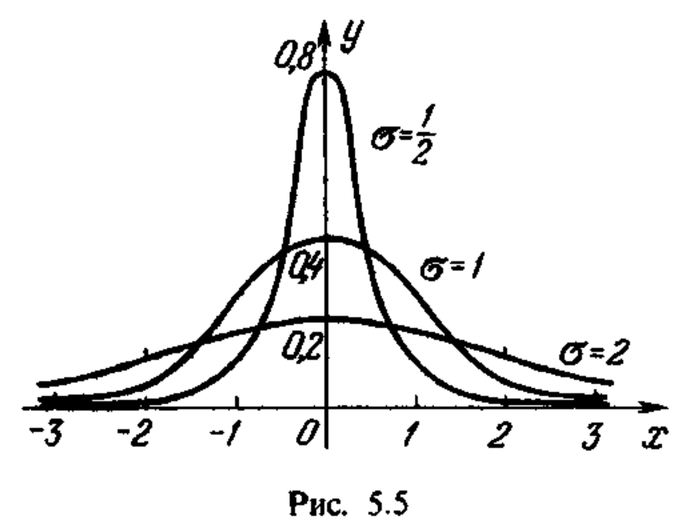


Рис. 5.5

показывает нормальное распределение при $a = 0$ и различных σ.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то говорят, что X *распределено нормально* согласно закону $N(x; a, \sigma)$, и пишут: $X \in N(x; a, \sigma)$. Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ $(a = 0, \sigma = 1)$ называется *плотностью нормированного и центрированного нормального распределения*. Плотность вероятности $\varphi(x)$ и соответствующее распределение $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ затабулированы (см. таблицы в 1.1.2.6.1 и 1.1.2.6.2). Функцию Φ часто называют *гауссовым интегралом ошибок* $\left(\text{таблица в 1.1.2.6.2 дает } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt,\ \Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}\right)$. Особое значение нормального распределения в теории и практике основывается в значительной степени на центральной предельной теореме (см. 5.1.6; там также даны примеры нормального распределения случайной величины).

5.1.2.2.3. Экспоненциальное распределение. Случайная величина называется *экспоненциально распределенной*, если она имеет следующую плотность вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Число λ называется параметром распределения.

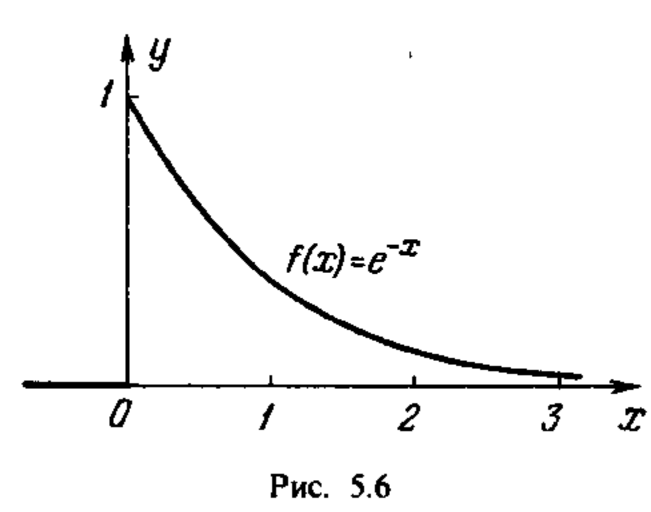


Рис. 5.6

Пример 21. Длительность службы электролампы можно рассматривать с хорошим приближением как экспоненциально распределенную величину. На рис. 5.6 показана плотность вероятности экспоненциального распределения с $\lambda = 1$.

5.1.3. МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

5.1.3.1. Дискретный случай. Пусть X есть дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots$ и $p_k = P(X = x_k)$.

Число $\nu_i = \sum\limits_k x_k^i p_k$ называется (в случае абсолютной сходимости ряда) i-м *начальным моментом* случайной величины X (или ее распределения) $(i = 1, 2, \ldots)$.

Число $\mu_i = \sum\limits_k (x_k - \nu_1)^i p_k$ называется i-м *центральным моментом* X.

Особое значение имеют первый начальный момент ν_1 и второй центральный момент μ_2.

5.1.3.1.1. Математическое ожидание. Первый начальный момент

$$\nu_1 = \sum_k x_k p_k$$

называется *математическим ожиданием* X и обозначается через MX. Математическое ожидание определяет положение центра распределения в следующем смысле: если считать p_k массами, помещенными в точках x_k действительной оси, то MX — координата центра тяжести этой системы.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной a (которую можно считать дискретной случайной вели-

чиной с одним возможным значением a, принимаемым ею с вероятностью 1) равно этой постоянной:

$$Ma = a.$$

2) Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:

$$M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2. \tag{5.24}$$

3) Математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную величину равно произведению постоянной на математическое ожидание случайной величины: $M(aX) = aMX$.

4) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X_1 \cdot X_2) = (MX_1) \cdot (MX_2). \tag{5.25}$$

Пример 22. Биномиальное распределение с параметрами n, p:

$$MX = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np. \tag{5.26}$$

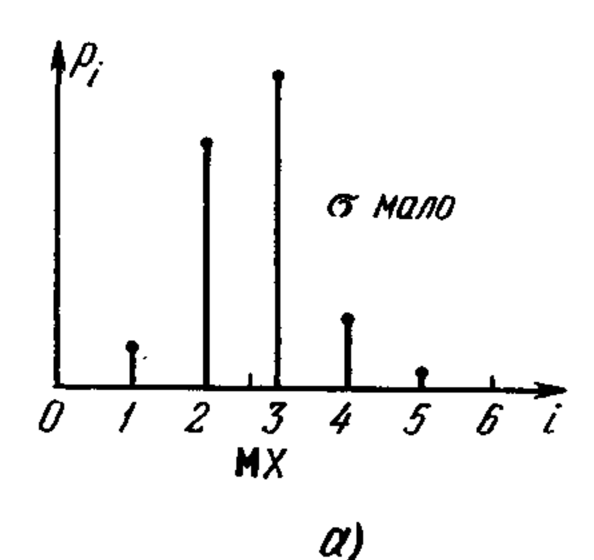
Пример 23. Гипергеометрическое распределение с параметрами N, M, n:

$$MX = \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = n\frac{M}{N}. \tag{5.27}$$

Пример 24. Распределение Пуассона с параметром λ:

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda. \tag{5.28}$$

Таким образом, параметр λ здесь имеет значение математического ожидания.



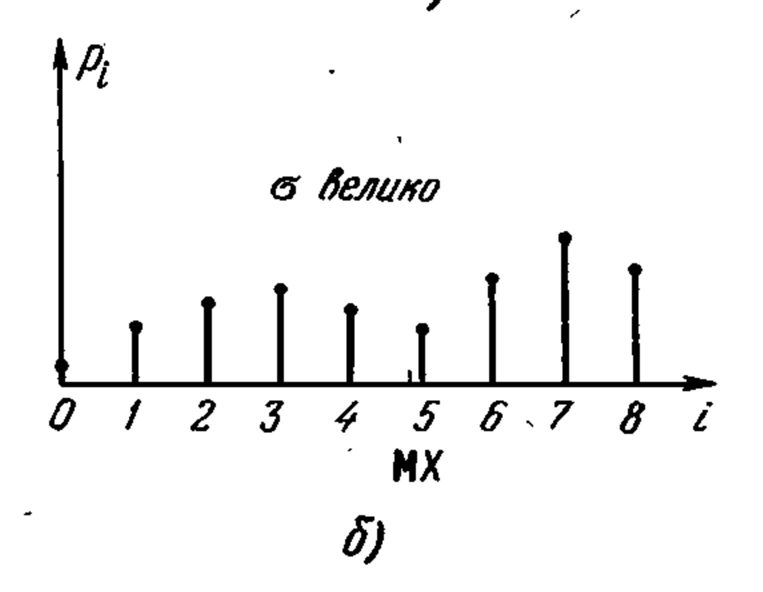


Рис. 5.7

5.1.3.1.2. Дисперсия. Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины X и обозначается через DX, т. е.

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k = M(X - MX)^2. \tag{5.29}$$

Для вычисления дисперсии часто полезна следующая формула:

$$DX = MX^2 - (MX)^2. \tag{5.30}$$

Корень квадратный из дисперсии называется *разбросом*, или *стандартным отклонением*, или *средним квадратичным отклонением* и обозначается через σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}. \tag{5.31}$$

Величина σ (или DX) есть мера рассеяния распределения относительно математического ожидания. На рис. 5.7 показано дискретное распределение с малым (*а*) и большим (*б*) рассеянием.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$Da = 0.$$

2) Дисперсия произведения постоянной величины на случайную величину равна произведению квадрата постоянной величины на дисперсию случайной величины:

$$D(aX) = a^2 DX.$$

3) Дисперсия суммы постоянной a и случайной величин равна дисперсии случайной величины:

$$D(a + X) = DX.$$

4) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2.$$

Пример 25. Биномиальное распределение:

$$DX = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 C_n^k p^k q^{n-k} = npq, \tag{5.32}$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}. \tag{5.33}$$

Пример 26. Гипергеометрическое распределение:

$$DX = \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right). \tag{5.34}$$

Пример 27. Распределение Пуассона:

$$DX = \lambda, \ \sigma_X = \sqrt{\lambda}. \tag{5.35}$$

5.1.3.2. Непрерывный случай. Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$. Тогда величина

$$\nu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x)\, dx \tag{5.36}$$

называется (в случае абсолютной сходимости интеграла) i-м *начальным моментом* случайной величины X ($i = 1, 2, \ldots$). Величина $\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \nu_1)^i f(x)\, dx$ называется i-м *центральным моментом* случайной величины X.

5.1.3.2.1. Математическое ожидание. Первый начальный момент

$$\nu_1 = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \tag{5.37}$$

называется *математическим ожиданием* случайной величины X. Математическое ожидание MX дает положение центра тяжести распределения массы, которое задается «плотностью распределения массы» $f(x)$.

Математическое ожидание в непрерывном случае обладает теми же свойствами 1) – 4), которые были отмечены для дискретного случая.

Пример 28. Равномерное распределение на $[a, b]$:

$$MX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}.$$

Пример 29. Нормальное распределение $N(x;\ a,\ \sigma)$:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = a.$$

Следовательно, параметр a имеет значение математического ожидания.

Пример 30. Экспоненциальное распределение:

$$MX = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

5.1.3.2.2. Дисперсия. Второй центральный момент

$$\mu_2 = DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)\, dx \qquad (5.38)$$

называется *дисперсией случайной величины* X. Величина $\sqrt{DX} = \sigma$ называется *разбросом*, или *стандартным отклонением*, или *средним квадратичным отклонением* случайной величины X. Справедлива формула

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2. \qquad (5.39)$$

Дисперсия в непрерывном случае обладает теми же свойствами 1) – 4), которые были отмечены для дискретного случая.

Пример 31. Равномерное распределение на $[a, b]$:

$$DX = \int_a^b \left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 32. Нормальное распределение $N(x;\ a,\ \sigma)$:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = \sigma^2.$$

Параметр σ имеет здесь значение разброса σ_X.

Таким образом, нормальное распределение полностью определено заданием математического ожидания и среднего квадратичного отклонения.

Пример 33. Экспоненциальное распределение: $DX = 1/\lambda^2$.

5.1.4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ (МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ)

Совокупность $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин называется *n-мерным случайным вектором*.

Такой случайный вектор может быть охарактеризован своей *n-мерной функцией распределения*:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n). \quad (5.40)$$

Функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ часто также называют кратко *распределением вектора* $(X_1, \ldots, X_n)$ или совместным распределением величин $X_1, \ldots, X_n$. Если рассматривать величины $X_1, \ldots, X_n$ как координаты некоторой точки в n-мерном евклидовом пространстве, то положение точки $(X_1, \ldots, X_n)$ зависит от случая, а значение функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ есть вероятность того, что точка оказывается в полуоткрытом параллелепипеде $X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n$ с ребрами, параллельными осям. Вероятность того, что точка окажется в параллелепипеде $a_i \leqslant X_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, определяется формулой

$$P(a_1 \leqslant X_1 < b_1, \ldots, a_n \leqslant X_n < b_n) = F(b_1, \ldots, b_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_{ij} - \ldots + (-1)^n F(a_1, \ldots, a_n); \qquad (5.41)$$

здесь $p_{i_1 i_2 \ldots i_k} = F(c_1, \ldots, c_n)$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$, где $c_{i_1} = a_{i_1}, c_{i_2} = a_{i_2}, \ldots, c_{i_k} = a_{i_k}$, а все остальные $c_j = b_j$.

Для двумерного случайного вектора, в частности, получаем

$$P(a_1 \leqslant X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Свойства n-мерной функции распределения.

1) $\lim\limits_{\substack{x_j \to +\infty \\ j=1,\ldots,n}} F(x_1, \ldots, x_n) = 1,\quad \lim\limits_{\substack{x_j \to -\infty \\ j=1,\ldots,n}} F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$

2) $F(x_1, \ldots, x_n)$ монотонно не убывает по каждому переменному.

3) $F(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна слева по каждому переменному.

4) Для произвольных $a_i, b_i, a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, правая часть равенства (5.41) неотрицательна.

5.1.4.1. Дискретные случайные векторы. Случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ называется *дискретным*, если все его компоненты являются дискретными случайными величинами. Если $x_k^{(j)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – возможные значения j-й компоненты, то функция вероятностей $p_{i_1 \ldots i_n}$ вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ определяется следующим образом:

$$p_{i_1 \ldots i_n} = P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, X_2 = x_{i_2}^{(2)}, \ldots, X_n = x_{i_n}^{(n)}).$$

Для функции распределения по аналогии с (5.14) справедливо соотношение

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{x_{i_k}^{(k)} < x_k \\ k = 1, 2, \ldots, n}} p_{i_1 \ldots i_n}. \qquad (5.42)$$

Суммирование производится по всем наборам i_k, для которых $x_{i_k}^{(k)} < x_k$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 34. *Полиномиальное распределение.* Пусть в некотором опыте всегда происходит одно из попарно несовместимых событий $A_1, \ldots, A_k$. Пусть $p_i = P(A_i)$. Так как $A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_k = U$ и $A_i \bigcap A_j = V$ при $i \neq j$, то $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Пусть опыт проводится n раз, причем отдельные опыты этой серии являются независимыми. Обозначим через X_i число реализаций A_i $(i = 1, \ldots, k)$ в n опытах. Тогда каждая из случайных величин X_i может принимать только конечное множество значений $0, 1, \ldots, n$. Таким образом, вектор $(X_1, \ldots, X_k)$ является дискретным случайным вектором. Для его функции вероятностей имеем

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_k} = P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_k = i_k) = \frac{n!}{i_1! \ldots i_k!} p_1^{i_1} \ldots p_k^{i_k}, \quad \text{где } i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n. \qquad (5.43)$$

Случайный вектор с функцией вероятностей (5.43) называется *полиномиально распределенным*.

5.1.4.2. Непрерывные случайные векторы. Случайный вектор называется *непрерывным*, если его функцию распределения можно представить в виде

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n;$$

$f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *плотностью распределения* вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ или *совместной плотностью* величин $X_1, \ldots, X_n$. Вероятность того, что случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ окажется в области G n-мерного пространства, можно записать следующим образом:

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in G) = \int \ldots \int_G f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (5.44)$$

Поэтому плотность должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1. \quad (5.45)$$

Пример 35. *Равномерное распределение.* Вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ называется распределенным в области G *равномерно*, если он имеет плотность, постоянную в G и равную 0 вне G. В силу (5.45) эта постоянная должна быть равна $1/V(G)$, где $V(G)$ – объем области G.

Пример 36. *Нормальное распределение.* Вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ называется *нормально распределенным*, если он имеет плотность вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Ce^{-Q(x_1, \ldots, x_n)}. \quad (5.46)$$

Здесь Q – некоторая положительно определенная квадратичная форма от $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ (a_i – постоянные), постоянную C можно вычислить из условия (5.45). В случае $n = 2$

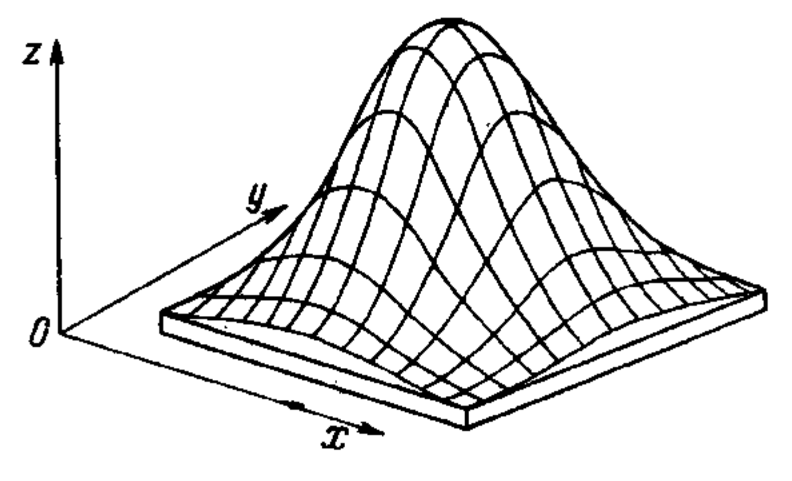


Рис. 5.8

плотность нормального распределения может быть приведена к следующему виду (определение a_k, σ_k, ρ см. в 5.1.4.4; рис. 5.8):

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \quad (5.47)$$

5.1.4.3. Граничные распределения. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ – функция распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$. Тогда

$$P(X_{i_1} < x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} < x_{i_k}) = F(c_1, \ldots, c_n)$$
$$(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n),$$

где $c_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, c_{i_k} = x_{i_k}$, а все остальные $c_j = +\infty$, называется *k-мерным граничным распределением* $F(x_1, \ldots, x_n)$. Оно является функцией распределения k-мерного случайного вектора $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$. В частности, при $k = 1$ получаются распределения отдельных компонент:

$$F(+\infty, +\infty, \ldots, x_i, +\infty, \ldots, +\infty) = P(X_i < x_i) = F_i(x_i).$$

В дискретном случае функцию вероятностей k-мерного граничного распределения получают суммированием по индексам, номера которых отличны от $i_1, \ldots, i_k$; в непрерывном случае плотность граничного распределения получают интегрированием по переменным, номера которых отличны от $i_1, \ldots, i_k$.

Общее число k-мерных граничных распределений равно C_n^k.

Пример 37. Пусть дана двумерная дискретная случайная величина (X_1, X_2) с функцией вероятностей $p_{ik} = P(X_1 = x_i^{(1)}, X_2 = x_k^{(2)})$. Тогда функции вероятностей отдельных компонент получаются как граничные распределения:

$$P(X_1 = x_i^{(1)}) = \sum_k p_{ik}, \quad P(X_2 = x_k^{(2)}) = \sum_i p_{ik}.$$

Пример 38. Пусть задана трехмерная случайная непрерывная величина с плотностью $f(x_1, x_2, x_3)$. Тогда, например, плотность вектора (X_1, X_2) получают как двумерное граничное распределение: $g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3$. Плотность третьей компоненты получают также как граничное распределение: $h(x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2$.

5.1.4.4. Моменты многомерной случайной величины. Особый интерес представляют первые и вторые моменты. Если случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ дискретен, то числа

$$\nu_j = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_j}^{(j)} p_{i_1 \ldots i_n} \quad (j = 1, \ldots, n) \quad (5.48)$$

называются *первыми начальными моментами* $(X_1, \ldots, X_n)$. В непрерывном случае первые начальные моменты определяются формулой

$$\nu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} x_j f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad (j = 1, \ldots, n); \quad (5.49)$$

ν_j являются математическими ожиданиями отдельных компонент: $\nu_j = MX_j$.

Вторые начальные моменты ν_{ij} и *вторые центральные моменты* μ_{jk} определяются следующим образом:

дискретный случай:

$$\nu_{jk} = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_j}^{(j)} x_{i_k}^{(k)} p_{i_1 \ldots i_n}, \quad (5.50)$$

$$\mu_{jk} = \sum_{i_1, \ldots, i_n} (x_{i_j}^{(j)} - \nu_j)(x_{i_k}^{(k)} - \nu_k)\, p_{i_1 \ldots i_n}; \quad (5.51)$$

непрерывный случай:

$$\nu_{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} x_j x_k f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad (5.52)$$

$$\mu_{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \nu_j)(x_k - \nu_k) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (5.53)$$

Говорят, что *соответствующие моменты существуют*, если интегралы в правых частях (5.48) – (5.53) *сходятся абсолютно*. Имеем

$$\nu_{jk} = M(X_j X_k),$$
$$\mu_{jk} = M[(X_j - MX_j)(X_k - MX_k)] = M(X_j X_k) - MX_j MX_k = \nu_{jk} - \nu_j \nu_k.$$

Величины μ_{jj} равны дисперсиям отдельных компонент:

$$\mu_{jj} = DX_j = \sigma_j^2.$$

Величина $\mu_{jk} = \nu_{jk} - \nu_j\nu_k$ называется *ковариацией* (*корреляционным моментом*) случайных величин X_j, X_k и обозначается через $\operatorname{cov}(X_j, X_k)$. Матрица $\| \mu_{jk} \|_{j,\,k\,=\,1,\ldots,\,n}$ называется *матрицей ковариации* (*корреляции*). Параметр

$$\rho_{jk} = \frac{\operatorname{cov}(X_j, X_k)}{\sqrt{DX_j DX_k}} = \frac{\operatorname{cov}(X_j, X_k)}{\sigma_j \sigma_k} \tag{5.54}$$

называется *коэффициентом корреляции* между X_j и X_k. Он лежит между -1 и $+1$.

Две случайные величины X и Y называются *некоррелирующими*, если их коэффициент корреляции (их ковариация) равен нулю.

Пример 39. Параметры в формуле (5.47) для плотности двумерного нормального распределения имеют следующие значения: $a_1 = MX_1$, $a_2 = MX_2$, $\sigma_1 = \sqrt{DX_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{DX_2}$, а $\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 DX_2}}$ (коэффициент корреляции между X_1 и X_2).

В случае n-мерного нормального распределения для плотности (5.46) имеем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Ce^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)};$$

здесь параметры a_i и b_{ij} имеют следующие значения: $a_i = MX_i$, $b_{ij} = \Delta_{ij}/\Delta$, где $\Delta = \det(\Delta_{ij})$, (Δ_{ij}) – матрица алгебраических дополнений матрицы ковариации. Таким образом, n-мерное нормальное распределение, так же как в одномерном случае, полностью определено заданием первых и вторых моментов.

5.1.4.5. Условные распределения. Пусть (X, Y) – случайный вектор, а $F(x, y)$ – его функция распределения.

Функция

$$F(x/y) = \lim_{h \to 0} \frac{P(X < x,\ y \leqslant Y < y + h)}{P(y \leqslant Y \leqslant y + h)} \tag{5.55}$$

называется *условным распределением* X при условии, что Y принимает значение y. Аналогично определяется $F(y/x)$.

В дискретном случае для условной функции вероятностей имеем

$$P(X = x_i/Y = y_k) = \frac{p_{ik}}{\sum_i p_{ik}}, \qquad P(Y = y_k/X = x_i) = \frac{p_{ik}}{\sum_k p_{ik}}. \tag{5.56}$$

В непрерывном случае для условных плотностей имеем

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx}, \qquad f(y/x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy}. \tag{5.57}$$

В знаменателях формул (5.56) и (5.57) стоят граничные распределения компонент, определяющих условие.

5.1.4.6. Независимость случайных величин. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми* (ср. (5.9)), если

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n), \tag{5.58}$$

где $F_1(x_i)$ – функция распределения i-й компоненты X_i (одномерное граничное распределение). В то время как в общем случае о совместном распределении, если известны распределения отдельных компонент, ничего сказать нельзя, в случае независимости случайных величин функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ полностью определена через распределения отдельных компонент.

Пример 40. Ведется стрельба по мишени. Допустим, что вертикальное отклонение X и горизонтальное отклонение Y относительно центра имеют нормальное распределение

$$X \in N(x;\ 0,\ \sigma_1), \quad Y \in N(y;\ 0,\ \sigma_2).$$

Можно считать, что X и Y независимы. Тогда для плотности вектора (X, Y), обозначающего место попадания пули, имеем

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

Следовательно, (X, Y) распределено нормально с параметрами $a_1 = a_2 = 0$, σ_1, σ_2, $\rho = 0$.

Примечание. Независимость в практических случаях обосновывается не проверкой (5.58), а рассуждениями или статистическими тестами. Тогда равенство (5.58) считается следствием.

Для независимых случайных величин справедливы некоторые очень важные и часто используемые теоремы о математическом ожидании и дисперсии. Если X и Y независимы, то

$$M(XY) = MX\,MY. \tag{5.59}$$

Отсюда и из определения ковариации тотчас следует: из независимости X и Y вытекает некоррелированность X и Y.

В случае нормального распределения из некоррелированности следует и независимость, что становится очевидным, если в формулу (5.47) подставить $\rho = 0$ и применить функциональное равенство для экспоненты.

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий, т. е. $D(X_1 + \ldots + X_n) = DX_1 + \ldots + DX_n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы.

5.1.4.7. Регрессионная зависимость. Для многих явлений в природе и технике типичны стохастические (случайные) зависимости. Между двумя случайными величинами имеется *стохастическая зависимость* в общем случае тогда, когда существуют некоторые случайные факторы, которые влияют на обе случайные величины, и некоторые факторы, действующие только на первую или только на вторую случайную величину. Следовательно, если

$$X = f(Z_1, \ldots, Z_m, X_1, \ldots, X_j),$$
$$Y = g(Z_1, \ldots, Z_m, Y_1, \ldots, Y_k),$$

то X и Y *стохастически зависимы*. В теории регрессии особое значение имеет задача: предсказание интересующей нас случайной величины Y, если другие случайные величины, от которых стохастически зависит Y, приняли конкретные значения.

5.1.4.7.1. Линии регрессии. Кривые в плоскости x, y, определяемые уравнениями

$$\bar{y}(x) = M(Y/X = x) \text{ и } \bar{x}(y) = M(X/Y = y),$$

называются *линиями регрессии* Y относительно X и соответственно X относительно Y. При этом $M(Y/X = x)$ – математическое ожидание Y при условии, что X приняло значение x. В случае непрерывных X и Y имеем

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)\,dy,$$

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)\,dx.$$

При этом $f(x/y)$ или $f(y/x)$ – условные плотности. Линии регрессии имеют следующий смысл: *наилучшее предсказание Y при условии, что $X = x_0$ есть* $\bar{y}(x_0)$. При этом «наилучшее» означает, что для произвольной функции $u(X)$ справедливо неравенство $M(Y - u(X))^2 \geqslant M(Y - \bar{y}(X))^2$. Это можно выразить и так: функция регрессии $\bar{y}(x)$ есть функция, минимизирующая среднюю квадратичную ошибку величины предсказания Y на основании значений X. Соответствующим образом можно интерпретировать и $\bar{x}(y)$.

5.1.4.7.2. Прямые регрессии. Случайные величины X и Y называются *линейно коррелированными*, если линии регрессии являются прямыми. Эти «прямые регрессии» задаются следующими уравнениями:

регрессия Y относительно X: $y = \mu_Y + \beta_{Y/X}(x - \mu_X)$, (5.60)

регрессия X относительно Y: $x = \mu_X + \beta_{X/Y}(y - \mu_Y)$; (5.61)

величины $\beta_{Y/X}$ и $\beta_{X/Y}$ называются (теоретическими) *коэффициентами регрессии*. Они вычисляются следующим образом:

$$\beta_{Y/X} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho, \quad \beta_{X/Y} = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho. \tag{5.62}$$

При этом ρ есть *коэффициент корреляции* X и Y:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}, \tag{5.63}$$

и $\sigma_X = \sqrt{DX}$, $\sigma_Y = \sqrt{DY}$. Входящие в формулы (5.60), (5.61) параметры μ_X и μ_Y – математические ожидания X и Y: $\mu_X = MX$, $\mu_Y = MY$.

В том случае, когда X и Y не являются линейно коррелированными, по формулам (5.60) и (5.61), используя (5.62) и (5.63), можно составить уравнения двух прямых. Они также называются линиями регрессии и в этом случае являются линейными аппроксимациями истинных линий регрессии.

5.1.4.8. Функции от случайных величин. Пусть дан непрерывный случайный вектор (X, Y); $f(x, y)$ – его плотность. Требуется найти распределение случайных величин $X + Y$, $X \cdot Y$, $\dfrac{X}{Y}$.

Сумма $X + Y$ есть также непрерывная случайная величина, и ее плотность равна

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,dx.$$

Если X и Y независимы, так что $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z - x)\,dx. \tag{5.64}$$

Следовательно, плотность суммы есть *свертка* плотностей отдельных слагаемых.

Пример 41. Пусть вектор (X, Y) распределен нормально, а функция $f(x, y)$ задана формулой (5.47). Тогда для плотности $X + Y$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z - (a_1 + a_2))^2}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}.$$

Следовательно, величина $Z = X + Y$ снова нормально распределена с параметрами $\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$, $a_1 + a_2$.

В случае независимости имеет место и обратное: если сумма двух независимых случайных величин нормально распределена, то и отдельные слагаемые распределены нормально.

Произведение. Пусть (X, Y) – случайный вектор и $Z = X \cdot Y$. Тогда для плотности имеем

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}\,dx.$$

Отношение. Пусть (X, Y) – случайный вектор; отношение X/Y есть некоторая случайная непрерывная функция с функцией плотности

$$f(z) = \int_{0}^{+\infty} xf(zx, x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} xf(zx, x)\,dx.$$

5.1.5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Под *характеристической функцией* $\psi(t)$ случайной величины X понимают математическое ожидание случайной величины e^{itX}:

$$\psi(t) = M(e^{itX}), \tag{5.65}$$

где t – действительный параметр.

Если $F(x)$ – функция распределения X, то

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF(x). \tag{5.66}$$

В случае дискретного распределения с $x_k = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p_k \tag{5.67}$$

(ряд Фурье с коэффициентами p_k). В случае непрерывного распределения

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx \tag{5.68}$$

(интеграл Фурье).

Пример 42. Пусть X подчиняется закону Пуассона с параметром λ. Тогда характеристической функцией будет

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}. \tag{5.69}$$

Пример 43. Пусть X равномерно распределена на $(-a, a)$. Тогда

$$\psi(t)=\int_{-a}^{a} e^{itx}\frac{1}{2a}\,dx=\frac{\sin(at)}{at}.$$

Пример 44. $X\in N(x;\ a,\ \sigma)$. Тогда характеристической функцией будет

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}\,dx=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}. \qquad (5.70)$$

5.1.5.1. Свойства характеристических функций.

1) Характеристическая функция равномерно непрерывна на всей действительной оси.

2) Для любой характеристической функции $\psi(t)$ выполняются соотношения

$$\psi(0)=1,\ |\psi(t)|\leqslant 1 \qquad (-\infty<t<+\infty).$$

3) Если $Y=aX+b$ с постоянными a и b, то $\psi_Y(t)=\psi_X(at)\,e^{ibt}$ (ψ_X – характеристическая функция X).

Используя характеристические функции, можно легко вычислить моменты.

Если случайная величина X обладает моментом порядка n, то характеристическая функция X n раз дифференцируема по t и при $k\leqslant n$

$$\psi^{(k)}(0)=i^kMx^k=i^k\nu_k. \qquad (5.71)$$

Пример 45. Пусть X нормально распределена с параметрами a и σ. Следует вычислить MX и DX. Согласно (5.70), $\psi(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Тогда в силу (5.71) $i\nu_1=\psi'(0)=ia$ и $-\nu_2=\psi''(0)=-\sigma^2-a^2$. Следовательно, $MX=\nu_1=a$ и $DX=\nu_2-\nu_1^2=\sigma^2+a^2-a^2=\sigma^2$.

Для приложений имеет большое значение тот факт, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

Если случайные величины X_1 и X_2 непрерывны, то плотность суммы, согласно (5.64), есть свертка обеих плотностей. Это свойство, таким образом, есть не что иное, как теорема о свертке преобразования Фурье (см. 4.4.2).

Пример 46. *Применения теоремы о свертке.* Пусть случайная величина X распределена биномиально с параметрами n и p. Требуется найти ее характеристическую функцию. Как известно, X можно интерпретировать как число осуществлений события A в n независимых испытаниях, если вероятность осуществления A в каждом испытании есть p. Поэтому X можно записать в виде суммы

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

где

$$X_j=\begin{cases}0, & \text{если } A \text{ не осуществляется в } j\text{-м опыте},\\ 1, & \text{если } A \text{ осуществляется в } j\text{-м опыте}.\end{cases}$$

По условию X_j – независимые случайные величины. Следовательно, согласно теореме о свертке, имеем $\psi_X(t)=\prod_{j=1}^{n}\psi_{X_j}(t)$, причем $\psi_{X_j}(t)=Me^{itX_j}=e^{it\cdot 0}\cdot q+e^{it\cdot 1}\cdot p=q+pe^{it}$, где $q=1-p$; таким образом,

$$\psi_X(t)=(q+pe^{it})^n. \qquad (5.72)$$

5.1.5.2. Формула обращения и теорема единственности. Пусть $F(x)$ – функция распределения, а $\psi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X. Если x_1, x_2 – точки непрерывности $F(x)$, то

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\psi(t)\,dt. \qquad (5.73)$$

Если случайная величина X непрерывна, а $f(x)$ – плотность $F(x)$, то формула (5.73) упрощается:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\psi(t)\,dt. \qquad (5.74)$$

Таким образом, плотность получается из характеристической функции обратным преобразованием Фурье.

Из формулы обращения следует, что функция распределения случайной величины однозначно определяется ее характеристической функцией.

Если, например, каким-либо образом для X получена характеристическая функция $e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$, то, согласно теореме единственности и формуле (5.70), $X\in N(x;\ a,\ \sigma)$.

Пример 47. Пусть две независимые случайные величины нормально распределены: $X\in N(x;\ a_1,\ \sigma_1)$, $Y\in N(y;\ a_2,\ \sigma_2)$. Требуется найти распределение для $X+Y$. Так как

$$\psi_X(t)=e^{ia_1t-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}},\quad \psi_Y(t)=e^{ia_2t-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}},$$

то, согласно теореме о свертке,

$$\psi_{X+Y}(t)=\psi_X(t)\psi_Y(t)=e^{i(a_1+a_2)t-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

Вследствие теоремы единственности единственное распределение, имеющее эту функцию распределения, есть $N(x+y;\ a_1+a_2,\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$. Таким образом, случайная величина $X+Y$ снова распределена нормально с параметрами $a=a_1+a_2$ и $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

Пример 48. Пусть X и Y – независимые случайные величины, подчиняющиеся закону Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1},\quad P(Y=k)=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}.$$

Требуется найти распределение суммы $X+Y$. По формуле (5.69) находим $\psi_X(t)=e^{\lambda_1(e^{it}-1)}$, $\psi_Y=e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$. Вследствие независимости и согласно теореме о свертке

$$\psi_{X+Y}(t)=\psi_X(t)\psi_Y(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}. \qquad (5.75)$$

В силу теоремы единственности единственным распределением, имеющим (5.75) в качестве характеристической функции, является пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1+\lambda_2$. Таким образом, сумма двух независимых случайных величин, подчиняющихся закону Пуассона, снова распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

Примечание. Здесь также имеет место обратное: если сумма двух независимых случайных величин распределена по закону Пуассона, то и слагаемые распределены по закону Пуассона.

5.1.5.3. Предельная теорема для характеристических функций. Последовательность $\{F_n(x)\}$ функций распределения называется *сходящейся в основном* к функции распределения $F(x)$, если во всех точках непрерывности $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$.

В дискретном случае сходимость в основном $F_N(x)$ к $F(x)$ означает, что соответствующие

функции вероятностей сходятся: $p_k^{(n)} \to p_k$ для всех k.

В непрерывном случае из сходимости в основном следует (если $f_n(x)$ непрерывны), что подпоследовательность $f_{n_k}(x) \to f(x)$ для почти всех x.

Если последовательность $\{F_n(x)\}$ функций распределения сходится в основном к функции распределения $F(x)$, то последовательность соответствующих характеристических функций $\{\psi_n(t)\}$ сходится к $\psi(t)$ – характеристической функции $F(x)$. Эта сходимость равномерна в каждом конечном интервале.

Большое значение имеет обратная теорема: если последовательность характеристических функций $\{\psi_n(t)\}$ сходится к непрерывной функции $\psi(t)$, то при некоторых условиях последовательность их функций распределения $\{F_n(x)\}$ сходится в основном к некоторой функции распределения $F(x)$ и $\psi(t)$ есть характеристическая функция $F(x)$.

Примечание. Условие обратной теоремы выполняется, в частности, если выполняется одно из двух условий:

1) $\{\psi_n(t)\}$ сходится равномерно на каждом конечном интервале к функции $\psi(t)$.

2) $\{\psi_n(t)\}$ сходится к характеристической функции $\psi(t)$.

Пример 49. Пусть $P(n, k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – последовательность биномиальных распределений с параметрами n, p_n и $\lim\limits_{n \to \infty} np_n = \lambda$. К какому распределению сходится эта последовательность? Соответствующая последовательность характеристических функций $\psi_n(t) = (q_n + e^{it}p_n)^n$, очевидно, сходится к функции $\psi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Следовательно, предельное распределение является пуассоновским распределением:

$$p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

5.1.5.4. Производящие функции. В случае дискретных случайных величин, которые могут принимать только значения 0, 1, 2, …, часто вместо характеристических функций используют производящие функции.

Пусть p_k является функцией вероятностей некоторой дискретной случайной величины X указанного типа, а z – комплексный параметр. Тогда $\varphi(z) = \sum\limits_k p_k z^k$ называется *производящей функцией* случайной величины X. Функция $\varphi(z)$ – аналитическая в круге $|z| < 1$. Ее предел при $z \to e^{it}$ дает характеристическую функцию X.

Производящие функции имеют свойства, аналогичные свойствам характеристических функций.

5.1.5.5. Характеристические функции многомерных случайных величин. Под *характеристической функцией n-мерной случайной величины* понимают математическое ожидание величины $\exp\left(i \sum\limits_{k=1}^n t_k X_k\right)$:

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = M\left(\exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k X_k\right)\right), \qquad (5.76)$$

где $t_1, \ldots, t_n$ – действительные параметры.

Пример 50. Характеристическая функция n-мерного нормального распределения имеет вид

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = \exp\left(i\sum_k a_k t_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k} b_{jk} t_j t_k\right), \qquad (5.77)$$

где (b_{jk}) – матрица ковариации. В частности, для $n = 2$ имеем

$$\psi(t_1, t_2) = \exp\left[i(a_1t_1 + a_2t_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right]. \qquad (5.78)$$

Если $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, то

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^n \psi_k(t_k),$$

где ψ_k – характеристические функции отдельных компонент X_k.

Если $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ и $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ – характеристическая функция вектора $(X_1, \ldots, X_n)$, то

$$\psi_Z(t) = \psi(t, t, \ldots, t).$$

5.1.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

5.1.6.1. Закон больших чисел. Последовательность $\{X_n\}$ случайных величин называется *сходящейся по вероятности* к случайной величине X, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ подчиняется *слабому закону больших чисел*, если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n MX_k\right| < \varepsilon\right) = 1, \qquad (5.79)$$

другими словами, если

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n MX_k$$

сходится к 0 «по вероятности».

Для вывода слабого закона больших чисел важно *неравенство Чебышева*. Пусть X – случайная величина, имеющая конечную дисперсию. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(|X - MX| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (5.80)$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность попарно независимых случайных величин, дисперсии которых равномерно ограничены, т. е. $DX_k \leqslant C$ для каждого k, то эта последовательность подчиняется слабому закону больших чисел.

Прямым следствием отсюда является теорема Бернулли. Пусть m – число осуществлений события A в n независимых испытаниях, и пусть в каждом таком испытании A имеет вероятность p. Тогда частота $\frac{m}{n} = W_n(A)$ стремится «по вероятности» к p, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} P(|W_n(A) - p| < \varepsilon) = 1 \qquad (5.81)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Если $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность попарно независимых случайных величин с равными мате-

матическими ожиданиями $MX_1 = MX_2 = \ldots = a$, а DX_k равномерно ограничены, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (5.82)$$

Соотношение (5.82) является теоретической основой правила среднего арифметического при измерениях. Пусть нужно измерить неизвестную величину a. Из-за случайных ошибок измерения повторяются n раз, причем отдельные измерения независимы друг от друга: k-е измерение может быть описано случайной величиной X_k. Если в процессе измерения нет систематической ошибки, то $MX_k = a$. Тогда, согласно (5.82), построением среднего арифметического измеренных значений при достаточно большом n с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, получается значение, сколь угодно приближающееся к искомой величине a.

Последовательность $\{X_n\}$ случайных величин называется *почти наверное сходящейся* к случайной величине X, если

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{k \geqslant n} (|X_k - X| \geqslant \varepsilon)\right) = 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ подчиняется *усиленному закону больших чисел*, если

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{k \geqslant n}\left(\left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_j - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} MX_j\right| \geqslant \varepsilon\right)\right) = 0$$

$$\text{для любого } \varepsilon > 0, \qquad (5.83)$$

другими словами, если $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k$ «почти наверное» сходится к 0.

Теорема Колмогорова. Если последовательность $\{X_n\}$ независимых друг от друга случайных событий удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < +\infty$, то она подчиняется усиленному закону больших чисел.

О связи между усиленным и слабым законом можно сказать следующее: если последовательность $\{X_n\}$ случайных величин подчиняется усиленному закону, то она подчиняется и слабому, но не наоборот.

5.1.6.2. Предельная теорема Муавра – Лапласа.

5.1.6.2.1. Локальная предельная теорема. Если вероятность осуществления события A в n независимых опытах постоянна и равна $p\,(0 < p < 1)$, то вероятность $P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ того, что в этих опытах событие A происходит ровно k раз, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(n, k)}{1/(\sqrt{2\pi}\sqrt{npq})\, e^{-x^2/2}} = 1, \qquad (5.84)$$

где $x = (k - np)/\sqrt{npq}$.

Другими словами, биномиально распределенная случайная величина асимптотически распределена нормально с параметрами $a = np$ и $\sigma = \sqrt{npq}$.

Пример 51. Пусть вероятность появления в производстве бракованной детали равна 0,005. Как велика вероятность того, что среди 10000 деталей 40 окажутся бракованными? Итак, следует определить $P(n, k)$ при $n = 10000$, $k = 40$, $p = 0{,}005$. Согласно (5.84),

$$P(n, k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k - np}{npq}\right)^2},$$

$$\sqrt{npq} = 7{,}05, \quad \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = -1{,}42.$$

Следовательно,

$$P(n, k) \approx \frac{1}{7{,}05}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1{,}42)^2}.$$

Из табл. 1.1.2.6.1 находим $\varphi(1{,}42) = 0{,}1456$. Таким образом, $P(n, k) = \frac{0{,}1456}{7{,}05} \approx 0{,}0206$. При вычислении по точной формуле получаем $P(n, k) \approx 0{,}0197$.

5.1.6.2.2. Интегральная предельная теорема. Пусть X – биномиально распределенная случайная величина с параметрами n и p. (Следовательно, X можно интерпретировать как число осуществлений события A в n независимых испытаниях с $P(A) = p$ в отдельном испытании.) Тогда равномерно относительно a и $b\,(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \leqslant \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}\, dx = \Phi_0(b) - \Phi_0(a). \qquad (5.85)$$

Пример 52. Пусть имеется ситуация, описанная в примере 51. Ищется вероятность того, что в ящике с 10000 деталей находится не более 70 бракованных:

$$P(X \leqslant 70) = P\left(\frac{-50}{\sqrt{49{,}75}} \leqslant \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) = P\left(-7{,}09 \leqslant \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leqslant 2{,}84\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-7{,}09}^{2{,}84} e^{-x^2/2}\, dx = \Phi_0(2{,}84) - \Phi_0(-7{,}09).$$

Так как $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, то $P(X \leqslant 70) = \Phi_0(2{,}84) + \Phi_0(7{,}09)$. Из таблицы найдем $\Phi_0(2{,}84) = 0{,}4977$; $\Phi_0(7{,}09)$ уже нет в таблице, так как оно отличается от 0,5 крайне мало. Таким образом, $P(X \leqslant 70) \approx 0{,}9977$.

5.1.6.3. Центральная предельная теорема. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, и пусть

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_i - MX_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DX_i}}. \qquad (5.86)$$

Величины Z_n называются *нормированными и центрированными суммами* ($DZ_n = 1$, $MZ_n = 0$). Пусть $\Phi_n(x)$ являются функциями распределения Z_n, а $F_k(x)$ – функциями распределения X_k. Обозначим $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} DX_i$, $B_n > 0$. Необходимым и достаточным условием выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt \qquad (5.87)$$

является следующее условие (*Линдеберга*): для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X - MX_k| > \varepsilon B_n} (X - MX_k)^2\, dF_k(x) = 0. \qquad (5.88)$$

Примечание. Условие выполняется, в частности, если все X_k имеют одинаковое распределение, у которого первый и второй моменты конечны.

Условие (5.88) означает, что отдельные слагаемые $\dfrac{X_i - MX_i}{B_n}$, из которых, согласно формуле (5.86), состоит Z_n, равномерно малы. В этом случае смысл центральной предельной теоремы состоит в следующем. Если случайную величину можно представить как сумму большого числа не зависящих друг от друга слагаемых, каждое из которых вносит в сумму лишь незначительный вклад, то эта сумма распределена приблизительно нормально.

Пример 53. Пусть проводится измерение и X – случайная ошибка измерения. Если случайная величина X появляется в результате аддитивного наложения большого числа не зависящих друг от друга факторов, порождающих ошибки, каждый из которых оказывает на ошибку малое влияние, то величину X можно считать распределенной нормально.

Пример 54. Пусть X – длина березового листка, случайно выбранного из некоторого множества сорванных листков. Тогда X есть случайная величина, получающаяся наложением многих малых, не зависящих друг от друга факторов. Поэтому для X может быть принято нормальное распределение.

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5.2.1. ВЫБОРКИ

Задачи математической статистики состоят в том, чтобы на основании знания некоторых свойств подмножества элементов, взятых из некоторого множества, сделать какие-нибудь утверждения о свойствах этого множества, называемого *генеральной совокупностью*. В генеральной совокупности нас обычно интересует некоторый признак, который обусловлен случайностью и может иметь качественный или количественный характер.

Пример 55. Автомат производит валы. Множество всех валов, произведенных при определенных, остающихся неизменными производственных условиях, образует генеральную совокупность. Если интересующим признаком является, например, диаметр, то этот признак имеет количественный характер.

Пример 56. Поточная линия производит охотничьи патроны. Множество всех патронов, произведенных при некоторых остающихся неизменными условиях, составляет генеральную совокупность. Если нас интересует способность патрона функционировать или отказывать, то это качественный признак.

Интересующий нас параметр некоторой генеральной совокупности может быть представлен в математической модели некоторой случайной величиной X. В количественном случае X есть сам признак; для качественного же признака, например типа «хороший – плохой», X можно определить так:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{если «хороший»}, \\ 1, & \text{если «плохой»}. \end{cases}$$

Под *случайной выборкой объема n* понимается выбор n объектов из генеральной совокупности, причем выбор отдельных объектов производится независимо один от другого. Результатом случайной выборки объема n является совокупность $(x_1, \ldots, x_n)$ *значений признака*.

Пример 57. Совокупность (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) является выборкой объема 10 из партии патронов. Таким образом, здесь девять хороших и один плохой патрон.

Тот факт, что можно сделать много выборок объема n и получить различные совокупности значений признака, ведет к следующему абстрактному определению понятия выборки.

Пусть имеется генеральная совокупность, в которой признак X имеет распределение $F(x)$. Тогда n-мерный случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$, в котором величины X_i независимы друг от друга и все имеют распределение $F(x)$, называется *математической выборкой* объема n. Каждая реализация $(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ есть выборка.

В случае, если это не вызывает недоразумений, прилагательное «математическая» опускается.

5.2.1.1. Гистограмма и эмпирическая функция распределения. Пусть имеется выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ – так называемая *таблица наблюденных значений* – из генеральной совокупности с признаком X. Пусть распределение X неизвестно. Для того чтобы получить первое представление об этом распределении в случае количественного признака, составляют так называемую *гистограмму*. Производят разбиение действительной оси на конечное число граничащих друг с другом промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Затем подсчитывают число m_i выборочных значений, лежащих в Δ_i ($1 \leqslant i \leqslant k$). Эти числа называются *групповыми частотами*. Над Δ_i рисуют прямоугольник высоты m_i/n (относительные частоты попадания в интервалы). Возникающий таким образом ступенчатый график называется *гистограммой* выборки.

Пример 58. Из текущей продукции автомата была сделана выборка в 350 валиков; признаком X является отклонение диаметра валика от номинального размера. Табл. 5.1 дает соответствующее статистическое распределение.

Таблица 5.1

Статистическое распределение отклонений от номинала 350 валиков из продукции автомата

i	Δ_i, мм	m_i	m_i/n
1	от −0,230 до −0,210	3	0,009
2	от −0,210 до −0,190	8	0,023
3	от −0,190 до −0,170	19	0,054
4	от −0,170 до −0,150	37	0,106
5	от −0,150 до −0,130	53	0,151
6	от −0,130 до −0,110	60	0,171
7	от −0,110 до −0,090	64	0,183
8	от −0,090 до −0,070	49	0,140
9	от −0,070 до −0,050	31	0,088
10	от −0,050 до −0,030	17	0,049
11	от −0,030 до −0,010	7	0,020
12	от −0,010 до +0,010	2	0,006
	Всего	350	1,000

На рис. 5.9 показана соответствующая гистограмма.

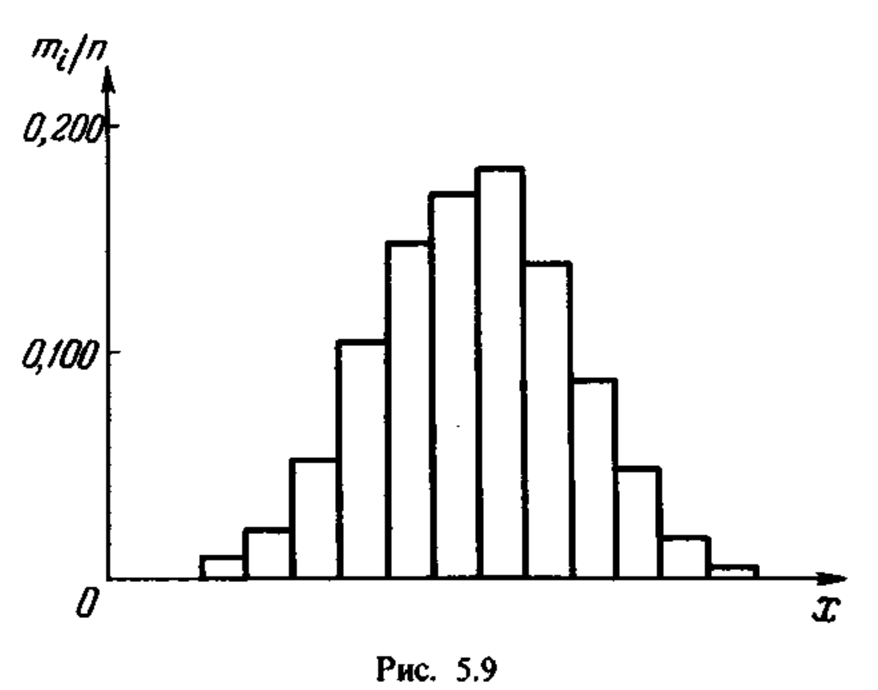


Рис. 5.9

Удобным способом получить представление о распределении X, приемлемом и при качественных признаках, является построение *эмпирической функции распределения*. Для данного действительного числа x подсчитывается число выборочных значений, меньше x. Обозначим это число через $m_n(x)$. Функция $\bar{F}_n(x) = \dfrac{m_n(x)}{n}$ называется *эмпирической функцией распределения выборки* $(x_1, \ldots, x_n)$. Она является ступенчатой функцией.

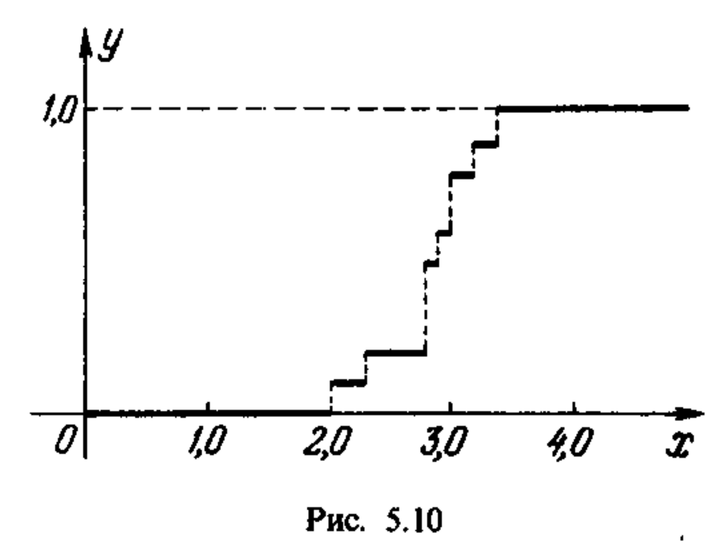


Рис. 5.10

Пример 59. Пусть при откармливании 10 животных зарегистрированы следующие прибавки в массе (в килограммах): 2,0; 2,8; 2,3; 3,4; 2,9; 2,8; 3,0; 3,2; 3,0; 2,8. На рис. 5.10 изображена соответствующая эмпирическая функция распределения.

Функция $\bar{F}_n(x)$ может рассматриваться как приближение истинного распределения $F(x)$ генеральной совокупности. Примем обозначение

$$D_n = \max_{-\infty < x < +\infty} |\bar{F}_n(x) - F(x)|. \quad (5.89)$$

Для любых непрерывных функций распределения выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} P\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = Q(\lambda),$$

где $Q(\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$. Отсюда вытекает, что при $n \to \infty$ почти наверное D_n сходятся к 0; другими словами, при $n \to \infty$ последовательность $\bar{F}_n(x)$ эмпирических функций распределения почти наверное равномерно сходится к функции распределения $F(x)$ признака X в генеральной совокупности.

5.2.1.2. Функции выборок. Пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ — математическая выборка. Случайная величина $Z_n = Z(X_1, \ldots, X_n)$ называется *функцией выборки*.

Пример 60. Пусть $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Реализация $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ при конкретной выборке называется *эмпирическим средним* выборки $(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 61. $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Реализация $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ называется *эмпирической дисперсией* выборки $(x_1, \ldots, x_n)$.

Вопрос о распределении функции выборки является основной задачей математической статистики.

В случае *малой выборки* (n относительно мало) представляет интерес распределение функции выборки Z_n. В случае *большой выборки* (n велико) достаточно знать асимптотическое распределение Z_n, т. е. предельное распределение Z_n при $n \to \infty$.

Не существует общего критерия, который позволял бы решить, когда выборка может считаться большой, а когда малой. В то время как распределение одной функции выборки уже при $n = 30$ можно с очень хорошим приближением заменить асимптотическим распределением, для другой функции выборки подобное приближение и при $n = 100$ все еще невозможно.

Пример 62. Пусть признак X распределен нормально по $N(x;\ a,\ \sigma)$. Тогда $\bar{X}$ распределено нормально по $N(x;\ a,\ \sigma/\sqrt{n})$.

Пример 63. Пусть $DX < +\infty$. Тогда $\bar{X}$ асимптотически распределено нормально по $N(x;\ MX,\ \sqrt{DX/n})$.

Пример 63 показывает, что для определения асимптотического распределения нужны только очень слабые предпосылки, которые практически всегда выполнены. Для вычисления точного распределения функции выборки, как показывает пример 62, необходимо знать распределение признака X генеральной совокупности.

5.2.1.3. Некоторые важные распределения. χ^2-распределение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, где $X_i \in N(x;\ a,\ \sigma)$ для всех i. Совокупность $(X_1, \ldots, X_n)$ можно понимать как выборку объема n из генеральной совокупности, в которой признак X распределен по $N(x;\ a,\ \sigma)$. Рассмотрим функцию выборки $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$. Распределение этой величины называется *χ^2-распределением* с n степенями свободы. Табл. 5.2 содержит плотность распределения для χ^2 и некоторые функции выборки, тесно связанные с χ^2.

Распределение $T = X/Y$ с независимыми X и Y, где X нормально распределено с законом $N(x;\ 0,\ 1)$, а $Y = \chi/\sqrt{n}$ (с n степенями свободы), называется *t-распределением* или *распределением Стьюдента* с n степенями свободы. Оно имеет плотность

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}. \quad (5.90)$$

χ^2-распределение и t-распределение табулированы; χ^2-распределение табулировано до $n = 30$.

Таблица 5.2

Некоторые распределения, связанные с χ^2

Величина	Плотность распределения при $x \geqslant 0$
$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$	$\frac{x^{(n/2)-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$
$\frac{1}{n}\chi^2 = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$	$\frac{(n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{(n/2)-1}e^{-nx/2}$
$\chi = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}$	$\frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n-1}e^{-x^2/2}$
$\zeta = \frac{\chi}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}$	$\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma(n/2)}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-nx^2/2}$

Это объясняется тем, что $\sqrt{2\chi^2}$ асимптотически распределено с законом $N(x;\ \sqrt{2n+1},\ n)$, и это приближение при $n = 30$ уже является достаточно точным (табл. 1.1.2.7, 1.1.2.8). Пусть независимые случайные величины $X_i (i = 1, \ldots, n_1)$ и $Y_j (j = 1, \ldots, n_2)$ нормально распределены с законом $N(x;\ 0,\ \sigma)$. Введем отношение

$$F = \frac{\frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \bar{Y})^2} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}. \quad (5.91)$$

Причем обозначения $r_1 = n_1 - 1,\ r_2 = n_2 - 1$. Распределение F называется *F-распределением со степенями свободы* $(r_1,\ r_2)$ (табл. 1.1.2.10).

Распределение $Z = \ln\sqrt{F}$ называется *Z-распределением со степенями свободы* $(r_1,\ r_2)$ (табл. 1.1.2.9).

5.2.2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ

В цехе на поточной линии изготовляются патроны для винтовок. Пусть вероятность того, что произвольно выбранный патрон негоден, равна p. Для того чтобы точно определить p, пришлось бы расстрелять все патроны, что не представляет собой разумного способа проверки. Для оценки величины p делается выборка. Признак X является качественным:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{если патрон годный,} \\ 1, & \text{если патрон негодный.} \end{cases}$$

Тогда $MX = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$; таким образом, речь идет о том, чтобы оценить MX при помощи сделанной выборки. Рассмотрим функцию выборки

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

которая имеет значение относительной частоты негодных патронов в выборке объема n. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — реализация выборки, то

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

является, согласно закону больших чисел, приближенным значением неизвестного p. В общем случае задача оценки неизвестного параметра γ (который как-либо связан с генеральной совокупностью, например, $\gamma = MX$) на основании выборки означает следующее. Нужно задать функцию выборки, реализация которой в некотором смысле могла бы рассматриваться как приближение γ. Такая функция выборки называется *точечной оценкой* γ.

5.2.2.1. Свойства точечных оценок. Оценка $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$ параметра γ называется *состоятельной*, если $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$ сходится по вероятности к параметру γ, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Gamma(X_1, \ldots, X_n) - \gamma| \leqslant \varepsilon) = 1.$$

Пример 64. 1) $\bar{X}$ есть состоятельная оценка MX. 2) S^2 есть состоятельная оценка для $DX = \sigma^2$.

Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.

Пример 65. 1) $M\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX = MX$, $\bar{X}$ есть несмещенная оценка MX. 2) $MS^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}M(X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2$; S^2 есть несмещенная оценка σ^2.

Оценка $\Gamma = \Gamma(X_1, \ldots, X_n)$ параметра γ называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{n\to\infty} M\Gamma = \gamma.$$

Каждая несмещенная оценка является асимптотически несмещенной, так как $M\Gamma = \gamma$ для любого конечного n.

Пример 66. Иногда в качестве оценки σ^2 используется также

$$S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad MS^{*2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Эта оценка не является несмещенной, однако она является асимптотически несмещенной, так как $\lim\limits_{n\to\infty} MS^{*2} = \sigma^2$.

Оценка Γ_1 параметра γ называется *более эффективной*, чем другая оценка Γ_2, если $M(\Gamma_1 - \gamma)^2 \leqslant M(\Gamma_2 - \gamma)^2$. Если обе оценки несмещенные, то это означает: $D\Gamma_1 \leqslant D\Gamma_2$. При достаточно общих условиях для дисперсий оценок одного и того же параметра можно указать положительную нижнюю границу.

Оценка, дисперсия которой в действительности принимает это минимальное значение, называется *эффективной*. Она является наилучшей оценкой в том смысле, что лучше всего использует информацию, имеющуюся в выборке.

Однако во многих случаях эффективные оценки не существуют.

5.2.2.2. Методы получения оценок.

5.2.2.2.1. Метод моментов. Для параметров, которые известным образом составляются из моментов, оценку получают, заменяя моменты через так называемые *эмпирические моменты*. В качестве k-го эмпирического начального момента берут функцию выборки

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

В качестве эмпирического центрального момента k-го порядка берут функцию выборки

$$m_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k.$$

Пример 67. Математическое ожидание — первый (начальный) момент. Следовательно, метод моментов в качестве оценки для MX дает величину

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Пример 68. Дисперсия есть второй (центральный) момент. Метод моментов дает в качестве оценки для $DX = \sigma^2$ величину

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Пример 69. Для ковариации метод моментов дает оценку

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}). \tag{5.92}$$

Пример 70. Для коэффициента корреляции, согласно методу моментов, получается оценка

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}. \tag{5.93}$$

Ковариацию и коэффициент корреляции можно рассматривать только тогда, когда в генеральной совокупности появляются два интересующих нас параметра: X и Y. Выборка объема n состоит тогда из последовательности пар $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n))$.

5.2.2.2.2. Метод наибольшего правдоподобия. Пусть дана выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ объема n из генеральной совокупности с непрерывно распределенным признаком X. Пусть плотность вероятности X содержит неизвестный параметр γ, который следует оценить по выборке, и имеет вид $f(x, \gamma)$.

Функцией правдоподобия называют функцию параметра γ, определяемую соотношением

$$L(x_1, \ldots, x_n; \gamma) = f(x_1, \gamma) f(x_2, \gamma) \ldots f(x_n, \gamma). \tag{5.94}$$

Рассмотрим случай дискретного X с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots$ и вероятностями $P(X = x_j) = p_j(\gamma)$. Обозначим через x_r наибольшее из возможных значений, которые встречаются в выборке, а через $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — абсолютные частоты, с которыми появляются значения $x_1, \ldots, x_r$ в выборке $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i = n\right)$.

В этом случае *функцией правдоподобия* называют функцию параметра γ, определяемую соотношение

$$L(x_1, \ldots, x_n; \gamma) = p_1^{f_1}(\gamma) p_2^{f_2}(\gamma) \ldots p_r^{f_r}(\gamma). \tag{5.95}$$

Метод наибольшего правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки параметра γ берется значение, при котором функция правдоподобия достигает своего максимума. Это значение $\hat{\gamma}$ является функцией $x_1, \ldots, x_n$:

$$\hat{\gamma} = \Gamma(x_1, \ldots, x_n).$$

Соответствующая функция выборки $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$ называется *наиболее правдоподобной оценкой* γ.

Параметр $\hat{\gamma}$ (и одновременно $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$) находят, решая относительно γ уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0. \tag{5.96}$$

Часто вместо (5.96) используют уравнение

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = 0. \tag{5.97}$$

Если плотность $f(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ или функция вероятностей $P(X = x_k) = p_k(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ зависит от l параметров, то *наиболее правдоподобную оценку системы параметров* $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ получают решением системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{5.98}$$

или

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_i} = 0 \qquad (i = 1,\ldots,l). \tag{5.99}$$

Наиболее правдоподобные оценки имеют некоторые замечательные свойства. При достаточно общих условиях они являются состоятельными и асимптотически нормально распределенными (однако не всегда несмещенными), и имеют среди всех асимптотически нормально распределенных оценок наибольшую эффективность. Справедливо следующее положение: если вообще имеется эффективная оценка, то она получается методом наибольшего правдоподобия.

Пример 71. Следует оценить вероятность p некоторого события A. Пусть

$$X = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ не происходит,} \\ 1, & \text{если } A \text{ происходит,} \end{cases}$$

есть индикатор события A (см. 5.1.2); $P(X=0) = p_0(p) = 1-p$, $P(X=1) = p_1(p) = p$. Пусть в n независимых наблюдениях событие A происходит m раз, т. е. $f_0 = n-m$, $f_1 = m$. Таким образом, согласно (5.95), имеем $L = p^m(1-p)^{n-m}$, $\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0$. Отсюда следует, что $\hat{p} = \frac{m}{n} = w_n(A)$ (частота A). Следовательно, $w_n(A)$ есть наиболее правдоподобная оценка неизвестного p.

Пример 72. Пусть X распределено по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Проведем выборку и получим значения $x_1,\ldots,x_n$ (x_i – целые числа). Пусть r – наибольшее из наблюдавшихся в выборке чисел, $f_0,\ldots,f_r$ – абсолютные частоты, с которыми числа $0, 1, 2,\ldots,r$ появляются в выборке, $p_j(\lambda) = P(X=j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$. Тогда, согласно формуле (5.95), $L = \prod_{i=0}^{r}\left(\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)^{f_i}$. В соответствии с (5.97) получаем $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^{r} f_i\left(\frac{i}{\lambda} - 1\right) = 0$, откуда $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=0}^{r} i f_i}{\sum_{i=0}^{r} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}$. Величина $\bar{x}$ есть, таким образом, наиболее правдоподобная оценка для λ и вместе с тем состоятельная, асимптотически нормально распределенная оценка параметра λ распределения Пуассона.

Пример 73. Пусть X распределено нормально с неизвестными параметрами a и σ. Их следует оценить, исходя из выборки $(x_1,\ldots,x_n)$ объема n. Функция правдоподобия:

$$L(x_1,\ldots,x_n;\, a, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2\right].$$

Следовательно,

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2.$$

Согласно (5.99), получаем следующие уравнения для определения a и σ^2:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = 0,$$

откуда $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}$ и $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = s_*^{2}$. Следовательно, $(\bar{x}, s_*^{2})$ есть наиболее правдоподобная оценка параметров (a, σ^2). Мы уже знаем, что s_*^{2} не является несмещенной оценкой, а только асимптотически несмещена.

5.2.2.3. Доверительные оценки. Точечная оценка дает оценочное значение соответствующего параметра из данной выборки, но ничего не дает для точности и достоверности оценки. Такие данные поставляют доверительные оценки (границы).

Пусть $(X_1,\ldots,X_n)$ есть некоторая математическая выборка из генеральной совокупности с признаком X, распределение которой зависит от параметра γ. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $\underline{\Gamma}(X_1,\ldots,X_n)$ и $\bar{\Gamma}(X_1,\ldots,X_n)$ – такие функции выборок, что при произвольном значении параметра γ выполняется равенство

$$P(\underline{\Gamma}(X_1,\ldots,X_n) < \gamma < \bar{\Gamma}(X_1,\ldots,X_n)) = 1 - \alpha. \tag{5.100}$$

Тогда случайный интервал $(\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma})$ называется *доверительной оценкой* параметра γ с *мерой надежности* $1-\alpha$.

Если имеется реализация $(x_1,\ldots,x_n)$ выборки $(X_1,\ldots,X_n)$, т. е. если произведена выборка, то реализация доверительной оценки дает интервал $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ и в большом ряду выборок истинное значение γ лежит примерно в $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ случаев внутри вычисленных доверительных границ. Равенство (5.100) можно интерпретировать и так: случайный интервал $(\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma})$ «покрывает» истинный параметр с вероятностью $1-\alpha$.

5.2.2.3.1. Доверительная оценка неизвестной вероятности по большим выборкам. Частота $W_n(A)$ является точечной оценкой $p = P(A)$; она асимптотически нормально распределена с $MW_n(A) = p$, $DW_n(A) = pq/n$.

Если $X \in N(x;\, a, \sigma)$, то $\frac{X-a}{\sigma} \in N(x;\, 0, 1)$. Зададим α. Величина z_α такая, что

$$P\left(-z_\alpha < \frac{X-a}{\sigma} < z_\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} e^{-x^2/2}\,dx = 2\Phi_0(z_\alpha) = 1 - \alpha,$$

может быть найдена из уравнения

$$2\Phi_0(z_\alpha) = 1 - \alpha \tag{5.101}$$

при помощи табл. 1.1.2.6.2.

Если эти рассуждения применить к $W_n(A)$, то по заданному α можно найти z_α так, чтобы

$$P\left(-z_\alpha < \frac{W_n(A) - p}{\sqrt{pq/n}} < z_\alpha\right) = P\left(\left|\frac{W_n(A) - p}{\sqrt{pq/n}}\right| < z_\alpha\right) \approx 1 - \alpha.$$

Из неравенства $\left|\frac{W_n - p}{\sqrt{pq/n}}\right| < z_\alpha$ следует, что

$$p^2\left(1 + \frac{z_\alpha^2}{n}\right) - p\left(2W_n + \frac{z_\alpha^2}{n}\right) + W_n^2 < 0,$$

откуда можно вычислить оба значения $\underline{p}(W_n)$, $\bar{p}(W_n)$, которые представляют доверительные оценки для p. Если α выбрано достаточно малым, то случайный интервал $(\underline{p}(W_n), \bar{p}(W_n))$ «покрывает» p с мерой надежности, близкой к 1.

5.2.2.3.2. Доверительная оценка a при неизвестном σ из нормально распределенной с законом $N(x; a, \sigma)$ генеральной совокупности. Оценка основана на том факте, что при высказанных предположениях величина $\frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$ удовлетворяет t-распределению с $m=n-1$ степенями свободы. Следовательно, на основании табл. 1.1.2.8 по заданному α можно отыскать число $t_{\alpha, n-1}$, для которого справедливо равенство

$$P\left(-t_{\alpha,n-1} < \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n} < t_{\alpha,n-1}\right) = 1-\alpha$$

или

$$P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1} < a < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}\right) = 1-\alpha.$$

Таким образом, случайный интервал $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1},\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}\right)$ есть доверительная оценка a с мерой надежности $p = 1-\alpha$.

5.2.2.3.3. Доверительная оценка σ при неизвестном a из генеральной совокупности, нормально распределенной с законом $N(x; a, \sigma)$. Отправной точкой является тот факт, что при заданных предпосылках величина $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ удовлетворяет χ^2-распределению с $n-1$ степенями свободы. Из табл. 1.1.2.7 по заданному α и $m=n-1$ степеням свободы определяют два числа c_1 и c_2 такие, что

$$P(\chi^2 < c_1) = 1 - P(\chi^2 > c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(\chi^2 > c_2) = \frac{\alpha}{2},$$

$c_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}$, $c_2 = \chi^2_{\alpha/2}$. Например, для $\alpha = 0{,}02$ и $m=19$ получаем, что $c_1 = \chi^2_{0,99} = 7{,}6$ и $c_2 = \chi^2_{0,01} = 36{,}2$. Числа c_1, c_2 определены так, что

$$P\left(c_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < c_2\right) = 1-\alpha,$$

или

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right) = 1-\alpha.$$

Таким образом, $\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2},\ \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right)$ есть доверительная оценка σ^2 с мерой надежности $1-\alpha$.

5.2.2.3.4. Доверительные интервалы асимптотически нормально распределенных оценок. Если Γ есть некоторая асимптотически нормально распределенная точечная оценка γ, то z_α определяется формулой (5.101) и для этого z_α справедливо соотношение

$$P\left(-z_\alpha < \frac{\Gamma-\gamma}{\sqrt{D(\Gamma)}} < z_\alpha\right) \approx 1-\alpha,$$

откуда получается доверительная оценка γ с мерой значимости $1-\alpha$. Пример 73 был конкретным использованием этого общего соображения.

5.2.3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ (ТЕСТЫ)

5.2.3.1. Постановка задачи. Пусть два предприятия производят провод. Пусть X – прочность на разрыв провода, изготовленного на предприятии A; Y – прочность на разрыв провода, изготовленного на предприятии B; X, Y можно считать нормально распределенными и независимыми. Пусть на основании многолетних наблюдений известны σ_X и σ_Y. С каждого предприятия был взят и проверен провод из 50 катушек. При этом получились средние прочности на разрыв: $\bar{x} = 120{,}8$ кгс/мм^2 (предприятие A) и $\bar{y} = 128{,}2$ кгс/мм^2 (предприятие B). Следует проверить, можно ли считать это расхождение случайным или оно является значительным (существенным). Мы выдвигаем гипотезу, что расхождение случайно, т. е. истинные средние прочности на разрыв совпадают. Следовательно, тогда гипотеза H_0 (нулевая гипотеза) может быть сформулирована так: $MX = MY$. При этой гипотезе величина

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{D(\bar{X}-\bar{Y})}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}$$

распределена по закону $N(x;0, 1)$. Для заданного α (α называется *вероятностью погрешности* или *уровнем значимости*) из табл. 1.1.2.6.2 можно определить величину z_α такую, что $P(|Z| > z_\alpha) = 1 - 2\Phi_0(z_\alpha) = \alpha$.

Конкретная выборка дает для «величины теста» Z значение z. Если $|z| > z_\alpha$, то говорят, что z лежит в критической области. Тогда при однократном проведении опыта происходит событие, вероятность которого меньше α. Согласно опытному факту, описанному в 5.1.1.2, в этом случае гипотеза $MX = MY$ должна быть отвергнута. Говорят, что наблюдавшееся расхождение значительно. Если вычисленное z не лежит в критической области, т. е. $|z| < z_\alpha$, то можно лишь утверждать, что предложенная гипотеза не противоречит материалу наблюдений.

Пусть в рассмотренном вначале конкретном примере $\sigma_X = 8{,}0$ кгс/мм^2, $\sigma_Y = 9{,}4$ кгс/мм^2. Тогда $\sqrt{D(\bar{X}-\bar{Y})} = \sqrt{\frac{8^2}{50} + \frac{(9{,}4)^2}{50}} = 1{,}75$ кгс/мм^2. Если взять в качестве вероятности погрешности $\alpha = 0{,}05$, то получим, что $z_\alpha = 1{,}96$, $z = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{1{,}75} = -\frac{7{,}4}{1{,}75} = -4{,}23$, $|z| > z_\alpha = 1{,}96$. Таким образом, вычисленное z лежит в критической области. Следовательно, гипотеза $MX = MY$ должна быть отвергнута, т. е. качественное различие между продукциями предприятий A и B существенно и его нельзя объяснить случайностью выборки.

5.2.3.2. Общая теория. На основании материала выборки следует проверить гипотезу H_0. Гипотеза H_0 может быть, например, гипотезой о равенстве определенных параметров распределения, о равенстве законов распределения, о некоррелированности двух случайных величин и т. д. Для проверки

такой гипотезы необходима контрольная величина T, которой является соответствующим образом выбранная и приспособленная к задаче функция выборки. По заданному уровню значимости α (чаще всего выбираются α равным 0,05, или 0,02, или 0,01) определяется область B — так называемая *критическая область*, удовлетворяющая условию

$$P(T \in B \mid H_0 \text{ верна}) \leqslant \alpha. \quad (5.102)$$

Область B можно найти практически, если известно распределение (или по меньшей мере асимптотическое распределение) контрольной величины T.

Метод проверки состоит в следующем. Производится выборка, которая дает частное значение t контрольной величины T. Если $t \in B$, т. е. если осуществляется событие, имеющее очень малую вероятность α, то от гипотезы H_0 отказываются. Если t не лежит в B, то можно заключить, что данные наблюдения не противоречат принятой гипотезе.

Ошибочное решение, когда гипотеза H_0 отвергается, хотя она и верна, называют *ошибкой первого рода*. Чем меньше α, тем меньше вероятность того, что совершается ошибка первого рода.

Ошибочное решение, когда гипотеза H_0 не отвергается, хотя она неправильна, называют *ошибкой второго рода*. Если α задано, то, согласно условию (5.102), критическую область B можно выбрать бесконечно многими способами. Ее выбирают так, чтобы вероятность допустить ошибку второго рода была по возможности наименьшей. Критические области рассматриваемых в дальнейшем тестов выбираются именно с этой точки зрения.

5.2.3.3. t-критерий. t-критерий служит для сравнения двух средних значений из нормально распределенных генеральных совокупностей в предположении, что дисперсии σ_X и σ_Y равны, хотя и неизвестны. Таким образом, проверяемая гипотеза H_0 утверждает, что $MX = MY$. Пусть $(X_1, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ — независимые случайные выборки из обеих генеральных совокупностей; они могут иметь совершенно разные объемы. В качестве контрольной используют величину

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \quad (5.103)$$

При сделанных предпосылках (нормальная распределенность X и Y и равенство дисперсий) и в предположении, что гипотеза H_0 правильна, T удовлетворяет t-распределению Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. Поэтому критическая область B критерия может быть установлена следующим образом. Для уровня значимости α из табл. 1.1.2.8 определяется $t_{\alpha,k}$, где $k = n_1 + n_2 - 2$.

Если вычисленная (согласно (5.103)) *реализация t удовлетворяет неравенству $|t| > t_{\alpha,k}$, то гипотезу H_0 отвергают.*

По отношению к предпосылке «нормальной распределенности» t-критерий не очень чувствителен. Его можно применять, если статистические распределения обеих выборок не имеют нескольких вершин и не слишком асимметричны. Предпосылка $\sigma_X = \sigma_Y$ во многих случаях может быть обоснована на содержательном уровне; гипотезу $\sigma_X = \sigma_Y$ можно проверить и по F-критерию (см. ниже).

Пример 74. Нужно проверить влияние двух различных кормовых смесей на увеличение веса свиней. Для этого 10 свиней кормили только первой кормовой смесью, а 10 других свиней — только второй ($n_1 = n_2 = 10$). Пусть X — увеличение массы при одной кормовой смеси, а Y — при другой. Величины X и Y можно считать нормально распределенными (центральная предельная теорема). Так как дисперсия увеличения массы складывается из свойств отдельных животных, а эти свойства действуют независимо от питания, то можно принять $\sigma_X = \sigma_Y$.

Таким образом, выполнены предпосылки для применения t-критерия. Получились следующие эмпирические средние значения: $\bar{x} = 112{,}1$ кг, $\bar{y} = 100{,}2$ кг. Эмпирические дисперсии равны соответственно $s_X^2 = 211$, $s_Y^2 = 86$. Согласно (5.103), получаем

$$t = \frac{112{,}1 - 100{,}2}{\sqrt{9 \cdot 211 + 9 \cdot 86}} \sqrt{\frac{10 \cdot 10(10 + 10 - 2)}{10 + 10}} = 2{,}2.$$

Для $\alpha = 0{,}05$ и $k = 10 + 10 - 2 = 18$ из табл. 1.1.2.8 находим $t_{0,05;18} = 2{,}101$. Так как $|t| > t_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 отвергается. Следовательно, с вероятностью погрешности 0,05 можно сказать, что один корм лучше другого.

5.2.3.4. F-критерий. Гипотезы о дисперсии имеют в технике большое значение, так как σ^2 есть мера таких числовых характеристик, как точность машин, погрешности измерительных приборов, точность технологических процессов и т. п.

F-критерий служит для проверки гипотезы $\sigma_X = \sigma_Y$ при условии, что X и Y распределены нормально. Из каждой генеральной совокупности производятся выборки объема n_1 и n_2. В качестве контрольной величины используют отношение эмпирических дисперсий $F = S_X^2/S_Y^2$ или $F = S_Y^2/S_X^2$ (смотря по обстоятельствам, бо́льшую дисперсию выбирают в качестве числителя). Величина F удовлетворяет F-распределению с (m_1, m_2) степенями свободы ($m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$). Критическая область выбирается следующим образом. Для уровня значимости α при $p = \alpha/2$ и соответствующих степенях свободы m_1, m_2 из табл. 1.1.2.10 выбирают значение $F_{p;m_1,m_2}$. Если f, вычисленное по выборке, больше, чем это критическое значение, то гипотеза должна быть отклонена с вероятностью погрешности α (тех значений α, которые указаны в таблице, достаточно для практических целей).

Пример 75. Двумя измерительными приборами X и Y произведены соответственно 10 и 20 измерений. Получились следующие эмпирические дисперсии: $s_X^2 = 12{,}2$, $s_Y^2 = 8{,}0$. Тогда $f = s_X^2/s_Y^2 = 12{,}2/8{,}0 = 1{,}525$. Из табл. 1.1.2.10 для уровня доверительности $\alpha = 0{,}10$ находим $F_{0,05;\,9,19} = 2{,}42$. Так как вычисленное значение f меньше, чем критическое значение, то различие между s_X^2 и s_Y^2 незначительно, т. е. гипотеза, что оба измерительных прибора одинаково точны, не противоречит данным наблюдений.

5.2.3.5. Критерий Уилкоксона служит для проверки, относятся ли две выборки к одной и той же генеральной совокупности; другими словами, гипотеза H_0: $F_X(x) \equiv F_Y(x)$ проверяется посредством одной выборки $(x_1, \dots, x_{n_1})$ из X и одной выборки $(y_1, \dots, y_{n_2})$ из Y. Относительно распределений X и Y никаких предположений не делается.

Способы проверки, при которых не делается предположений о распределении в генеральной совокупности, называются способами, *свободными от параметров*, в противоположность рассматривавшимся до сих пор параметрическим критериям, в которых предполагалась нормальная распределенность X и Y. Значения $x_1, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, \ldots, y_{n_2}$ обеих выборок упорядочиваются вместе по их величинам. Пусть, например, для $n_1 = 4$ и $n_2 = 5$ получилась следующая последовательность: $y_5x_3x_4y_1y_2x_2y_4y_3x_1$. В случае $y_j < x_i$ говорят, что пара значений (x_i, y_j) образует инверсию. В нашем примере x_3 и x_4 образуют по одной инверсии (с y_5), x_2 образует три инверсии (с y_2, y_1, y_5), а x_1 образует пять инверсий (со всеми y_j). В качестве контрольной величины принимается u — *полное число инверсий*. Если гипотеза верна, то u не должно слишком сильно отклоняться от своего математического ожидания $Mu = \frac{n_1n_2}{2}$. От гипотезы отказываются, если $\left|u - \frac{n_1n_2}{2}\right|$ больше определенного критического значения u_α. Критическое значение u_α берут для заданного уровня значимости из табл. 1.1.2.11. Для больших n_1 и n_2, для которых u_α нельзя взять из табл. 1.1.2.11, справедлива формула

$$u_\alpha = z_\alpha \sqrt{\frac{n_1n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

причем z_α определяется, согласно (5.101), из табл. 1.1.2.6.2.

Пример 76. Из двух партий некоторой продукции было взято по 12 деталей и для каждой из них измерен определенный признак. Нужно проверить гипотезу о том, что этот признак в обеих партиях имеет одинаковое распределение, другими словами, что производственный процесс от партии к партии изменяется несущественно.

Табл. 5.3 показывает результаты измерений.

Таблица 5.3

Результаты измерений деталей, взятых из двух партий некоторой продукции

Партия	Номер детали											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I (x)	0,8	1,9	3,0	3,5	3,8	2,5	1,7	0,9	1,0	2,3	3,3	3,4
II (y)	3,1	2,7	1,8	4,0	0,2	1,1	3,6	2,1	1,4	4,7	2,8	1,6

Упорядочивание по величине дает: 0,2(y); 0,8(x); 0,9(x); 1,0(x); 1,1(y); 1,4(y); 1,6(y); 1,7(x); 1,8(y); 1,9(x); 2,1(y); 2,3(x); 2,5(x); 2,7(y); 2,8(y); 3,0(x); 3,1(y); 3,3(x); 3,4(x); 3,5(x); 3,6(y); 3,8(x); 4,0(y); 4,7(y).

Число инверсий есть $u = 1 + 1 + 1 + 4 + 5 + 6 + 6 + 8 + 9 + 9 + 9 + 10 = 69$. Следовательно, $\left|u - \frac{n_1n_2}{2}\right| = |69 - 72| = 3$. Для $\alpha = 0,05$ из табл. 1.1.2.11 получаем, что $u_\alpha = 35,0$. Таким образом, гипотезу H_0: $F_X(x) \equiv F_Y(x)$ не следует отвергать.

5.2.3.6. χ^2-критерий. При помощи рассмотренных до сих пор критериев можно было проверить, являются ли некоторые различия, имеющиеся в материале наблюдений двух выборок, существенными (значимыми) или случайными. Обратимся теперь к критериям, при помощи которых проверяют, удовлетворяет ли рассматриваемая случайная величина X заданному закону распределения $F_0(x)$. Они называются *критериями согласия*.

Критерий согласия χ^2 служит для проверки гипотезы H_0 о том, что $F_X(x) = F_0(x)$, где $F_X(x)$ — функция распределения X, а $F_0(x)$ — заданное (гипотетическое) распределение.

Рассмотрим сначала случай, когда $F_0(x)$ полностью определено, т. е. не содержит неизвестных параметров. Область значений случайной величины X делится на конечное число непересекающихся множеств (так называемых классов) $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. При непрерывном X классы Δ_i являются промежутками, при дискретном X — группами возможных значений X. Пусть p_i есть «теоретическая вероятность» того, что X попадает в Δ_i, если гипотеза H_0 верна. Если $\Delta_i = [a_i, b_i)$, то

$$p_i = F_0(b_i) - F_0(a_i). \qquad (5.104)$$

Теперь из X производится выборка $(X_1, \ldots, X_n)$ объема n. Пусть M_i — число значений выборки в Δ_i. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i = n.$$

Разбиение на классы довольно произвольно. Необходимо, однако, чтобы для граничных классов выполнялось неравенство $np_i \geqslant 1$, для остальных классов $np_i \geqslant 5$; этого всегда можно добиться за счет укрупнения классов. Если разбиение на классы удовлетворяет указанным требованиям, то контрольная величина равна

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(M_i - np_i)^2}{np_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{M_i^2}{np_i}\right) - n. \qquad (5.105)$$

В предположении, что гипотеза H_0 верна, X имеет асимптотическое χ^2-распределение с $m = k - 1$ степенями свободы. Так как χ^2 есть мера отклонения истинного распределения от гипотетического, то гипотеза отвергается, если значение, вычисленное по конкретной выборке согласно (5.105), превышает определенное критическое значение. Это критическое значение χ^2_α для заданного уровня значимости α и $m = k - 1$ степеней свободы находят из табл. 1.1.2.7. Если $\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha$, то гипотеза отвергается. Для $n > 30$ значение χ^2_α находят уже не из табл. 1.1.2.7, а вычисляют по формуле

$$\chi^2_\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2m - 1} + z_{2\alpha}\right)^2,$$

где $z_{2\alpha}$, определяемое равенством $2\Phi_0(z_{2\alpha}) = 1 - 2\alpha$, вычисляется из табл. 1.1.2.6.2.

Пример 77. От аппаратуры, применяемой при проведении тиража лотереи, требуется, чтобы для 90 возможных значений имелось равномерное распределение. Для проверки в аппарат было положено пять шаров и проведено $n = 100$ проверочных выниманий по одному шару. Распределение $F_0(x)$ определяется в соответствии с пред-

положением равномерного распределения пяти возможных значений X (X – номер вынутого шара) следующей функции вероятности: $p_i = 1/5$ для $i = 1,\dots,5$. Здесь классы – сами возможные значения. Таблица 5.4 содержит результаты вниманий m_i и данные, нужные для вычисления χ^2.

Таблица 5.4

Результаты выниманий при 100 пробных тиражах

i	Число m_i испытаний, в которых был вынут шар i	np_i	$m_i - np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	18	20	−2	0,20
2	19	20	−1	0,05
3	21	20	1	0,05
4	26	20	6	1,80
5	16	20	−4	0,80
Сумма	100	100	0	2,90

Для $\alpha = 0{,}05$ и $m = 5 - 1 = 4$ степеней свободы из табл. 1.1.2.7 найдем $\chi^2_\alpha = 9{,}5$. Так как вычисленное $\chi^2 = 2{,}9$ меньше, чем χ^2_α, то результаты тиража не дают повода сомневаться в равномерном распределении.

5.2.3.7. Случай дополнительных параметров. Чаще всего гипотетическое распределение $F_0(x)$ установлено неоднозначно, и гипотеза говорит лишь о том, что $F_0(x)$ относится к определенному множеству функций распределения $F(x; \vartheta_1, \dots, \vartheta_r)$, которое зависит от r параметров. Например, гипотеза могла бы гласить: «X имеет нормальное распределение» (здесь есть два параметра a и σ), или «X имеет распределение по закону Пуассона» (здесь имеется один параметр λ). В этом случае поступают следующим образом: по выборке получают наиболее правдоподобные оценки параметров $\hat\vartheta_1, \dots, \hat\vartheta_r$ и принимают $F_0(x) = F(x; \hat\vartheta_1, \dots, \hat\vartheta_r)$, затем по формуле (5.104) вычисляются p_i, а по (5.105) – величина χ^2. *Если производится оценка r параметров, то остается только $m = k - r - 1$ степеней свободы.* В остальном критерий остается прежним.

Пример 78. При помощи измерительного прибора было проведено 200 измерений известных расстояний, и случайная погрешность измерения записана в микрометрах. Действительная ось была разделена на девять промежутков, которые указаны в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Статистическое распределение случайной погрешности измерения в 200 измерениях

Номер промежутка	Интервал в мкм	Частота m_i
1	меньше −15	6
2	от −15 до −10	11,5
3	от −10 до −5	15,5
4	от −5 до 0	22
5	от 0 до 5	47,5
6	от 5 до 10	42
7	от 10 до 15	28
8	от 15 до 20	17
9	больше 20	10,5

Дробные значения m_i появляются из-за того, что значения, попадающие на границу классов, обычно приписываются поровну как одному, так и другому классу. Проверяется гипотеза H_0 о том, что случайная погрешность измерения X распределена нормально. Следовательно, гипотетическое распределение имеет плотность

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

которая содержит два неизвестных параметра a и σ. По этой выборке, состоящей из 200 измерений, были вычислены наиболее правдоподобные оценки для a и σ. Они дают $\bar x = 4{,}60$ мкм и $s^{*2} = 95{,}2$ мкм^2. Таким образом, функция распределения $F_0(x)$, используемая для проверки, имеет плотность

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 95{,}2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-4{,}6)^2}{95{,}2}}.$$

Отсюда по табл. 1.1.2.6.2 можно вычислить p_i. Например,

$$p_1 = P(X < -15) =$$
$$= P\left(\frac{X - 4{,}6}{\sqrt{95{,}2}} < \frac{-15 - 4{,}6}{\sqrt{95{,}2}}\right) = P\left(\frac{X - 4{,}6}{\sqrt{95{,}2}} < -2{,}00\right) =$$
$$= \frac{1}{2} - \Phi_0(2{,}00) = \frac{1}{2} - 0{,}4772 = 0{,}0228,$$

$$p_2 = P(-15 < X < -10) = P\left(-2{,}00 < \frac{X - 4{,}6}{\sqrt{95{,}2}} < -1{,}49\right) =$$
$$= \Phi_0(-1{,}49) - \Phi_0(-2{,}00) = \Phi_0(2{,}00) - \Phi_0(1{,}49) =$$
$$= 0{,}4772 - 0{,}4319 = 0{,}0453.$$

Табл. 5.6 содержит p_i ($i = 1,\dots,9$) и все данные, необходимые для вычисления χ^2.

Таблица 5.6

Таблица вычисления для χ^2-критерия

i	m_i	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	6	0,0228	4,56	0,45
2	11,5	0,0453	9,06	0,66
3	15,5	0,0954	19,08	0,67
4	22	0,1557	31,14	2,68
5	47,5	0,1968	39,36	1,68
6	42	0,1928	38,56	0,31
7	28	0,1466	29,32	0,06
8	17	0,0864	17,28	0,05
9	10,5	0,0582	11,64	0,11
Сумма	200	1,000	200,00	6,61

Таким образом, вычисление дает $\chi^2 = 6{,}61$. Так как производится оценка двух параметров, то мы имеем теперь $9 - 2 - 1 = 6$ степеней свободы. Для $\alpha = 0{,}05$ и $m = 6$ из таблицы 1.1.2.7 получаем $\chi^2_\alpha = 12{,}6$. Так как вычисленное χ^2 меньше табличного, то гипотеза о нормальной распределенности случайной погрешности измерения соответствующего прибора не противоречит материалу наблюдений на уровне значимости 0,05.

5.2.3.8. Критерий согласия Колмогорова – Смирнова. Этот критерий использует непосредственно эмпирическую функцию распределения X (см. 5.2.1). В основе лежит функция выборки

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |\bar F_n(x) - F_0(x)|,$$

причем $\bar F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, а $F_0(x)$ – гипотетическое распределение. Имеет

место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = Q(\lambda),$$

где

$$Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Контрольная величина $\sqrt{n}D_n$ асимптотически имеет функцию распределения $Q(\lambda)$. Для уровня значимости α из табл. 1.1.2.12 берут такое значение λ_0, при котором $Q(\lambda_0) = 1 - \alpha$. Если $\sqrt{n}D_n \geqslant \lambda_0$, то гипотезу H_0 о том, что X распределена по закону $F_0(x)$, отбрасывают. Критерий Колмогорова — Смирнова в общем неприменим, если в $F_0(x)$ входят оценки параметров, которые были произведены по той же самой выборке, по которой была вычислена $\tilde{F}_n(x)$.

5.2.4. КОРРЕЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ

5.2.4.1. Оценка корреляционных и регрессионных характеристик по выборкам. Для случайного вектора (X, Y) выборка (объема n) дает n пар значений признака $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. В этом случае говорят о связанной выборке в противоположность независимым выборкам, где совершенно независимо друг от друга наблюдаются n_1 значений x и n_2 значений y. Для прямых регрессии (5.60), (5.61) могут быть даны оценки; точнее говоря, теоретические характеристики регрессии (5.62), (5.63) можно оценить по выборке. По функциям выборки из 5.2.2.2, в частности (5.92) и (5.93), получаются следующие оценки: для μ_X: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; для μ_Y: $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$; для σ_X^2: $s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$; для σ_Y^2: $s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$. Для ковариации получают в качестве оценки так называемую эмпирическую ковариацию $m_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. Отсюда, заменяя в (5.62), (5.63) теоретические величины их оценками (эмпирическими величинами), получают оценки для теоретических корреляционных и регрессионных характеристик. Например, *эмпирический коэффициент корреляции*:

$$r = \frac{m_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}. \tag{5.106}$$

Аналогично получаются *эмпирические коэффициенты регрессии*:

$$b_{Y/X} = r\frac{s_Y}{s_X} = \frac{m_{XY}}{s_X^2}, \quad b_{X/Y} = r\frac{s_X}{s_Y} = \frac{m_{XY}}{s_Y^2}, \tag{5.107}$$

и *эмпирические прямые регрессии*:

$$y = \bar{y} + b_{Y/X}(x - \bar{x}), \quad x = \bar{x} + b_{X/Y}(y - \bar{y}).$$

При приблизительно линейно коррелированных X и Y при помощи этих прямых регрессии можно сделать наилучшее предсказание для Y при данном значении X или наилучшее предсказание для X при заданном значении Y. Вопрос о том, имеется ли приблизительно линейная корреляция между X и Y, только в редких случаях может быть решен теоретически. Это удается, например, если известно, что (X, Y) распределены нормально. Тогда линии регрессии являются прямыми, т. е. имеется точная линейная корреляция. В общем случае рассуждение проводится следующим образом. Каждое значение выборки (x_i, y_i) представляет одну точку в плоскости x, y, так что полная выборка дает совокупность точек в плоскости x, y. На рис. 5.11 приведены три примера

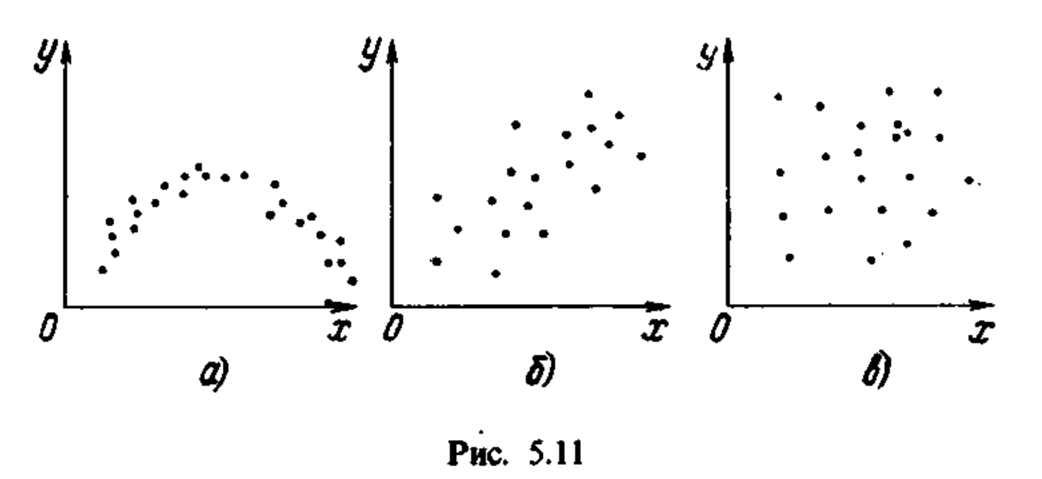


Рис. 5.11

таких совокупностей точек. На рис. 5.11, *а* график $\bar{y}(x)$ (см. 5.1.4.7) является параболической кривой, обращенной выпуклостью вверх; здесь предположение о линейной корреляции было бы неверным. На рис. 5.11, *б* график $\bar{y}(x)$ — приблизительно прямая. Таким образом, здесь можно приближенно принять линейную корреляцию. В случае рис. 5.11, *в* следует предполагать отсутствие корреляции.

При предположении приблизительно линейной корреляции r есть мера силы связи между X и Y. Величина $|r|$, близкая к 1, означает очень тесную связь, в то время как величина $|r|$, близкая к 0, говорит об очень слабой связи или об ее отсутствии.

5.2.4.2. Проверка гипотезы $r = 0$ в случае нормально распределенной генеральной совокупности. В исследованиях корреляции очень важным является вопрос о том, действительно ли имеется корреляция, отличная от нуля, или ее нет, т. е. существенно ли отлично от нуля значение r. Следовательно, нужно проверить гипотезу $r = 0$. Для этого от конкретной оценки $\tilde{r}$, согласно (5.106), переходят к соответствующей функции выборки R согласно с (5.93). *В предположении, что X и Y распределены нормально, величина R распределена асимптотически нормально по закону* $N(x;\ r,\ \sigma_R)$, где

$$\sigma_R \approx s_r = \frac{1 - \tilde{r}^2}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, критическая область может быть определена так. Для α из табл. 1.1.2.6.2 по формуле (5.101) вычисляют z_α. Если для вычисленного по выборке $\tilde{r}$ справедливо неравенство $|\tilde{r}| > z_\alpha s_r$, то гипотеза $r = 0$ отклоняется. Этот критерий годится только для больших выборок. Для малых выборок можно построить критерий на основании того

факта, что при данных предпосылках величина $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2}$ удовлетворяет t-распределению Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

5.2.4.3. Общая задача регрессии. Пусть случайная величина Y зависит от k переменных $x_1, \ldots, x_k$ и распределена нормально с дисперсией σ, не зависящей от x_j, и математическим ожиданием

$$MY = \bar{y} = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k. \quad (5.108)$$

В этом случае говорят, что x_j определяют Y только в среднем.

Пример 79. В технике часто встречаются случайные величины следующего типа: $Y = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_k t^k + Z(t)$, где $Z(t) \in N(t;\ 0,\ \sigma)$; t означает время.

Если положить $x_j = t^j$ $(j = 1, \ldots, k)$, то очевидно, что Y – случайная величина описанного выше типа.

Задача состоит в том, чтобы посредством серии из n независимых наблюдений $(y_i,\ x_{1i}, \ldots, x_{ki})$ $(i = 1, \ldots, n)$ оценить неизвестные параметры α, $\beta_1, \ldots, \beta_k$, входящие в соотношение (5.108). Отдельные наблюдения удовлетворяют соотношению (5.108) не точно: появляется ошибка δ_i, и

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \delta_i. \quad (5.109)$$

Относительно δ_i предполагается следующее: 1) все δ_i независимы друг от друга; 2) $\delta_i \in N(t;\ 0,\ \sigma)$ для всех i. Тогда для плотности вектора $(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_n)$ справедлива формула

$$f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2\right), \quad (5.110)$$

из которой, заменяя δ_i согласно (5.109), получаем функцию правдоподобия для оценки α, $\beta_1, \ldots, \beta_k$:

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta_1 x_{1i} - \ldots - \beta_k x_{ki})^2\right). \quad (5.111)$$

Уравнения наибольшего правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_j} = 0 \quad (j = 1,\ \ldots,\ k) \quad (5.112)$$

дают оценки $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_j$, которые точно совпадают со значениями, вычисленными для неизвестных параметров α, β_j по методу наименьших квадратов. Например, в одномерном случае

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \delta_i, \qquad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x},$$

где

$$\hat{\alpha} = \left(\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right);$$

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}\right) \Big/ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2\right).$$

Техника проведения вычислений $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}_j$ описана в 7.1.5.1.

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СИМПЛЕКС-МЕТОД

6.1.1.1. Общая постановка задачи, геометрическая интерпретация и решение задач с двумя переменными. *Линейным программированием* называется раздел математики, в котором изучаются методы нахождения минимума или максимума линейной функции конечного числа переменных при условии, что переменные удовлетворяют конечному числу дополнительных условий (ограничений), имеющих вид линейных уравнений или линейных неравенств.

Таким образом, *задача линейного программирования* (ЗЛП) в общем случае может быть сформулирована следующим образом.

Найти такие значения действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых *целевая функция*

$$Q(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$

принимает минимальное значение на множестве точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

Здесь коэффициенты a_{ij}, b_i, p_j ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) – действительные числа. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$b_1 \geqslant 0, \quad b_2 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0.$$

В матричном виде задачу линейного программирования можно сформулировать так:

$$Ax = b, \ x \geqslant 0, \ Q_{\min}(x) = p^Tx,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$, A – матрица (a_{ij}) размера $m \times n$,

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T,$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \geqslant 0$$

(последнее неравенство означает, что $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$; аналогичный смысл имеет неравенство $x \geqslant 0$). Индекс у целевой функции означает, что ищется минимум этой функции. Если ищется максимум целевой функции $G(x) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$, то это равнозначно отысканию минимума функции $Q(x) = -G(x) = (-p_1)x_1, \ \ldots, \ + (-p_n)x_n$. Если в дополнительных условиях имеется неравенство, например $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$, то введением *вспомогательного переменного* y можно перейти к уравнению $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + y = b_i$. Для нового переменного также справедливо неравенство $y \geqslant 0$; в целевую функцию оно входит с коэффициентом 0. Если для переменного x_j не задано условие $x_j \geqslant 0$, то могут быть введены, например, новые переменные x_j' и x_j'' с дополнительными условиями $x_j' \geqslant 0$ и $x_j'' \geqslant 0$, причем $x_j = x_j' - x_j''$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать в основном только задачи минимизации целевой функции $Q(x)$ при условиях, заданных линейными уравнениями с неотрицательными свободными членами b_i, и в предположении неотрицательности переменных. Эти задачи мы и будем называть задачами линейного программирования.

Точка $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, удовлетворяющая всем условиям, называется *допустимой точкой*. Множество всех допустимых точек называется *допустимой областью*. Если после отбрасывания одного условия допустимая область не изменяется, то это условие называется *лишним*.

В задачах с двумя переменными можно отказаться от перехода от неравенств к уравнениям, так как линейное неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b$ допускает непосредственную геометрическую интерпретацию: все точки, удовлетворяющие этому неравенству, лежат на прямой $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ и в одной из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость. Если заштриховать полуплоскость, не удовлетворяющую неравенству, и проделать это для всех неравенств в отдельности, то часть плоскости, оставшаяся в конце концов незаштрихованной, и образует допустимую область.

Пример 1.

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && x_1 + 2x_2 \leqslant 12,\\
&\text{II:} && x_1 \leqslant 8,\\
&\text{III:} && x_1 + x_2 \geqslant 3,\\
&\text{IV:} && x_1 \geqslant 0,\\
&\text{V:} && x_2 \geqslant 0,\\
& && Q_{\min}(x) = x_1 + 2{,}5x_2.
\end{aligned} \qquad (6.1)$$

Для того чтобы найти полуплоскость, удовлетворяющую условию I, построим сначала прямую $x_1 + 2x_2 = 12$

((0; 6) и (12; 0) — точки ее пересечения с осями), затем возьмем произвольную точку, не лежащую на этой прямой, и проверим, удовлетворяют ли ее координаты неравенству I или нет. Если удовлетворяют, то вся полуплоскость, в которой находится эта точка, является допустимой (по отношению к этому условию). В противном случае полуплоскость является недопустимой и на рисунках заштриховывается. Таким же образом поступим с условием II и снова исключим точки, не входящие в допустимую область. Графическое изображение двух этих неравенств дано на рис. 6.1. Затем переходим к условиям III, IV и V. Все точки плоскости, не исключенные условиями I–V,

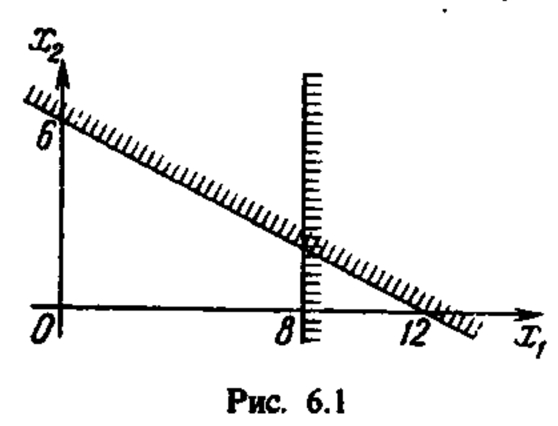


Рис. 6.1

образуют допустимую область. Вследствие неотрицательности переменных она всегда лежит в первом квадранте плоскости. На рис. 6.2 изображена допустимая область для нашего примера.

Точки, в которых целевая функция принимает значение 17, лежат на прямой $x_1 + 2{,}5x_2 = 17$ линии уровня

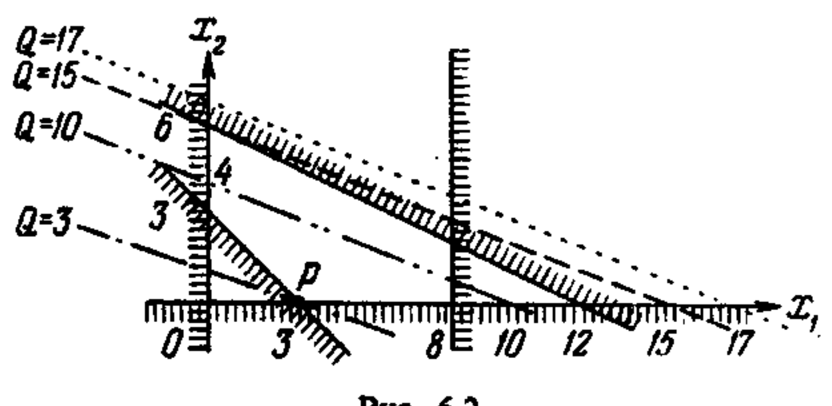


Рис. 6.2

$Q = 17$, принадлежащей числу 17 (на рис. 6.2 эта линия обозначена точками). Все линии уровня, принадлежащие каким-либо другим значениям, также являются прямыми, параллельными прямой $Q = 17$. Если сместить прямую $Q = 17$ параллельно самой себе в одном направлении, то значения, принадлежащие линиям уровня, уменьшатся; при параллельном переносе в другом направлении они увеличатся. В каждой точке допустимой области целевая функция принимает значение, принадлежащее той линии уровня, на которой лежит эта точка. Направление, в котором следует осуществлять сдвиг, чтобы достичь меньших значений целевой функции, можно найти построением другой линии уровня, например линии $Q = 15$. Путем параллельного переноса прямой $Q = \text{const}$ в направлении меньших значений целевой функции в допустимой области достигают того, что эта прямая будет пересекать допустимую область по части ее границы. (В общем случае параллельная прямая может либо пересекать допустимую область в одной точке, либо проходить по отрезку, лучу или прямой.) В примере 1 это точка P, лежащая на линии уровня, принадлежащей числу 3 (см. рис. 6.2). Все другие допустимые точки лежат на линиях уровня, принадлежащих бо́льшим значениям. Все точки, лежащие на линиях уровня с меньшими значениями, являются недопустимыми. Таким образом, точка P есть искомая оптимальная точка.

Заметим, что оптимальная точка является угловой точкой допустимой области. Точка P не есть относительный минимум целевой функции, так как линейная функция вообще не имеет относительных экстремумов, т. е. P не может быть найдена методами дифференциального исчисления.

Все задачи линейного программирования с двумя переменными можно решить при помощи графического метода, объясненного на этом примере.

Множество всех оптимальных решений задачи линейного программирования выпукло.

Для пояснения рассмотрим допустимую область примера 1 (с целевой функцией $Q_{\min}(x) = x_1 + x_2$; рис. 6.3). Минимальное значение принимается целевой функцией не только в обеих угловых точках P_1 и P_2, но и на всем отрезке между ними. Некоторые примеры допустимых областей даны на рис. 6.4. Соответствующие особенности могут встретиться и в задачах линейного программирования с более чем двумя переменными.

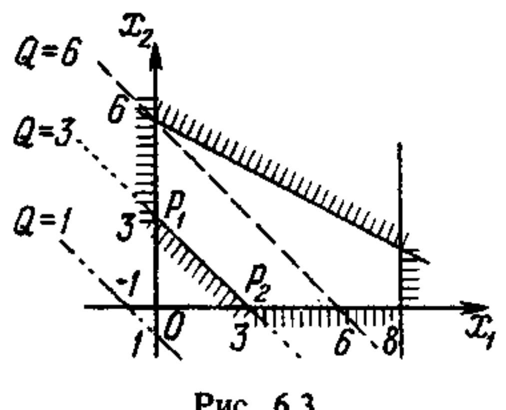


Рис. 6.3

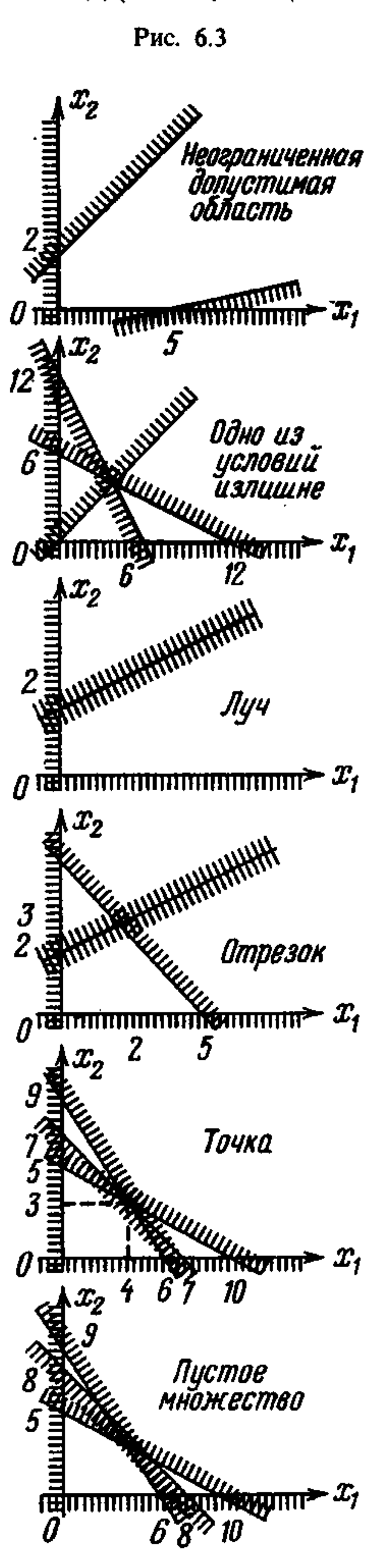


Рис. 6.4

Допустимая область для задач в $\mathbf{R}^n$. Обобщая двумерный случай, допустимую область в пространстве $\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как пересечение конечного числа полупространств. Она образует так называемое *многогранное множество.* Точка называется *вершиной* допустимой области в $\mathbf{R}^n$, если она является допустимой и представляет собой точку пересечения n линейно независимых гиперплоскостей. (Каждое линейное уравнение задает гиперплоскость. Каждому линейному неравенству сопоставляется ограниченное гиперплоскостью полупространство; гиперплоскость получают, заменяя знак неравенства знаком равенства.) Вершина называется *вырожденной,* если она является точкой пересечения более чем n гиперплоскостей. Вершину x нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации двух других точек допустимой области (равенство $x = \lambda \overset{1}{x} + (1 - \lambda)\overset{2}{x}$ при всех допустимых $\overset{1}{x} \neq \overset{2}{x}$ не выполняется ни для каких λ, удовлетворяющих условию $0 < \lambda < 1$). Всякая

допустимая область имеет конечное число вершин. Если допустимая область образована n неравенствами $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ и m уравнениями, то она может иметь самое большее C^m_{n+m} вершин.

Если допустимая область ограничена и не пуста, то она является *выпуклым многогранником*, и задача линейного программирования в этом случае всегда разрешима, а оптимальное значение целевой функции достигается по крайней мере в одной из вершин многогранника. Если допустимая область пуста, то задача линейного программирования неразрешима. Если допустимая область не ограничена (см. первый пример на рис. 6.4), то задача линейного программирования может быть разрешимой или неразрешимой. Если задача имеет решение, то всегда имеется по меньшей мере одна вершина, где достигается оптимальное значение целевой функции.

Если допустимая область является многогранником, то каждая допустимая точка x имеет по меньшей мере одно представление вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overset{i}{x},$$

где $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, k$, причем $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{k}{x}$ — вершины многогранника.

Если многогранное множество имеет по меньшей мере одну вершину, то каждая точка множества имеет по меньшей мере одно представление вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overset{i}{x} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \overset{j}{r},$$

где $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, k$, $\mu_j \geqslant 0$ при $j = 1, \ldots, h$; $\overset{i}{x}$ — вершины и $\overset{j}{r}$ — направляющие векторы неограниченных ребер многогранного множества.

6.1.1.2. Канонический вид ЗЛП, изображение вершины в симплекс-таблице. Основным алгоритмом решения задач линейного программирования является симплекс-метод (см. 6.1.3). Его можно применять в том случае, когда задача программирования задана в специальном, каноническом виде. Позднее будет показано, как каждую задачу линейного программирования с непустой допустимой областью можно привести к такому виду (см. 6.1.4).

В рассмотренной в 6.1.1.1 формулировке уравнения ЗЛП

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ &x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0, \\ &Q(x) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \end{aligned} \tag{6.2}$$

имеют *канонический вид*, если каждое i-е уравнение содержит переменное x_{λ_i} такое, что коэффициент перед ним в этом уравнении равен 1, а во всех других уравнениях равен 0. Если при этом $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$, то говорят о *допустимом каноническом виде*. Переменные x_{λ_i} называются базисными, остальные — свободными.

В следующем примере, относящемся к допустимому каноническому виду, мы отметим базисные переменные подчеркиванием:

$$\begin{aligned} 3x_1 + \underline{x_2} + 2x_3 &= 5, \\ -x_1 + 3x_3 + \underline{x_5} &= 9, \\ x_1 - 4x_3 + \underline{x_4} &= 1. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 4$. Если уравнения заданы в канонической форме, то целевая функция легко может быть выражена через свободные переменные. Если целевая функция имеет вид

$$Q(x) = x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 17x_4 + 3x_5,$$

то вычитанием из этого выражения первого уравнения, умноженного на 13 (так как там выделено переменное x_2, а в целевой функции x_2 имеет коэффициент 13), второго уравнения, умноженного на 3, и, наконец, третьего уравнения, умноженного на 17, получим целевую функцию $Q(x) = -52x_1 + 35x_3 + 109$. Вместе с уравнениями канонического вида и условиями знака она описывает ЗЛП в каноническом виде:

$$\begin{aligned} 3x_1 + \underline{x_2} + 2x_3 \qquad &= 5, \\ -x_1 \qquad + 3x_3 + \underline{x_5} &= 9, \\ x_1 \qquad - 4x_3 + \underline{x_4} &= 1, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_5 &\geqslant 0, \\ Q_{\min} = -52x_1 + 35x_3 &+ 109. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Значение величины $Q_{\min}$ при нулевых значениях свободных переменных обозначим через Q_0. Здесь $Q_0 = 109$.

6.1.1.2.1. Симплекс-таблица. ЗЛП канонического вида может быть записана в таблице следующего вида. Левый крайний столбец содержит

Симплекс-таблица

В общем случае

	λ_{m+1}	$\cdots$	λ_n	
λ_1	$a_{1\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	$a_{1\lambda_n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$			
λ_m	$a_{m\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	$a_{m\lambda_n}$	b_m
	$p_{\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	p_{λ_n}	$-Q_0$

Для примера (6.3)

	1	3	
2	3	2	5
5	−1	3	9
4	1	−4	1
	−52	35	−109

номера λ_i базисных переменных, верхняя строчка — номера λ_{m+j} свободных переменных. В точке пересечения строки, соответствующей значению λ_i, и столбца, соответствующего λ_{m+j}, стоит коэффициент $a_{i,\lambda_{m+j}}$ при свободной переменной в урав-

нении i, в котором выделена базисная переменная x_{λ_i}. Соответственно справа записаны постоянные члены уравнений, внизу – коэффициенты целевой функции от свободных переменных, а в правом нижнем углу записано значение $-Q_0$.

Каноническому виду ЗЛП или соответствующей симплекс-таблице сопоставляется точка $x_{\lambda_1} = b_1, x_{\lambda_2} = b_2, \ldots, x_{\lambda_m} = b_m, x_{\lambda_{m+1}} = \ldots = x_{\lambda_n} = 0$. Координаты этой точки удовлетворяют n линейно независимым условиям ЗЛП: m уравнениям и $n - m$ неравенствам $x_i \geqslant 0$ для свободных переменных. Если, кроме того, $b_i \geqslant 0$ (допустимый канонический вид), то точка является допустимой и, следовательно, вершиной (см. 6.1.1).

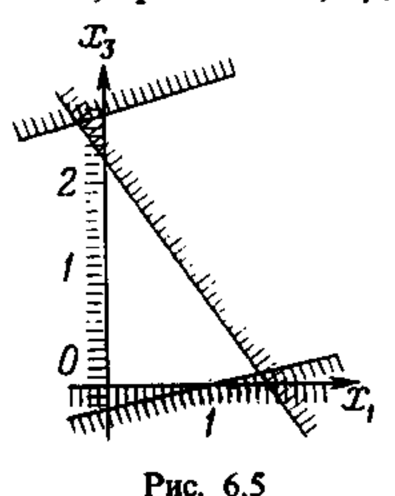


Рис. 6.5

В примере (6.3) получается точка $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 9$. Если сравнить задачу (6.3) с задачей, содержащей только два переменных:

$$3x_1 + 2x_3 \leqslant 5, \quad -x_1 + 3x_3 \leqslant 9,$$
$$x_1 - 4x_3 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,$$
$$Q = -52x_1 + 35x_3 + 109,$$

и представляемой графически на плоскости x_1, x_3 (рис. 6.5), то, рассматривая x_2, x_5, x_4 как вспомогательные переменные, получим, что искомая вершина есть начало координат.

6.1.1.2.2. Свойства вершин и обращение базисов. Вершина, полученная при помощи ЗЛП канонического вида, обладает следующими свойствами: $n - m$ ее координат имеют значение 0 (свободные переменные); m координат имеют значение $\geqslant 0$ (базисные переменные); вектор-столбцы матрицы A, соответствующие базисным переменным, линейно независимы, т. е. образуют базис пространства $\mathbf{R}^m$. Невырожденная матрица, составленная из этих вектор-столбцов, называется *базисной матрицей*.

Если число линейно независимых уравнений среди условий ЗЛП в пространстве $\mathbf{R}^n$ равно m, то эти условия в совокупности необходимы и достаточны для того, чтобы определяемая ими точка была вершиной допустимой области (в том числе и в случае, когда ЗЛП задана не в каноническом виде).

Если вершина известна, то всегда можно найти соответствующий канонический вид ЗЛП, умножив матрицу коэффициентов и столбец «правых частей» слева на матрицу, обратную базисной. При таком преобразовании системы уравнений допустимая область не изменяется.

В примере (6.3) точка $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 10$ по указанному выше критерию также является вершиной, так как столбцы в (6.3), соответствующие базисным переменным x_1, x_2, x_5, образуют невырожденную матрицу и, следовательно, линейно независимы:

базисная матрица $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Найдем канонический вид, соответствующий этой вершине:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 14 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Получим канонический вид уравнений

$$\underline{x_1} - 4x_3 + x_4 = 1,$$
$$\underline{x_2} + 14x_3 - 3x_4 = 2,$$
$$-x_3 + x_4 + \underline{x_5} = 10,$$

из которого сразу можно найти вершину. Чтобы получить канонический вид ЗЛП, следует, кроме того, привести целевую функцию к новым свободным переменным x_3, x_4.

6.1.1.2.3. Базисные решения. Вершина, обладающая указанными в 6.1.1.2.2 свойствами, соответствует допустимому базисному решению. Если вершина имеет m положительных координат (m – число линейно независимых уравнений-условий), то соответствующие переменные должны быть выбраны в качестве базисных переменных, и тогда вершине отвечает точно одно базисное решение. Если вершина имеет меньше чем m положительных координат (вырожденная вершина), то ей, возможно, отвечают несколько базисных решений.

Зная базисное решение, всегда можно однозначно найти вершину.

6.1.1.3. Симплекс-метод при заданной начальной таблице. Так как решение ЗЛП достигается (по крайней мере) в вершине допустимой области, то достаточно рассмотреть значения целевой функции только в вершинах.

Данной допустимой симплекс-таблице соответствует одно базисное решение, т. е. одна вершина. Проверка выделяет ту вершину, которую следует считать оптимальной. В других случаях способ ведет или к заключению, что задача неразрешима (т. е. минимальное значение целевой функции в допустимой области равно $-\infty$), или к новому базисному решению, в котором значение целевой функции не больше, чем в первом. В общем случае после конечного числа шагов достигается вершина, в которой целевая функция имеет оптимальное значение. При наличии вырожденных вершин в очень редких, исключительных случаях может оказаться, что мы снова и снова будем проходить один и тот же цикл базисных решений, относящихся к одной и той же вырожденной вершине. Этот особый случай будет рассмотрен в 6.1.5. Допустимой симплекс-таблице соответствует точка минимума, если все коэффициенты целевой функции неотрицательны:

$$p_{\lambda_{m+1}} \geqslant 0, \ \ldots, \ p_{\lambda_n} \geqslant 0.$$

Тогда минимальное значение целевой функции равно Q_0 *).

(Этот критерий становится понятным, если вспомнить, что все переменные в целевой функции $Q = p_{\lambda_{m+1}} x_{\lambda_{m+1}} + \ldots + p_{\lambda_n} x_{\lambda_n} + Q_0$ могут принимать только неотрицательные значения.) Если все коэффициенты целевой функции положительны, то вершина, соответствующая таблице, является единственной оптимальной точкой.

Если критерий не выполнен, т. е. не все коэффициенты целевой функции неотрицательны, то следует перейти от одного допустимого базисного

*) Условие $p_{\lambda_{m+1}} \leqslant 0, \ \ldots, \ p_{\lambda_n} \leqslant 0$ есть критерий максимальности; исходя из него, можно описать также дальнейшие этапы метода максимизации целевой функции (заметим, что умножением целевой функции на -1 можно легко перейти от максимизации к минимизации).

решения к соседнему допустимому, т. е. такому, в котором множества базисных и свободных переменных изменены на один элемент. В невырожденном случае этому геометрически соответствует переход от одной вершины к другой вдоль ребра допустимой области (обе вершины принадлежат одному ребру). Этот процесс называют также *симплекс-шагом* или *заменой базиса*. Опишем последовательно его этапы.

1) Выбор разрешающего столбца: среди элементов последней строки таблицы выбирается любой $p_{j^*} < 0$, и соответствующий столбец называется *разрешающим*. В качестве p_{j^*} рекомендуется выбирать минимальное p_j.

2) Выбор разрешающей строки: если $a_{ij^*} \leqslant 0$ для всех элементов разрешающего столбца, то минимума не существует (целевая функция в допустимой области не ограничена снизу). Если это не так, то для всех положительных a_{ij^*} нужно вычислить отношения b_i/a_{ij^*}. Строка i, для которой отношение минимально, называется *разрешающей строкой* i^*:

$$\min_{a_{ij^*}>0} \frac{b_i}{a_{ij^*}} = \frac{b_{i^*}}{a_{i^*j^*}};$$

общий элемент $a_{i^*j^*}$ разрешающего столбца и разрешающей строки называется *разрешающим элементом*.

3) Замена базиса при помощи разрешающего элемента $a_{i^*j^*}$ – процесс, производящий в таблице преобразования канонического вида, при котором базисное переменное x_{i^*} становится свободным и одновременно свободное переменное x_{j^*} становится базисным. Если w – какое-либо значение в таблице, то через $\hat{w}$ будем обозначать значение, стоящее в новой таблице на том же самом месте:

а) $\hat{i}^* = j^*$, $\hat{i} = i$ для всех $i \neq i^*$,
$\hat{j}^* = i^*$, $\hat{j} = j$ для всех $j \neq j^*$.

б) $\hat{a}_{i^*j^*} = \dfrac{1}{a_{i^*j^*}}$; $\hat{a}_{ij^*} = -a_{ij^*}\hat{a}_{i^*j^*}$ для всех $i \neq i^*$,
$\hat{p}_{j^*} = -p_{j^*}\hat{a}_{i^*j^*}$.

в) $\hat{a}_{i^*j} = a_{i^*j}\hat{a}_{i^*j^*}$ для всех $j \neq j^*$; $\hat{b}_{i^*} = b_{i^*}\hat{a}_{i^*j^*}$. (*)

Отметим, что элементы правого столбца и нижней строки пересчитываются по тому же принципу, что и элементы в центральной части таблицы. То же имеет место и в г) и д).

г) $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \hat{a}_{i^*j}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$ и $j \neq j^*$,
$\hat{p}_j = p_j - \hat{a}_{i^*j}p_{j^*}$ для всех $j \neq j^*$.

При вычислениях вручную рекомендуется проделать вычисления г) по столбцам для каждого $j \neq j^*$. Заметим, что

(новый столбец) = (старый столбец) –

– (то, что уже стоит в новом столбце после выполнения в)) · (разрешающий столбец).

«То, что уже стоит в новом столбце после выполнения в)» есть число $\hat{a}_{i^*j}$, постоянное при пересчете каждого столбца.

д) $\hat{b}_i = b_i - \hat{b}_{i^*}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$, $(-\hat{Q}_0) = (-Q_0) - \hat{b}_{i^*}p_{j^*}$.

Правый столбец таблицы преобразуется аналогично нормальному разрешающему столбцу, остается неизменным также правило преобразования такого столбца, сформулированное в г). Единое для столбца число, уже имеющееся после в), здесь есть $\hat{b}_{i^*}$.

	…	j	…	j^*	…	
		⋮		⋮		⋮
i	…	a_{ij}	…	a_{ij^*}	…	b_i
⋮		⋮		⋮		⋮
i^*	…	a_{i^*j}	…	**[$a_{i^*j^*}$]**	…	b_{i^*}
⋮		⋮		⋮		⋮
	…	p_j	…	p_{j^*}	…	$-Q_0$

	…	$\hat{j}$	…	$\hat{j}$	…	
⋮		⋮		⋮		⋮
$\hat{i}$	…	$\hat{a}_{ij}$	…	$\hat{a}_{ij^*}$	…	$\hat{b}_i$
⋮		⋮		⋮		⋮
$\hat{i}$	…	$\hat{a}_{i^*j}$	…	$\hat{a}_{i^*j^*}$	…	$\hat{b}_i$
⋮		⋮		⋮		⋮
	…	$\hat{p}_j$	…	$\hat{p}_{j^*}$	…	$-\hat{Q}_0$

Всегда должно получаться $\hat{b}_i \geqslant 0$ и $(-\hat{Q}_0) \geqslant (-Q_0)$. Может случиться, что $\hat{p}_j < 0$, хотя $p_j \geqslant 0$.

Пример 2.

$$\begin{array}{lllllll}
2x_1 & -x_3 & +3x_4 & & & +\underline{x_8} & = 1, \\
\underline{x_2} & & +3x_4 & & & & = 2, \\
2x_1 & & & & +\underline{x_7} & & = 6, \\
 & x_3 & & +\underline{x_6} & & & = 6, \\
-2x_1 & +x_3 & -3x_4 & +\underline{x_5} & & & = 2,
\end{array} \qquad (6.4)$$

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_8 \geqslant 0,$$

$$Q_{\min} = 4x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 66.$$

ЗЛП задана в канонической форме. Запишем соответствующую симплекс-таблицу:

	1	3	4	
8	2	−1	3	1
2	0	0	3	2
7	2	0	0	6
6	0	1	0	6
5	−2	**[1]**	−3	2
	4	−6	9	−66

1) Выбор разрешающего столбца: имеется только один отрицательный коэффициент в целевой функции (-6). Следовательно, $j^* = 3$ (разрешающий столбец есть $(-1, 0, 0, 1, 1)^T$). Разрешающий столбец содержит положительные элементы ($a_{63} = 1$, $a_{53} = 1$).

2) Выбор разрешающей строки: найдем $\min (6:1,\ 2:1) = 2 (= b_5/a_{53})$. Следовательно, $i^* = 5$. Разрешающий элемент $a_{53} = 1$. Он обведен рамкой.

3) Замена базиса:

а) В левом столбце новой таблицы на место 5 ставится 3. Наоборот, в верхней строке вместо 3 запишем 5. Остальные индексы остаются на своих местах.

б) Место элемента $a_{53} = 1$ в новой таблице занимает $\hat{a}_{53} = 1 : a_{53} = 1 : 1 = 1$.

в) В новой таблице место разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) займет столбец:

$-$(то, что уже стоит в новом столбце после выполнения б))$\cdot$(разрешающий столбец, кроме разрешающего элемента),

т. е. $\hat{a}_{83} = -1 \cdot (-1) = 1$, $\hat{a}_{23} = -1 \cdot 0 = 0$, $\hat{a}_{73} = -1 \cdot 0 = 0$, $\hat{a}_{63} = -1 \cdot 1 = -1$, $\hat{p}_3 = -1 \cdot (-6) = 6$. В новой таблице место разрешающей строки (кроме разрешающего элемента) займет строка:

(то, что уже стоит в новой строке после выполнения б))$\cdot$(разрешающая строка, кроме разрешающего элемента),

т. е. $\hat{a}_{51} = 1 \cdot (-2) = -2$, $\hat{a}_{54} = 1 \cdot (-3) = -3$, $\hat{b}_5 = 1 \cdot 2 = 2$. Таким образом, мы получили следующие элементы новой таблицы:

	1	5	4	
8		1		
2		0		
7		0		
6		−1		
3	−2	1	−3	2
		6		

г) В столбец, стоящий под 1 ($j = 1$), мы должны внести в новой таблице следующие элементы (кроме элемента -2, уже стоящего там после в)):

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{81} \\ \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{71} \\ \hat{a}_{61} \\ \hline \hat{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{81} \\ a_{21} \\ a_{71} \\ a_{61} \\ \hline p_1 \end{bmatrix} + (-\hat{a}_{51}) \begin{bmatrix} a_{83} \\ a_{23} \\ a_{73} \\ a_{63} \\ \hline p_3 \end{bmatrix};$$

$$\hat{a}_{81} = 2 - (-2) \cdot (-1) = 0,$$
$$\hat{a}_{21} = 0 - (-2) \cdot 0 = 0,$$
$$\hat{a}_{71} = 2 - (-2) \cdot 0 = 2,$$
$$\hat{a}_{61} = 0 - (-2) \cdot 1 = 2,$$
$$\hat{p}_1 = 4 - (-2) \cdot (-6) = -8.$$

Пересчитав оставшиеся два столбца, получим полную таблицу:

	1	5	4		
8	0	1	0	3	
2	0	0	3	2	2:3
7	2	0	0	6	
6	2	−1	3	4	4:3
3	−2	1	−3	2	
	−8	6	−9	−54	

Пока критерий минимальности не выполнен, необходимы дальнейшие замены базисов. Они приводят к следующим таблицам:

	1	5	2		
8	0	1	0	3	
4	0	0	1/3	2/3	
7	2	0	0	6	6:2
6	2	−1	−1	2	2:2
3	−2	1	1	4	
	−8	6	3	−48	

	6	5	2		
8	0	1	0	3	
4	0	0	1/3	2/3	2/3:1/3
7	−1	1	1	4	4:1
1	1/2	−1/2	−1/2	1	
3	1	0	0	6	
	4	2	−1	−40	

	6	5	4	
8	0	1	0	3
2	0	0	3	2
7	−1	1	−3	2
1	1/2	−1/2	3/2	2
3	1	0	0	6
	4	2	3	−38

В последней таблице все коэффициенты целевой функции неотрицательны (даже положительны). Следовательно, в точке $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 2$, $x_8 = 3$ целевая функция принимает минимальное значение $Q_0 = -(-38) = 38$. (Переменным, индекс которых стоит в верхней строке, в базисном решении приписывается значение 0; это свободные переменные. Каждое из переменных, индекс которых стоит в левом столбце, приравнивается к числу, записанному в правом столбце той же самой строки; это базисные переменные.)

6.1.1.4. Получение начальной вершины.

6.1.1.4.1. Метод искусственных переменных. Для оптимизации целевой функции посредством симплекс-метода должна быть задана симплекс-таблица, соответствующая допустимому базисному решению. Рассмотрим ЗЛП с n переменными, не имеющую еще канонического вида (ср. (6.2)). Введением искусственного переменного

x_{n+i} в каждое i-е уравнение ($i = 1, \ldots, m$) и другой целевой функции G мы приходим к следующей вспомогательной задаче, всегда имеющей решение:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.5) \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + \qquad x_{n+m} = b_m, \\ &x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0, \ x_{n+1} \geqslant 0, \ \ldots, \ x_{n+m} \geqslant 0, \\ &G_{\min}(x) = x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}. \end{aligned}$$

Если исходная задача (6.2) имеет допустимую точку, то дополним ее, положив $x_{n+1} = 0, \ \ldots, \ x_{n+m} = 0$, до допустимой точки $\bar{x}$ задачи (6.5). Так как $G(x) \geqslant 0$ для всех допустимых точек (6.5), то точка $\bar{x}$ такая, что $G(\bar{x}) = 0$, есть оптимальная точка вспомогательной задачи.

Примечание. Если оптимальной точкой вспомогательной задачи является такая точка $\bar{\bar{x}}$, что $G(\bar{\bar{x}}) > 0$, то исходная задача (6.2) не имеет допустимых точек и потому неразрешима.

6.1.1.4.2. Решение вспомогательной задачи. Уравнения вспомогательной задачи (6.5) имеют канонический вид. Все искусственные переменные выбираются базисными, а все остальные – свободными. Преобразование целевой функции к небазисным переменным (ср. (6.2)) дает следующий результат:

$$G(x) = \left(-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\right)x_1 + \ldots + \left(-\sum_{i=1}^{m} a_{in}\right)x_n + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right). \qquad (6.6)$$

Следовательно, таблица

	1	…	n	
$n+1$	a_{11}	…	a_{1n}	b_1
⋮				⋮
$n+m$	a_{m1}	…	a_{mn}	b_m
	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	…	$-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$	$-\sum_{i=1}^{m} b_i$

есть допустимая симплекс-таблица для (6.5). Поэтому оптимальное решение вспомогательной задачи может быть найдено при помощи симплекс-метода. Как только какое-либо искусственное переменное станет небазисным, соответствующий ему столбец может быть опущен.

6.1.1.4.3. Переход от оптимальной таблицы вспомогательной задачи к начальной таблице исходной задачи. В оптимальной таблице вспомогательной задачи вычеркиваются все столбцы, где соответствующими свободными переменными являются искусственные переменные.

Случай I. Оптимальное значение целевой функции положительно (т. е. число, стоящее в правом нижнем углу таблицы, отрицательно). Тогда допустимая область исходной задачи пуста, исходная задача неразрешима.

Случай II. Оптимальное значение целевой функции равно $G(x) = 0$.

Случай IIа. Среди базисных переменных нет искусственных. Тогда базисное решение, представленное таблицей, есть допустимое базисное решение исходной задачи. Остается только пересчитать целевую функцию $Q(x)$ исходной задачи в функцию свободных переменных и внести в таблицу новую строку целевой функции.

Случай IIб. Среди базисных переменных есть по меньшей мере одно искусственное переменное. Этот случай сводится к случаю IIа следующим методом. Если все коэффициенты в строке, соответствующей искусственному базисному переменному, равны 0, то строка в таблице вычеркивается. (Это может повторяться не более $m - r$ раз, где m – число строк, а r – ранг матрицы A.) В противном случае какой-либо отличный от нуля коэффициент в этой строке выбирается разрешающим, производится замена базиса симплекс-методом и столбец, принадлежащий искусственному свободному переменному, вычеркивается.

Пример 3.

$$\begin{aligned} &3x_1 \quad + 2x_3 \qquad - x_5 = 12, \\ &x_1 - x_2 + x_3 \qquad\quad = 5, \\ &x_1 \quad + x_3 + x_4 \qquad = 6, \qquad (6.7) \\ &x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_5 \geqslant 0, \quad Q = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5. \end{aligned}$$

Начальная таблица соответствующей вспомогательной задачи ($G(x) = x_6 + x_7 + x_8$):

	1	2	3	4	5	
6	[3]	0	2	0	−1	12
7	1	−1	1	0	0	5
8	1	0	1	1	0	6
	−5	1	−4	−1	1	−23

Решение вспомогательной задачи:

	6	2	3	4	5	
1	1/3	0	2/3	0	−1/3	4
7	.	−1	1/3	0	1/3	1
8	:	0	1/3	[1]	1/3	2
		1	−2/3	−1	−2/3	−3

	2	3	8	5	
1	0	2/3	.	−1/3	4
7	−1	1/3	:	[−1/3]	1
4	0	1/3	1	1/3	2
	1	−1/3		−1/3	−1

	2	3	7	
1	−1	1	:	5
5	−3	1	3	3
4	1	0	:	1
	0	0		0

Мы пришли к случаю IIa. Целевая функция задачи (6.7), пересчитанная в функцию переменных x_2, x_3, имеет вид $Q(x) = -3x_2 - 2x_3 + 10$, и таблица

	2	3	
1	−1	1	5
5	−3	1	3
4	1	0	1
	−3	−2	−10

есть допустимая начальная таблица для (6.7).

6.1.1.5. Вырожденный случай и его рассмотрение при помощи симплекс-метода. Как было упомянуто в 6.1.1.3, применение симплекс-метода может натолкнуться на трудности, если вершина, соответствующая симплекс-таблице, вырождена и имеет несколько базисных решений. В этом случае при некотором i в таблице $b_i = 0$. Тогда в качестве разрешающей строки обычно следует выбирать как раз строку, в которой $b_i = 0$; значение целевой функции при замене базиса не изменяется. Теоретически (в практических примерах чрезвычайно редко!) может случиться, что после нескольких замен базиса мы снова придем к такой же таблице и, следовательно, никогда не достигнем оптимального значения (это явление называется зацикливанием). Если симплекс-метод снова и снова приводит к вырожденным таблицам без изменения при этом целевой функции, он дополняется таким образом, чтобы препятствовать появлению таких циклов. Метод дополнения геометрически может быть истолкован как предварительное внесение малых изменений в правые части условий, посредством чего граничные гиперплоскости допустимой области сдвигаются так, что вырожденных вершин больше не существует.

6.1.1.5.1. Лексикографический порядок векторов. Вектор $x = (x_1, \ldots, x_k)^T$ называется *лексикографически меньшим*, чем вектор $y = (y_1, \ldots, y_k)^T$ (обозначается $x \prec y$), если существует такое j, что $x_1 = y_1, \ldots, x_{j-1} = y_{j-1}$; $x_j < y_j$. Тогда пишут также $y \succ x$.

Пример 4. $y \succ 0$ означает, что первая отличная от 0 компонента y положительна (последующие компоненты могут быть произвольными).

6.1.1.5.2. Дополнение к симплекс-таблице. Каждая правая часть b_i дополняется до вектора $(b_i, b_{i1}, \ldots, b_{im})^T$ при помощи m других чисел так, чтобы векторы удовлетворяли условию $(b_{i1}, \ldots, b_{im})^T \succ 0$ и были линейно независимы. Это условие выполнено, например, если положить $b_{ii} = 1$ и $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Далее, $-Q_0$ дополняется до вектора $(-Q_0, -Q_1, \ldots, -Q_m)^T$ произвольными числами (например, нулями). Получаем таблицу

	λ_{m+1}	$\ldots$	λ_n				
λ_1	$a_{1\lambda_{m+1}}$	$\ldots$	$a_{1\lambda_n}$	b_1	b_{11}	$\ldots$	b_{1m}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_m	$a_{m\lambda_{m+1}}$	$\ldots$	$a_{m\lambda_n}$	b_m	b_{m1}	$\ldots$	b_{mm}
	$p_{\lambda_{m+1}}$	$\ldots$	p_{λ_n}	$-Q_0$	$-Q_1$	$\ldots$	$-Q_m$

6.1.1.5.3. Дополнение к симплекс-методу (см. 6.1.1.3).

2) Частные b_i/a_{ij^*}, образованные для всех i таких, что $a_{ij^*} > 0$, объединяются в векторы-частные $\left(\frac{b_i}{a_{ij^*}}, \frac{b_{i1}}{a_{ij^*}}, \ldots, \frac{b_{im}}{a_{ij^*}}\right)^T$; лексикографически минимальный среди них соответствует строке i^*.

3б) $\hat{b}_{i^*k} = b_{i^*k}\hat{a}_{i^*j^*}$ для всех k.

3д) $\hat{b}_{ik} = b_{ik} - \hat{b}_{i^*k}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$ и всех k; $(-\hat{Q}_k) = (-Q_k) - \hat{b}_{i^*k}p_{j^*}$ для всех k.

Получаемые таким образом векторы всегда будут удовлетворять условию $(\hat{b}_i, \hat{b}_{i1}, \ldots, \hat{b}_{im})^T \succ 0$; линейная независимость этих векторов будет также обеспечена. Выполнение соотношения $(-\hat{Q}_0, -\hat{Q}_1, \ldots, -\hat{Q}_m)^T \succ (-Q_0, -Q_1, \ldots, -Q_m)^T$ гарантирует, что при дальнейших вычислениях мы никогда не вернемся к однажды уже рассмотренной таблице.

Этот расширенный симплекс-метод может применяться в общем случае.

Пример 5. Следующая таблица представляет собой пример, в котором существует возможность после нескольких замен базиса снова вернуться к той же самой таблице:

	3	4	5	6	
1	1	−1	−1	3	0
2	2	−1	−1/2	1	0
	−1	−1	−3	8	2

Последовательно можно выбрать следующие пары значений (i^*, j^*): (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 1), (6, 2). Полученная таким образом таблица будет тождественна исходной. Если же снова выбрать $j^* = 3$, но применить симплекс-метод с лексикографическим расширением:

	3	4	5	6			
1	1	−1	−1	3	0	1	0
2	[2]	−1	−1/2	1	0	0	1
	−1	−1	−3	8	2	0	0

то вектор $(0, 1, 0)^T$, возникающий при $i = 1$, будет лексикографически больше, чем вектор $(0, 0, 1/2)^T$, соответствующий $i = 2$; таким образом, следует выбрать $i^* = 2$, после чего возникает новая таблица:

	2	4	5	6			
1	−1/2	−1/2	−3/4	5/2	0	1	−1/2
3	1/2	−1/2	−1/4	1/2	0	0	1/2
	1/2	−3/2	−13/4	17/2	2	0	1/2

Метод, примененный к этой таблице, ведет к выводу, что задача неразрешима, так как целевая функция в допустимой области не ограничена снизу.

6.1.1.6. Двойственность в линейном программировании.

6.1.1.6.1. Теоремы двойственности. Каждой ЗЛП можно сопоставить точно одну *двойственную* ей ЗЛП; связь задается следующим образом.

Исходная ЗЛП	Двойственная ЗЛП
$A_{11}\overset{1}{x} + A_{12}\overset{2}{x} \geqslant \overset{1}{b}$,	$A_{11}^T\overset{1}{u} + A_{21}^T\overset{2}{u} \leqslant \overset{1}{p}$,
$A_{21}\overset{1}{x} + A_{22}\overset{2}{x} = \overset{2}{b}$,	$A_{12}^T\overset{1}{u} + A_{22}^T\overset{2}{u} = \overset{2}{p}$,

$\overset{1}{x} \geqslant 0$, $\overset{2}{x}$ – произвольное, $\overset{1}{u} \geqslant 0$, $\overset{2}{u}$ – произвольное,

$$Q_{\min}(x) = \overset{1}{p}{}^T\overset{1}{x} + \overset{2}{p}{}^T\overset{2}{x}; \qquad G_{\max}(u) = \overset{1}{b}{}^T\overset{1}{u} + \overset{2}{b}{}^T\overset{2}{u}.$$

При этом векторы переменных x и u и соответственно векторы правых частей и коэффициентов целевой функции разложены на два вектора, а матрица коэффициентов состоит из четырех подматриц.

В частности, в первой задаче по знаку ограничено ровно столько переменных, сколько есть неравенств среди условий во второй задаче.

Важные частные случаи:

уравнений, из которой можно найти оптимальное решение первичной задачи.

Теневые цены. Если заданы две задачи, соответствующие первому из вышеприведенных «важных частных случаев», то для каждого i оптимальное значение x_i называется *теневой ценой* единицы ингредиента, ограниченного i-м неравенством двойственной задачи. Ее величина показывает, насколько увеличилось бы оптимальное значение G, если бы граница p_i этого переменного увеличилась на единицу. Теневая цена совпадает с коэффициентом целевой функции при i-м свободном переменном в оптимальной канонической форме двойственной задачи, так что ее можно определить без рассмотрения первичной задачи.

6.1.1.6.2. Двойственный симплекс-метод. Двойственный симплекс-метод копирует вычисления в таблице заданной задачи, которые в случае применения симплекс-метода следовало бы выполнять в двойственной задаче.

ЗЛП	Двойственная ЗЛП	Замечания
$Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0,\ Q_{\min}(x) = p^Tx$	$A^Tu \leqslant p,\ u \geqslant 0,$ $G_{\max}(u) = b^Tu$	Если $p \geqslant 0$, то при помощи вспомогательных переменных в двойственной задаче можно сразу найти начальную таблицу
$Ax \geqslant b$, x – произвольное, $Q_{\min}(x) = p^Tx$	$A^Tu = b,\ u \geqslant 0,$ $-G_{\min}(u) = -b^Tu$	В то время как первичная задача задана без ограничений знака, двойственная ей задача имеет вид ЗЛП

Теоремы двойственности. Если рассмотреть задачу, двойственную к двойственной задаче, то снова придем к исходной задаче.

Если в одной задаче допустимая область пуста, то в другой целевая функция неограничена снизу (при минимизации) или сверху (при максимизации).

Если разрешима одна задача, то разрешима и другая; оптимальные значения целевых функций при этом одинаковы. Если первичная задача имеет допустимую точку x, а двойственная задача – допустимую точку u, то обе задачи разрешимы и $G(u) \leqslant \max G = \min Q \leqslant Q(x)$.

Если для двух допустимых решений $G(u) = Q(x)$, то u и x – оптимальные решения.

Теорема о дополняющей нежесткости. Если x и u допустимы в первичной, соответственно двойственной задаче, то для того, чтобы они были оптимальными решениями, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\overset{1}{u}{}^T(A_{11}\overset{1}{x} + A_{12}\overset{2}{x} - \overset{1}{b}) = 0,$$

$$\overset{1}{x}{}^T(A_{11}^T\overset{1}{u} + A_{21}^T\overset{2}{u} - \overset{1}{p}) = 0.$$

Это означает, что в точке, где достигается оптимальное значение, никогда не может одновременно быть так, чтобы i-я компонента вектора решения была положительна, а i-е неравенство второй задачи выполнялось строго.

Если известно оптимальное решение u двойственной задачи, то, подставив его в приведенное выше условие, получим линейное уравнение для x. Вместе с $A_{21}\overset{1}{x} + A_{22}\overset{2}{x} = \overset{1}{b}$ они составляют систему

Симплекс-таблица, соответствующая каноническому виду ЗЛП (ср. 6.1.1.2), называется *двойственно-допустимой*, если $p_k \geqslant 0$ для всех коэффициентов целевой функции, т. е. для $k = m + 1, \ldots, n$. Геометрически этой таблице соответствует точка пересечения n граничных гиперплоскостей допустимой области (которая, однако, не обязательно является допустимой точкой).

Двойственный симплекс-метод дает последовательность двойственно-допустимых таблиц до тех пор, пока не будет найдена допустимая таблица. По критерию минимальности симплекс-методом тем самым будет найдена оптимальная точка. Геометрически это значит, что мы подходим извне (через точки пересечения, которые не являются допустимыми) к оптимальной вершине допустимой области. Двойственно-допустимой таблице соответствует точка минимума, если все правые части неотрицательны: $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$.

Если этот критерий не выполнен, то переход к новой таблице разбивается на следующие этапы.

1) Выбор разрешающей строки: среди $b_i < 0$ в таблице выбирается произвольное число b_{i*}, а соответствующая строка называется разрешающей; в качестве b_{i*} рекомендуется выбирать минимальное b_i.

2) Выбор разрешающего столбца: если $a_{i^*j} > 0$ для всех элементов разрешающей строки, то минимума не существует (допустимая область пуста). Если это не так, то для всех отрицательных a_{i^*j} составляется частное $p_j/|a_{i^*j}|$. Столбец j, в котором частное минимально, выбирается в качестве разрешающего столбца j^*:

$$\min_{a_{i^*j} < 0} \frac{p_j}{|a_{i^*j}|} = \frac{p_{j^*}}{|a_{i^*j^*}|}.$$

3) Замену базиса производят, как и в случае симплекс-метода (см. 6.1.1.3).

Двойственно-допустимая таблица называется *двойственно-вырожденной*, если все $p_j = 0$.

6.1.1.7. Модифицированные методы, дополнительное изменение задачи.

6.1.1.7.1. Модифицированный симплекс-метод. Предположим сначала, что ЗЛП уже имеет канонический вид (в противном случае см. 6.1.1.7.3) и переменные перенумерованы так, что $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ являются базисными:

$$\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} \qquad = \beta_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{m,n-m}x_{n-m} + \qquad + x_n = \beta_m, \quad (6.8)$$
$$x_j \geqslant 0 \text{ для } j = 1, \ldots, n,$$
$$Q_{\min}(x) = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_{n-m}x_{n-m} + \gamma_0.$$

Эта ЗЛП представлена в следующей основной таблице:

	$1 \ \ldots \ n-m$	$n-m+1 \ \ldots \ n$	
$n-m+1$ $\vdots$ n	$\alpha_{11} \ldots \alpha_{1,n-m}$ $\vdots$ $\alpha_{m1} \ldots \alpha_{m,n-m}$	$1 \ 0 \ldots 0$ $0 \ \ddots \ 0$ $0 \ldots 0 \ 1$	β_1 $\vdots$ β_m
	$\varepsilon_1 \ \ldots \ \varepsilon_{n-m}$	$0 \ \ldots \ 0$	$-\gamma_0$

(6.9)

Введем следующие обозначения: $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)^T$, $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})^T$ для $j = 1, \ldots, (n-m)$, $\alpha_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ с 1 на $(j-n+m)$-м месте для $j = (n-m+1), \ldots, n$.

Модифицированная симплекс-таблица. Место симплекс-таблицы занимает следующая модифицированная симплекс-таблица:

	$1 \ \ldots \ n-m$	$n-m+1 \ \ldots$	n
λ_1 $\vdots$ λ_m		$a_{1,n-m+1} \ldots a_{1n}$ $a_{m,n-m+1} \ldots a_{mn}$	b_1 $\vdots$ b_m
	$p_1 \ldots p_{n-m}$	$p_{n-m+1} \ \ldots p_n$	$-Q_0$

(6.10)

первую расстановку чисел в которой получим, подставив на места, обозначенные буквами, соответствующие данные основной таблицы.

Для описания свойств модифицированной симплекс-таблицы введем следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,n-m+1} \ldots a_m \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m,n-m+1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\lambda_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\lambda_m} \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_{n-m+1} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

Левый столбец указывает индексы базисных переменных.

Столбец b содержит значения базисных переменных в точке пересечения, представленной таблицей (при $b \geqslant 0$ – вершина).

Величина Q_0 есть значение целевой функции в этой точке пересечения.

Величины $p_1, \ldots, p_n$ являются коэффициентами целевой функции, выраженной через свободные переменные.

Столбцы матрицы A являются столбцами канонического вида, соответствующими переменным $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$; при этом A – матрица, обратная базисной.

Все эти свойства сохраняются при переходе к новой, модифицированной симплекс-таблице по приведенному ниже методу.

Допустимой модифицированной симплекс-таблице соответствует точка минимума, если все коэффициенты целевой функции неотрицательны: $p_1 \geqslant 0, \ldots, p_n \geqslant 0$. Тогда минимальное значение целевой функции равно Q_0.

Переход к новой таблице. В случае, если этот критерий не выполнен, модифицированный симплекс-метод ведет точно к таким же переходам от вершины к вершине, как и симплекс-метод, изменяется лишь способ преобразования. Определяются только те значения симплекс-таблицы, которые используются для нахождения разрешающего элемента. Затем проводится замена базиса только для тех значений, которые стоят в модифицированной симплекс-таблице. Основой метода является тот факт, что, зная матрицу, обратную базисной, мы можем в случае надобности полностью найти канонический вид (см. 6.1.1.2).

1) Выбор разрешающего столбца: среди $p_j < 0$ в таблице выбирается произвольное $p_{j^*} < 0$; если $j^* \geqslant n-m+1$, то соответствующий столбец канонического вида известен; в противном случае мы находим его по формуле $(a_{1j^*}, \ldots, a_{mj^*})^T = A\alpha_{j^*}$ и вносим в таблицу. В любом случае столбец, соответствующий j^*, является разрешающим.

2) Выбор разрешающей строки производится, как и в случае симплекс-метода (ср. 6.1.1.3).

3) Замена базиса при помощи разрешающего элемента $a_{i^*j^*}$ осуществляется проще, чем в случае немодифицированного симплекс-метода, так как индексы столбцов фиксированы и соответствующая верхняя строка остается неизменной. Обозначим через $\hat{w}$ элемент новой таблицы, стоящий на месте элемента w. Тогда

а) $\hat{\lambda}_i = \lambda_i$ для всех $i \neq i^*$; $\hat{\lambda}_{i^*} = j^*$;

б) $\hat{a}_{i^*j} = a_{i^*j}/a_{i^*j^*}$ для всех $j = (n-m+1), \ldots, n$; $\hat{b}_{i^*} = b_{i^*}/a_{i^*j^*}$;

в) $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \hat{a}_{i^*j}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$ и всех $j = (n-m+1), \ldots, n$, а $\hat{p}_j = p_j - \hat{a}_{i^*j}p_{j^*}$ для всех $j = (n-m+1), \ldots, n$. (Ср. указание, данное в 3 г) при описании симплекс-метода (см. 6.1.1.3).)

Если $(n-m+1) \leqslant j^*$, то это не означает неприменимости формул, приведенных в б) и в).

г) $\hat{b}_i = b_i - \hat{b}_{i^*}a_{ij^*}$ для всех $i \neq i^*$, $-Q_0 = (-Q_0) - \hat{b}_{i^*}p_{j^*}$.

Правая часть вычисляется таким же образом, как столбцы в в).

д) $\hat{p}_j = \varepsilon_j + \hat{p}^T\alpha_j$ для всех $j = 1, \ldots, n - m$ (вектор $\hat{p}$ уже известен из результата в)).

После вычислений всегда должно получаться, что $\hat{b}_i \geqslant 0$ и $(-\hat{Q}_0) \geqslant (-Q_0)$. Может случиться, что $\hat{p}_j < 0$, хотя $p_j \geqslant 0$. Коэффициенты целевой функции при новых базисных переменных должны быть равны 0; их можно положить равными 0 сразу.

Для вырожденного случая справедливо все, что было изложено относительно симплекс-метода.

Преимущества модифицированного симплекс-метода. В случае симплекс-метода ошибки округления могут неограниченно расти от таблицы к таблице, так как на каждом шаге переход к следующей таблице определяют данные таблицы, имеющие некоторую погрешность. Напротив, в случае модифицированного метода применяются ε_j, α_j, определенные из основной таблицы. К тому же после определенного достаточно большого числа шагов мы можем «обновить» все данные (устранить ошибки округления), взяв из основной таблицы базисную матрицу (образованную из α_j, соответствующих базисным переменным x_{λ_j} в порядке их следования в модифицированной таблице) и найдя обратную ей. Так возникает обновленная матрица A, при помощи которой можно вычислить обновленные $b = A\beta$, $p^T = -\varepsilon^T A$ и $-Q_0 = -\varepsilon^T b$. Остальные p_j ($j = 1, \ldots, m$) вычисляются по формуле $p_j = \varepsilon_j - p^T\alpha_j$ при помощи обновленного p и данных основной таблицы. Таким образом, вся модифицированная таблица может быть вычислена непосредственно на основе данных основной таблицы, если только заданы индексы базисных переменных.

Далее, модифицированный метод ведет к уменьшению количества вычислений по сравнению с симплекс-методом, если число переменных по крайней мере в три раза больше, чем число уравнений, и многие коэффициенты равны нулю.

Пример 6. Мы снова используем пример 2, который уже был решен при помощи симплекс-метода. В качестве основной таблицы имеем:

	1	3	4	8	2	7	6	5	
8	2	−1	3	1	0	0	0	0	1
2	0	0	3	0	1	0	0	0	2
7	2	0	0	0	0	1	0	0	6
6	0	1	0	0	0	0	1	0	6
5	−2	1	−3	0	0	0	0	1	2
	4	−6	9	0	0	0	0	0	−66

↓

	1	3	4	8	2	7	6	5	
8				1	0	0	0	0	1
2				0	1	0	0	0	2
7				0	0	1	0	0	6
6				0	0	0	1	0	6
5				0	0	0	0	1	2
	4	−6	9	0	0	0	0	0	−66

первая таблица

$\xrightarrow{j^* = 3}$

	1	3	4	8	2	7	6	5	
8		−1		1	0	0	0	0	1
2		0		0	1	0	0	0	2
7		0		0	0	1	0	0	6
6		1		0	0	0	1	0	6
5		[1]		0	0	0	0	1	2
	4	−6	9	0	0	0	0	0	−66

первая таблица с внесенными в нее разрешающим столбцом

Отсюда получим первую модифицированную симплекс-таблицу (найдем в соответствии с 1) $j^* = 3$, вычислим $(a_{13}, \ldots, a_{53})^T = A\alpha_3$ и внесем в таблицу (разумеется, при практическом использовании – сразу в ту же самую таблицу). В соответствии с 2) найдем $i^* = 5$, так как $b_4 : a_{43} = 6 : 1 = 6$, $b_5 : a_{53} = 2 : 1 = 2$.

Следовательно, число 1, взятое в рамку, является разрешающим элементом. В соответствии с 3) получим вторую таблицу:

	1	5	4	8	2	7	6	5	
8				1	0	0	0	1	3
2				0	1	0	0	0	2
7				0	0	1	0	0	6
6				0	0	0	1	−1	4
3				0	0	0	0	1	2
	−8	0	−9	0	0	0	0	6	−54

Она изображает ту же самую вершину, которая была получена после первого симплекс-шага в 6.1.1.3. После следующих трех модифицированных симплекс-шагов мы получим модифицированную симплекс-таблицу вершины, для которой выполняется критерий минимальности (так же как после трех симплекс-шагов была найдена оптимальная симплекс-таблица той же самой вершины).

6.1.1.7.2. Модифицированный двойственный симплекс-метод. Данному каноническому виду ЗЛП, как и в 6.1.1.7.1, сопоставляется основная таблица и модифицированная симплекс-таблица. Мы применяем те же обозначения, что и в 6.1.1.7.1.

Если $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-m})^T \geqslant 0$, то (при любом знаке β_i) может быть применен двойственный симплекс-метод, так как задан двойственно-допустимый вид. Его также можно перевести в модифицированный вид (с теми же преимуществами, которые указаны в 6.1.1.7.1).

Критерий минимальности для модифицированного двойственного симплекс-метода такой же, как и в случае двойственного симплекс-метода.

Если критерий минимальности не выполнен, то переход к новой модифицированной симплекс-таблице осуществляется следующим образом.

1) Выбор разрешающей строки: среди $b_i < 0$ в таблице выбирается произвольное $b_{i^*} < 0$ (например, наименьшее b_i); затем вычисляются отсутствующие элементы этой разрешающей строки i^*:

$$a_{i^*j} = (a_{i^*, n-m+1}, \ldots, a_{i^*n})\,\alpha_j \text{ для } j = 1, \ldots, n - m$$

и вносятся в таблицу.

2) Выбор разрешающего столбца: j^* определяется, как и в двойственном симплекс-методе; если $j^* \geqslant n - m + 1$, то соответствующий столбец канонического вида уже известен. В противном случае он вычисляется по формуле

$(a_{1j^*},\ldots,a_{mj^*})^T = A\alpha_{j^*}$ и вносится в имеющуюся таблицу.

3) Замена базиса при помощи разрешающего элемента $a_{i^*j^*}$ делается, как и в случае модифицированного симплекс-метода.

6.1.1.7.3. Получение начальной вершины. Если данная ЗЛП еще не имеет канонического вида, то он может быть получен путем решения вспомогательной задачи (6.5), как в 6.1.1.4.1. Модифицированный симплекс-метод может быть применен также для решения этой вспомогательной задачи; однако столбцы, соответствующие вспомогательным переменным, здесь вычеркивать нельзя. Если найдена оптимальная модифицированная симплекс-таблица вспомогательной задачи такая, что $Q_0 = 0$, то в качестве «новой целевой функции» вспомогательной задачи может рассматриваться исходная целевая функция *). Затем вычисления продолжаются при помощи модифицированного симплекс-метода с тем дополнительным условием, что столбцы, соответствующие искусственным переменным, не используются в качестве разрешающих столбцов (критерий минимальности относится соответственно только к другим столбцам).

Существует также метод нахождения первой двойственно-допустимой модифицированной таблицы. Но модифицированный двойственный метод (так же как двойственный) чаще всего используется тогда, когда такая таблица задана непосредственно.

6.2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

6.2.1. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач линейного программирования. Задача заключается в отыскании такого плана перевозок продукции с m складов к n потребителям, который требовал бы минимальных затрат. Если потребитель j получает единицу продукции (по прямой дороге) со склада i, то возникают издержки p_{ij}. Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т. е. перевозка k единиц продукции вызывает расходы kp_{ij}.

Далее, предполагается, что

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad (6.11)$$

где b_i есть количество продукции, находящееся на складе i, и a_j — потребность потребителя j.

Замечание. Если $\sum_{i=1}^{m} b_i > \sum_{j=1}^{n} a_j$, то количество продукции, равное $\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$, остается на складах. В этом случае мы введем «фиктивного» потребителя $n+1$ с потребностью $\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$ и положим транспортные расходы $p_{i,n+1}$ равными 0 для всех i. Если $\sum_{i=1}^{m} b_i < \sum_{j=1}^{n} a_j$, то потребность не может быть покрыта.

В этом случае начальные условия должны быть изменены таким образом, чтобы потребность в продукции могла быть обеспечена.

Обозначим через x_{ij} количество продукции, поставляемое со склада i потребителю j. В предположении (6.11) нам нужно решить следующую ЗЛП:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \text{ для } j = 1,\ldots,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \text{ для } i = 1,\ldots,m;$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для } i = 1,\ldots,m \text{ и } j = 1,\ldots,n; \qquad (6.12)$$

$$K_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}.$$

Транспортную задачу мы можем характеризовать *транспортной таблицей* и *таблицей издержек:*

	a_1	…	a_n
b_1	.		
.		.	
.			.
b_m			.

p_{11}	…	p_{1n}
.		.
.		.
p_{m1}	…	p_{mn}

Допустимый план перевозок будем представлять в виде транспортной таблицы:

	a_1	…	a_n
b	$\bar{x}_{11}$	…	$\bar{x}_{1n}$
.	.		.
.	.		.
b_m	$\bar{x}_{m1}$	…	$\bar{x}_{mn}$

Сумма элементов строки i должна быть равна b_i, а сумма элементов столбца j должна быть равна a_j, и все $\bar{x}_{ij}$ должны быть неотрицательны.

Пример 7.

	20	5	10	10	5
15					
15					
20					

5	6	3	5	9
6	4	7	3	5
2	5	3	1	8

*) В случае $Q_0 > 0$ в оптимальной точке вспомогательной задачи допустимая область исходной задачи пуста; следовательно, сама задача неразрешима.

Мы получаем следующую ЗЛП:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} = 15,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} = 15,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} = 20,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 20,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32} = 5,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33} = 10,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34} = 10,$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35} = 5;$$
$$x_{ij} \geqslant 0 \text{ для } i=1, 2, 3;\ j=1, 2, 3, 4, 5;$$

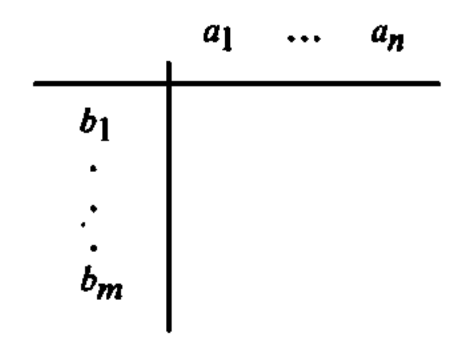
$$K_{min} = 5x_{11}+6x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+9x_{15}+6x_{21}+4x_{22}+7x_{23}+3x_{24}+5x_{25}+2x_{31}+5x_{32}+3x_{33}+x_{34}+8x_{35}.$$

Такие задачи целесообразно решать при помощи особого варианта симплекс-метода – так называемого *транспортного метода* (см. 6.2.3).

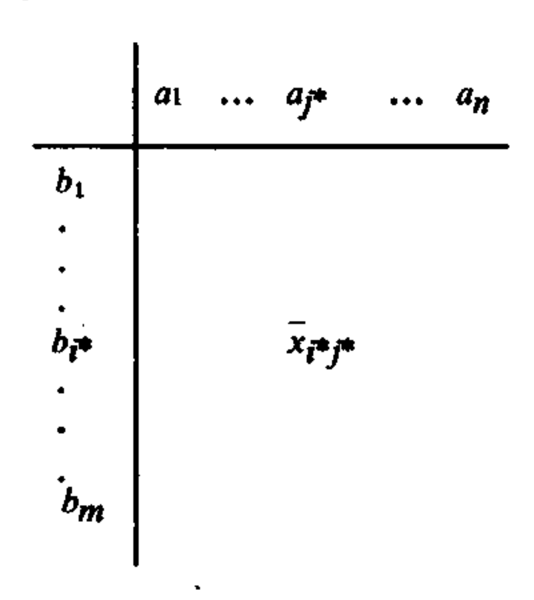
Все транспортные задачи имеют оптимальное решение. Если все значения u_j и b_i в условии транспортной задачи целочисленны, то переменные x_{ij} во всех базисных решениях (а также и в любом оптимальном базисном решении) имеют целочисленные значения.

6.2.2. ОТЫСКАНИЕ НАЧАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В транспортной таблице



выберем ячейку (i^*, j^*) и запишем в ней $\bar{x}_{i^*j^*} = \min\{b_{i^*}, a_{j^*}\}$ *):



а) Если $b_{i^*} \leqslant a_{j^*}$, то остальные ячейки строки i^* вычеркиваются (все содержимое склада i^* поставляется в j^*) и a_{j^*} заменяется на $(a_{j^*}-b_{i^*})$, а b_{i^*} – на 0.

б) Если $b_{i^*} \geqslant a_{j^*}$, то остальные ячейки столбца j^* вычеркиваются (потребитель j^* уже получил всю продукцию) и b_{i^*} заменяется на $(b_{i^*}-a_{j^*})$, а a_{j^*} – на 0.

*) В случае $\min\{b_{i^*}, a_{j^*}\}=0$ в таблицу вносится 0. Следует различать внесение 0 и невнесение какого-либо числа вообще!

Полученная таблица содержит на одну строку или на один столбец меньше, чем предыдущая. В полученной таблице выбирают новую ячейку и повторяют предыдущие рассуждения до тех пор, пока в таблице не окажется ни одной свободной ячейки.

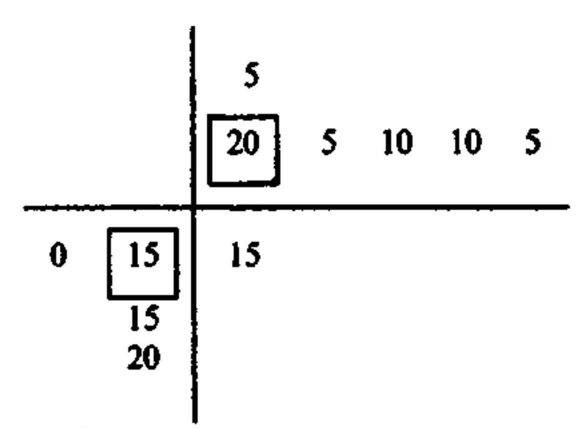
В результате каждой ячейке исходной таблицы можно сопоставить либо зачеркнутую ячейку, либо ячейку, в которую внесено число $\bar{x}_{ij}$. Тем самым найдено базисное решение: переменные, соответствующие зачеркнутым ячейкам, являются свободными переменными; остальные являются базисными, и им мы сопоставим значения $\bar{x}_{ij}$. В каждой строке и в каждом столбце будет стоять по меньшей мере одно базисное переменное (возможно, со значением 0, что соответствует вырожденному случаю).

Для того чтобы найти наиболее экономичное начальное базисное решение, обычно выбирают ячейку (i^*, j^*), которой соответствуют минимальные транспортные издержки: $\min_{i,j} p_{ij} = p_{i^*j^*}$.

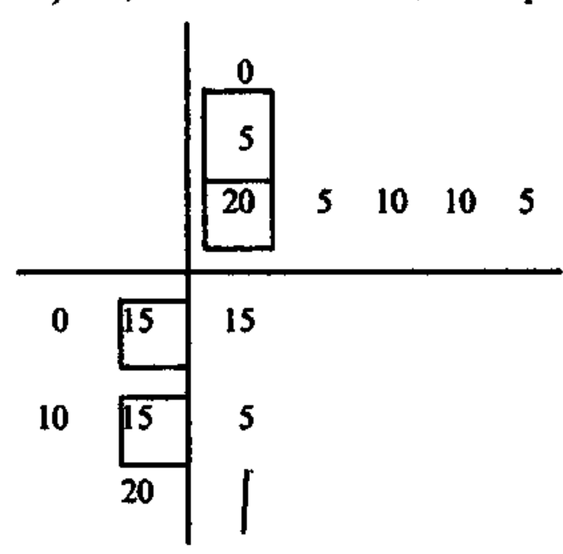
Если же выбирают верхнюю левую ячейку, то метод выбора называется *правилом северо-западного угла.*

Разберем отыскание начального решения на примере 7.

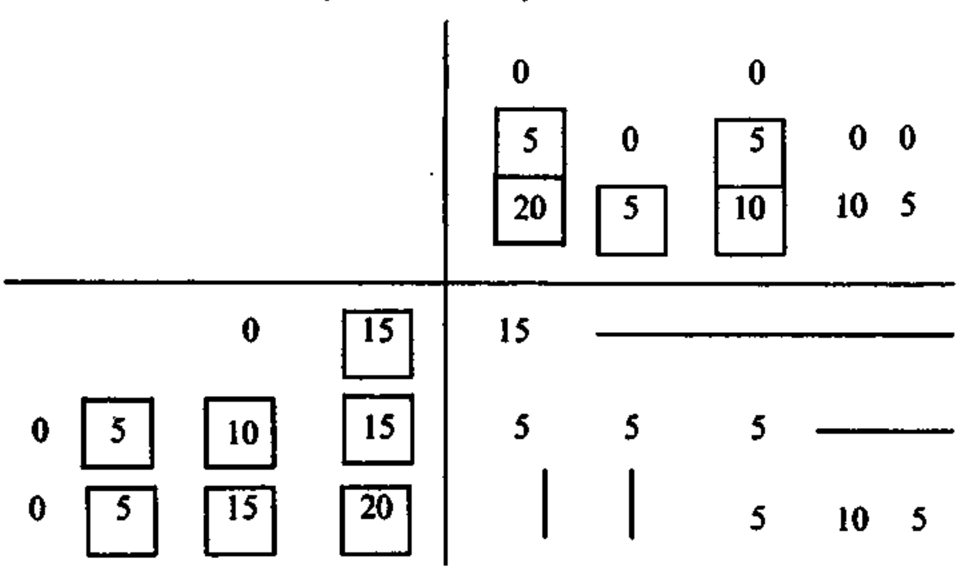
I. Применение правила северо-западного угла: в верхнюю левую ячейку записываем $\min\{15, 20\} = 15$, а остаток строки вычеркнем:



В левую верхнюю ячейку получившейся таблицы записываем $\min\{5, 15\} = 5$, а остаток столбца вычеркнем:

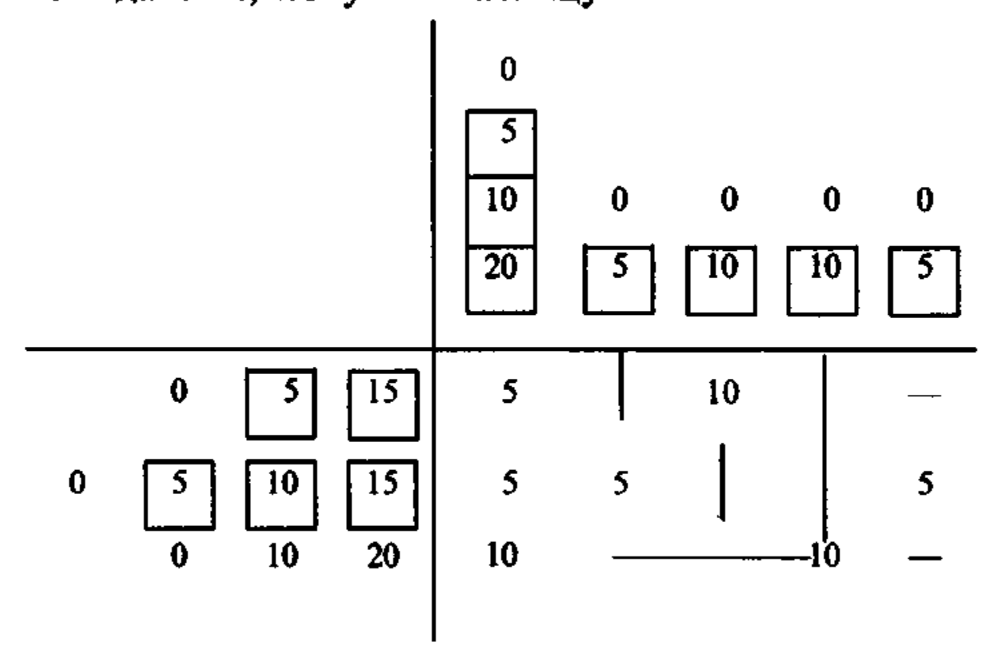


В конце концов получим таблицу



Ей соответствует базисное решение $x_{15} = 15$, $x_{21} = 5$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 5$, $x_{33} = 5$, $x_{34} = 10$, $x_{35} = 5$ (базисные переменные); остальные переменные являются свободными, и в базисном решении им соответствует значение 0.

II. Найдем $\min_{i,j} p_{ij} = 1 = p_{34}$. В ячейку (3, 4) запишем $\min\{20, 10\} = 10$ и остаток четвертого столбца вычеркнем. Найдем $\min_{j \neq 4} p_{ij} = 2 = p_{31}$. В ячейку (3, 1) запишем $\min\{10, 20\} = 10$ и остаток третьей строки вычеркнем. Найдем $\min_{\substack{i \neq 3 \\ j \neq 4}} p_{ij} = 3 = p_{13}$. В ячейку (1, 3) запишем $\min\{15, 10\} = 10$ и вычеркнем остаток третьего столбца. Продолжая таким образом дальше, получим таблицу



6.2.3. ТРАНСПОРТНЫЙ МЕТОД

Пусть имеется транспортная таблица, соответствующая начальному решению, $x_{ij} = \bar{x}_{ij}$ для базисных переменных, $x_{ij} = 0$ для свободных переменных (ячейки, соответствующие свободным переменным, остаются пустыми). Далее, нам требуется таблица расходов с заданными p_{ij}. (Ниже мы постоянно будем ссылаться на пример 7 из 6.2.1.)

Отыскание симплекс-множителей. Заполним таблицу расходов, оставив ячейки, соответствующие свободным переменным, пустыми. В крайний правый столбец внесем значения неизвестных $u_1, \dots, u_m$, в нижнюю строку — значения неизвестных $v_1, \dots, v_n$ (рис. 6.6). Эти $m + n$ неизвестных для всех (i, j), соответствующих базисным переменным, должны удовлетворять линейной системе уравнений $u_i + v_j = p_{ij}$.

Для всех базисных решений эта система имеет треугольный вид, ранг ее матрицы равен $n + m - 1$. Следовательно, систему всегда можно решить следующим способом.

Полагают $v_n = 0$. Если значения k неизвестных $(1 \leqslant k \leqslant n + m - 1)$ определены, то в системе всегда

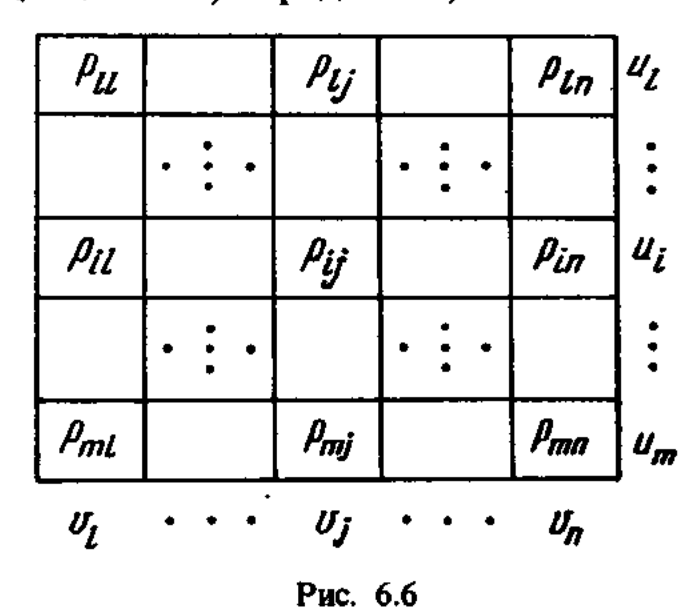
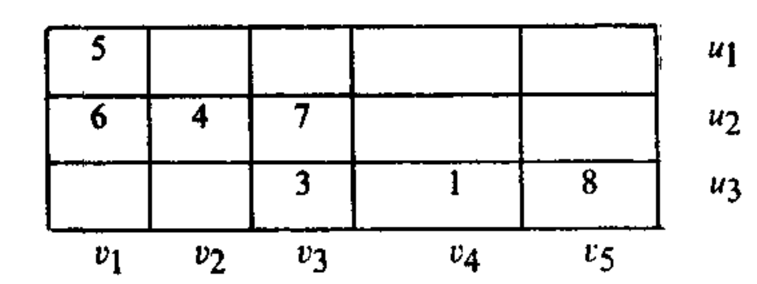


Рис. 6.6

имеется уравнение, одно из неизвестных в котором уже найдено, а другое еще нет.

Переменные u_i и v_j называются *симплекс-множителями*. Иногда они называются также *потенциалами*, а транспортный метод — *методом потенциалов*.

Пример 8.



$v_5 = 0 \to u_3 = 8$, так как $u_3 + u_5 = p_{35} = 8$, $\to v_4 = -7$, так как $u_3 + v_4 = p_{34} = 1$, $\to v_3 = -5$, так как $u_3 + v_3 = 3$, $\to u_2 = 12 \to v_2 = -8 \to v_1 = -6 \to u_1 = 11$.

Симплекс-множители нужны для того, чтобы найти свободную ячейку (i, j), которая при замене базиса переходит в базисную (это соответствует отысканию разрешающего столбца в симплекс-методе).

Для определения симплекс-множителей мы вносим на свободные места в таблице значения

$$p'_{ij} = p_{ij} - u_i - v_j$$

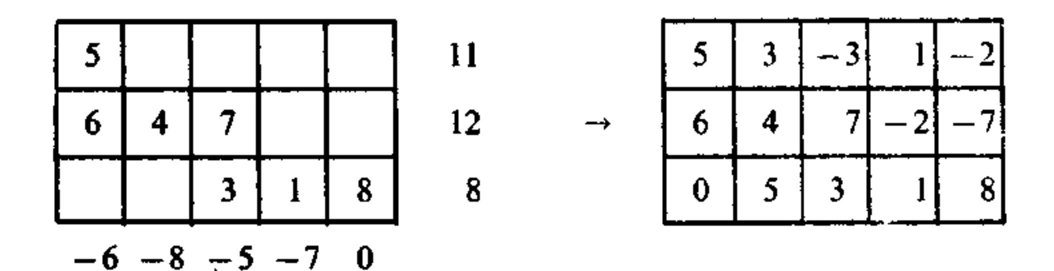
(коэффициенты целевой функции, пересчитанные для свободных переменных). Если все $p'_{ij} \geqslant 0$, то базисное решение оптимально (см. критерий минимальности). В противном случае вы выбираем произвольное $p'_{\alpha\beta} < 0$, чаще всего наименьшее. Индексом $\alpha\beta$ помечено свободное переменное $x_{\alpha\beta}$, которое должно войти в базис. Соответствующую ячейку транспортной таблицы мы отметим знаком $+$.

Пример 9.

p_{ij}:

5	6	3	5	9
6	4	7	3	5
2	5	3	1	8

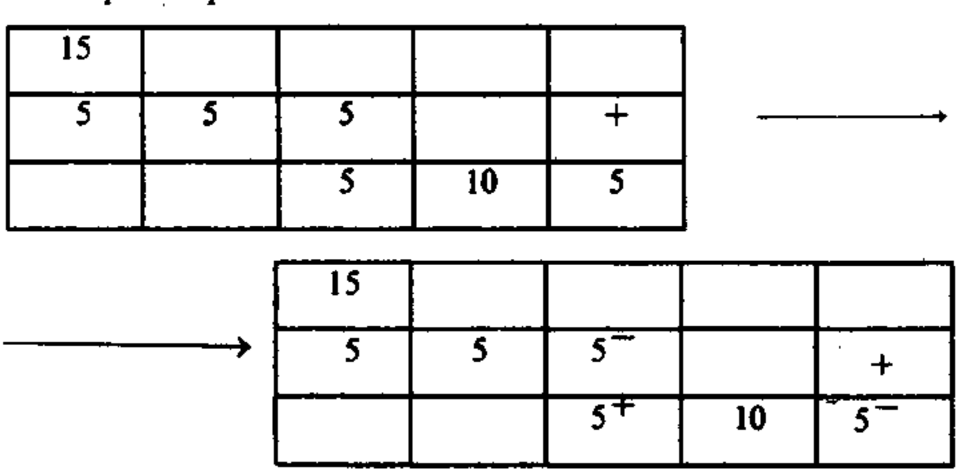
,



Минимальный элемент $-7 \to (\alpha, \beta) = (2, 5)$.

Кроме ячейки (α, β) транспортной таблицы, мы пометим знаками − и + другие занятые числами ячейки таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце транспортной таблицы число знаков + было равно числу знаков −. Это всегда можно сделать единственным образом, причем в каждой строке и каждом столбце будет содержаться максимум по одному знаку + и по одному знаку −.

Пример 10.



15				
5	5	5		+
		5	10	5

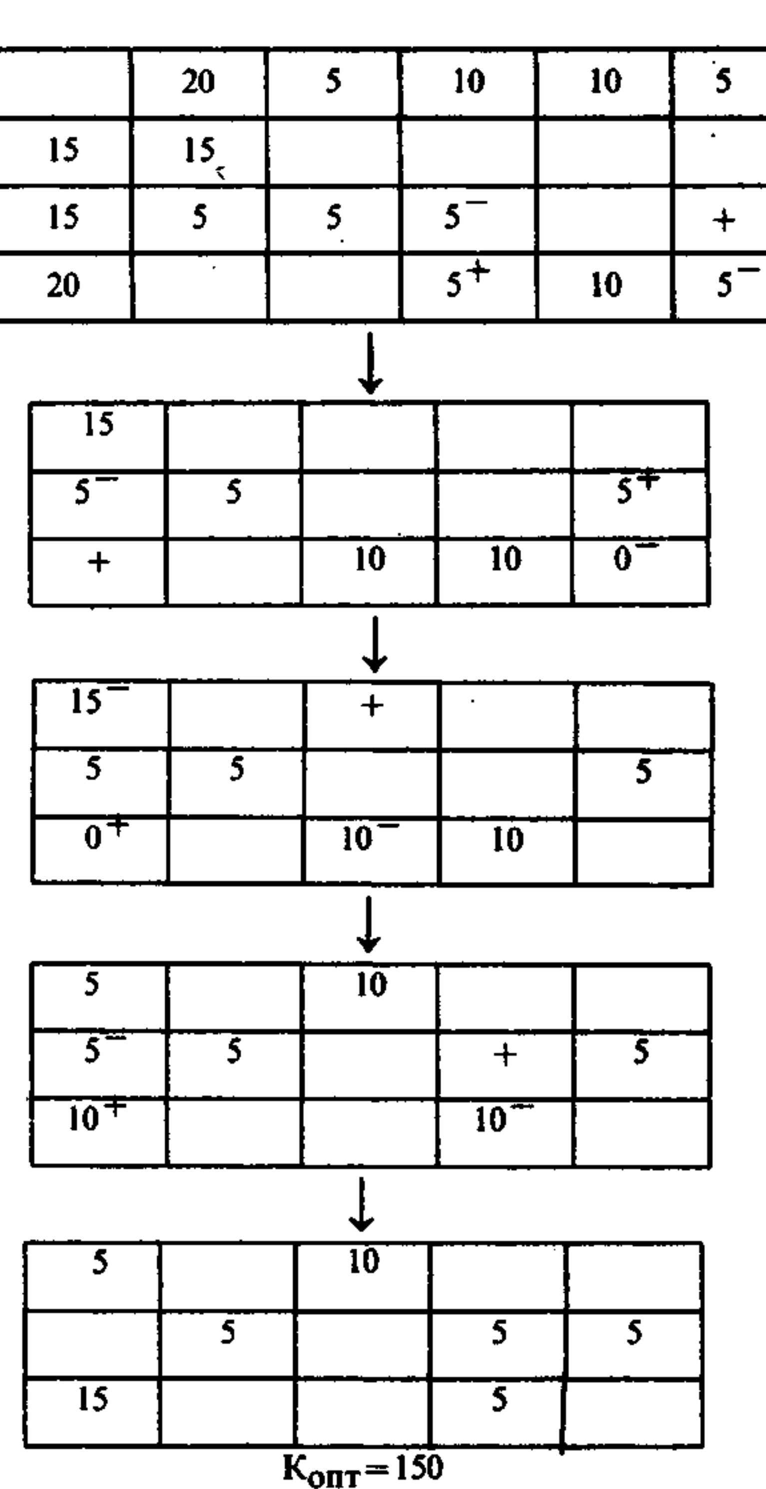
→

15				
5	5	5^-		+
		5^+	10	5^-

Знак + поставлен в ячейке (2, 5). Соответственно в последнем столбце должен быть поставлен знак −, это можно сделать только в ячейке (3, 5). Следовательно, знак + должен быть поставлен в последней строке. В ячейке с числом 10 этого сделать нельзя, так как тогда в соответствующем столбце не было бы знака −, и т. д.

Затем мы определяем минимум M из всех элементов, помеченных знаком −, и выбираем ячейку (γ, δ), где этот минимум достигается.

В нашем примере с $M = 5$ можно выбрать $(\gamma, \delta) = (2, 3)$; при этом (γ, δ) определяет базисное переменное, которое должно стать свободным, т. е. базисное переменное, соответствующее индексу разрешающей строки симплекс-метода.



	20	5	10	10	5
15	15				
15	5	5	5^-		+
20			5^+	10	5^-

↓

15				
5^-	5			5^+
+		10	10	0^-

↓

15^-		+		
5	5			5
0^+		10^-	10	

↓

5		10		
5^-	5		+	5
10^+			10^-	

↓

5		10		
	5		5	5
15			5	

$K_{опт} = 150$

Переход к новой транспортной таблице (замена базиса) происходит следующим образом:

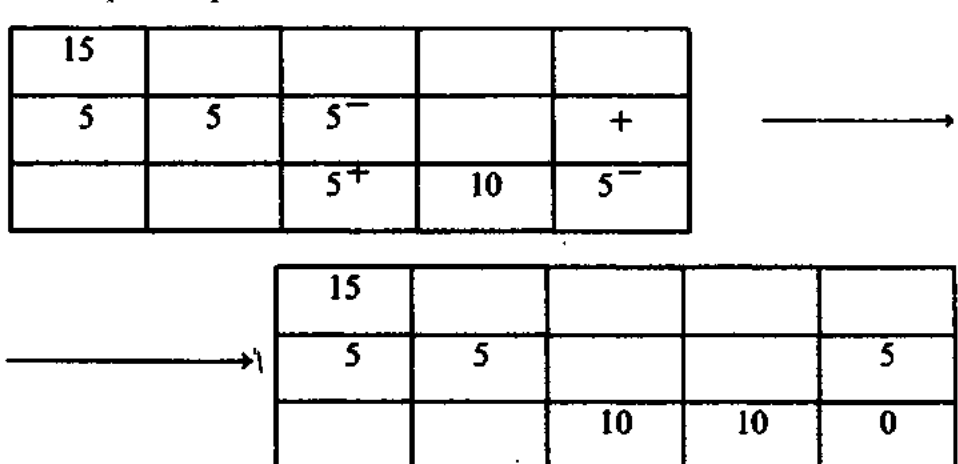
а) В ячейку (α, β) новой таблицы записывается число M.

б) Ячейка (γ, δ) остается пустой.

в) В других ячейках, помеченных знаками − или +, число M вычитается из стоящего в ячейке числа (−) или складывается с ним (+). Результат вносится в соответствующую ячейку новой таблицы.

г) Непомеченные числа переносятся в новую таблицу без изменений. Остальные ячейки новой таблицы остаются пустыми.

Пример 11.



15				
5	5	5^-		+
		5^+	10	5^-

→

15				
5	5			5
		10	10	0

Получается новая транспортная таблица, и повторяется ход предыдущих рассуждений. После конечного числа шагов критерий минимальности будет выполнен (если не учитывать теоретически возможного зацикливания в случае вырождения).

Пример 12. Ниже воспроизведен ход решения примера 7 из 6.2.1.

5	3	−3	1	−2	11
6	4	7	−2	−7	12
0	5	3	1	8	8
−6	−8	−5	−7	0	

5	3	4	8	5	4
6	4	7	5	5	5
−7	−2	3	1	8	8
−1	−1	2	0	0	

5	3	−3	1	5	4
6	4	0	−2	5	5
2	5	3	1	7	1
1	−1	2	0	0	

5	3	3	1	5	4
6	4	3	−2	5	5
2	5	3	1	7	1
1	−1	−1	0	0	

5	1	3	1	3	6
2	4	5	3	5	5
2	3	3	1	5	3
−1	−1	−3	−2	0	

Первая транспортная таблица была получена в 6.2.1 при помощи правила северо-западного угла (составление первой вспомогательной таблицы и второй транспортной таблицы было описано выше). Затем поочередно находятся новая вспомогательная и новая транспортная таблицы до тех пор, пока (после четырех замен базисов) не будет достигнут минимум.

Следует обратить внимание на предпоследнюю транспортную таблицу, так как она совпадает с найденной при помощи улучшенного метода отыскания начального решения в 6.2.2; если начать с нее, то потребуется лишь одна замена базиса.

В вырожденном случае, как и в симплекс-методе, особый метод для предотвращения зацикливания применяется только тогда, когда после нескольких последовательных шагов M становится равным 0.

Если дана вырожденная транспортная таблица (ее можно узнать по имеющемуся 0), то, заменив a_m на $a_m + n\varepsilon$ и все b_j на $b_j + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ подразумевается очень малым, исправим значения $\bar{x}_{ij}$ базисных переменных так, чтобы для новых a_i и b_j получилось базисное решение. Это всегда можно сделать единственным образом (как и при отыскании симплекс-множителей).

15				
5	5			5
		10	10	0

	20+ε	5+ε	10+ε	10+ε	5+ε
15					
15					
20+ε					

15+2ε				
5−ε	5+ε			5−2ε
		10+ε	10+ε	3ε

Если полученный таким образом элемент $\bar{x}_{kl}$ окажется отрицательным, то в этой же строке должен найтись положительный (еще до изменения) элемент $\bar{x}_{kr}$ и в этом же столбце — положительный элемент $\bar{x}_{sl}$. Тогда ячейка (s, r) свободна, отмечаем ее знаком + и проводим замену базиса. Так можно избавиться от всех отрицательных значений*).

Затем при помощи транспортного метода расчеты продолжают дальше (вырождение уже никогда больше не встретится). Устремляя $\varepsilon \to 0$, приходим к оптимальному решению исходной задачи.

6.3. ТИПИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.3.1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ

Пример 13. Требуется изготовить четыре вида изделий A_i в количествах от a_i до b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Себестоимость одного изделия составляет p_i. Каждое изделие A_i требует a_{ij} минут рабочего времени на каждом из станков M_j $(j = 1, 2, 3)$, общее время использования которых должно быть заключено в пределах от n_j до m_j минут. Надо найти план производства с минимальной себестоимостью. Переменное x_i — число изделий вида A_i, которое следует произвести.

Модель: $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 + a_{4j}x_4 \leqslant m_j$ для $j = 1, 2, 3$; $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 + a_{4j}x_4 \geqslant n_j$ для $j = 1, 2, 3$; $x_i \leqslant b_i$, $x_i \geqslant a_i$, $x_i \geqslant 0$ для $i = 1, 2, 3, 4$; $Q_{\min}(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$.

Вариант. Если p_i — прибыль на единицу продукции, то ищем $\max Q(x)$.

Замечание. При больших количествах изделий требованием целочисленности можно пренебречь; при вычислениях в единицах серий или объемов эта трудность чаще всего отпадает сама собой. Если действительно встретится описанный выше случай, то в громоздких задачах рекомендуется применять специальный симплекс-метод для «двусторонне ограниченных задач». Однако чаще всего для многих j имеем $n_j = 0$ или $m_j = \infty$ (соответствующее неравенство излишне), а для многих i имеем $a_i = 0$ или $b_i = \infty$ (соответствующее неравенство тождественно условию знака или излишне); тогда методы решения, изложенные в 6.1.1, имеют одинаковую эффективность.

Другие примеры.

A_i	M_i
Виды квалифицированных кадров	Учреждения, готовящие квалифицированные кадры
Сельскохозяйственные культуры	Рабочая силы, техника
Виды скота	Рабочая сила, скотные дворы, корма

6.3.2. ЗАДАЧА О СМЕСЯХ

Пример 14. Требуется изготовить сплав из трех металлов M_i, каждый с плотностью a_{i1}, содержанием углерода a_{i2} и содержанием фосфора a_{i3}, которые могут быть использованы в количествах от a_i' до b_i' и стоят p_i рублей за килограмм. Сплав должен иметь плотность в пределах от n_1 до m_1, содержание углерода от n_2 до m_2 и содержание фосфора от n_3 до m_3; сплав должен быть произведен в количестве c килограммов и быть при этом как можно более дешевым.

Переменное x_i = (количество затраченного металла M_i)/c.

Модель, как и в 6.3.1, где нужно положить $a_i = a_i'/c$, $b_i = b_i'/c$.

---

*) Часто бывает достаточно везде заменить ε на −ε.

Другие примеры.

M_i	a_{ij}
Кормовые средства	Содержание питательных веществ, содержание вредных веществ
Отопительный газ	Калорийность, содержание серы и пыли
Сорта свеклы	Урожайность листьев, урожайность клубней

6.3.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА, СОПОСТАВЛЕНИЕ

Пример 15. Требуется изготовить m видов продукции P_j в количествах a_j. Имеется n станков M_i с b_i минутами рабочего времени. Каждая единица продукции P_j может быть изготовлена по выбору на любом станке; это требует c_{ij} минут и стоит p_{ij} рублей. Надо найти наиболее экономичное распределение продукции по станкам.

Переменное x_{ij} — количество продукции P_j, произведенной на станке M_i.

Модель:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_j \quad \text{для } j = 1,\ldots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \leqslant b_i \text{ для } i = 1,\ldots,n;$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \text{ для всех } (i, j),$$

$$Q_{\min}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_{ij}.$$

Модель является обобщением транспортной модели. Задача может быть решена при помощи симплекс-метода.

Вариант. Требуется минимизировать общее рабочее время станков (и рабочее время обслуживающих их рабочих).

Модель аналогична приведенной выше, но с целевой функцией $Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$.

Другие примеры.

P_j	M_i	c_{ij}	p_{ij}	
Сельскохозяйственные культуры	посевные площади	1	доход от урожая	max
Предприятия	источники энергии	1	степень использования	max
Продукция	предприятия	затраты	прибыль	max
Поставки в квартале j	продукция в квартале i	1	(производственные затраты) + + (затраты на хранение)	min

Замечание. В случае $c_{ij} = 1$ можно применить транспортный метод после того, как путем введения фиктивного P_{m+1} мы получим $\sum a_j = \sum b_i$. В случае необходимости некоторые распределения могут быть исключены (например, при составлении плана надо учитывать, что продукцию, произведенную в третьем квартале, нельзя вывезти во втором), для этого достаточно положить в соответствующих ячейках $p_{ij} = \infty$.

При $n = m$, $a_j = 1$, $b_i = 1$, $c_{ij} = 1$, $x_{ij} \in \{0, 1\}$ при всех i и j как частный случай получается *задача о сопоставлении*.

Примеры.

P_j	M_i	p_{ij}	
n изделий	n предприятий	производственные затраты	min
n предприятий, которые нужно построить	n месторасположений	затраты на освоение	min
n поездов, которые следует составить	n путей	маневры	min
n штатных единиц	n работников	производительность	max
n видов деятельности	n работников	затраты времени	min

Решение можно найти при помощи транспортного метода (с модификацией, чтобы не допустить вырождения).

6.3.4. РАСКРОЙ, ПЛАНИРОВАНИЕ СМЕН, ПОКРЫТИЕ

Пример 16. Для заготовок в виде стержней длины l каждый имеются варианты раскроя Z_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Требуется получить a_j частей T_j длины l_j ($j = 1, 2, 3, 4$). При каждом варианте раскроя получается k_{ij} частей T_j. (При этом $k_{i1}l_1 + k_{i2}l_2 + k_{i3}l_3 + k_{i4}l_4 \leqslant l$. Это условие, наложенное на коэффициенты, содержится в определении «вариант раскроя» и не является условием оптимизации.) Требуемое количество частей должно быть получено из минимального количества стержней.

Переменное x_i — число стержней, разрезанных согласно варианту Z_i.

Модель: $k_{1j}x_1 + k_{2j}x_2 + k_{3j}x_3 + k_{4j}x_4 + k_{5j}x_5 + k_{6j}x_6 \geqslant a_j$ при $j = 1, 2, 3, 4$; $x_i \geqslant 0$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $Q_{\min}(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$.

Замечание. Вводя вспомогательные переменные и умножая уравнения на -1, сразу придем к двойственно-допустимому каноническому виду; таким образом, целесообразно применить двойственный или модифицированный двойственный симплекс-метод.

Другие примеры.

Сырье	T_j
Доски (из опилок и стружки)	Более мелкие доски
Ткань, свернутая в l-метровый рулон, или лист жести ширины l	l_j-метровые полотна ткани или полосы жести ширины l_j

Планирование смен в библиотеках и продажу билетов в кассах также можно моделировать подобным образом: Z_i — возможные в течение дня смены; T_j — определенное время дня; $k_{ij} = 1$, если Z_i предусматривает работу во время T_j, в противном случае $k_{ij} = 0$; a_j — число работников, требующихся в момент времени T_j; x_i — количество работников смены Z_i. В частном случае $a_j = 1$, $k_{ij} \in \{0, 1\}$ возникают *задачи о покрытии*, которые, разумеется, надо всегда решать методами целочисленного линейного программирования.

Пример 17. Для строительства гидроэлектростанций могут быть использованы шесть мест Z_i ($i = 1,\ldots,6$). Каждая ГЭС Z_i могла бы обслужить ($k_{ij} = 1$) или не обеспечить ($k_{ij} = 0$) некоторые из четырех регионов. После сооружения минимального количества электростанций каждый

из четырех регионов должен быть «покрыт» хотя бы один раз.

Переменное $x_i = 1$, если в Z_i построена ГЭС, и $x_i = 0$ в противном случае.

Модель такая же, как модель раскроя, но с условием $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ и с дополнительным условием «$x_i = 0$ или $x_i = 1$» при $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Варианты примера. Пусть расходы на строительство Z_i равны p_i. Ищется наиболее дешевое «покрытие» всех местностей. Целевая функция в этом случае: $Q_{min} = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 + p_6x_6$. Можно потребовать также n-кратное покрытие $\to a_i = n$.

Другие примеры.

Z_i	T_j
Фазы регулирования уличного движения Кандидаты в экспедицию	Потоки движения, которым надо дать дорогу Требующиеся знания (медицина, радио, иностранные языки)

6.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если все коэффициенты условий и целевой функции зависят от одного или нескольких параметров, то говорят о параметрическом программировании. Практически применимые методы существуют для случая, когда от параметра линейно зависят только коэффициенты целевой функции (см. 6.4.2). Случай, когда от параметра линейно зависят только правые части условий, может быть сведен к первому путем рассмотрения двойственной задачи (см. 6.1.1.6). Законченная теория, которая, однако, ведет к очень громоздким вычислениям, имеется также для случая, когда коэффициенты целевой функции линейно зависят от нескольких параметров (при помощи двойственной задачи также рассматривают зависящие от параметров постоянные члены условий). Аналогичное утверждение имеет место, если от параметров линейно зависят как коэффициенты целевой функции, так и постоянные члены условий.

Для случаев, когда от параметров зависят коэффициенты при переменных в условиях, общих методов еще не существует.

6.4.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Пусть ПЗЛП (параметрическая ЗЛП)

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$
$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$$
$$Q_{min} = (p_1 + q_1t)x_1 + \ldots + (p_n + q_nt)x_n$$

рассматривается при всех t, $-\infty < t < +\infty$.

(Другие типы задач линейного программирования с однопараметрической целевой функцией сводящиеся к этому типу, описаны в 6.4.1.)

Геометрическая интерпретация в случае двух переменных (ср. 6.1.1.1). При всех значениях t задачи

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$
$$Q_{min} = (p_1 + q_1t)x_1 + (p_2 + q_2t)x_2$$

имеют одинаковую допустимую область. С изменением t линии уровня постепенно «вращаются». На рис. 6.7 изображено пять положений линий

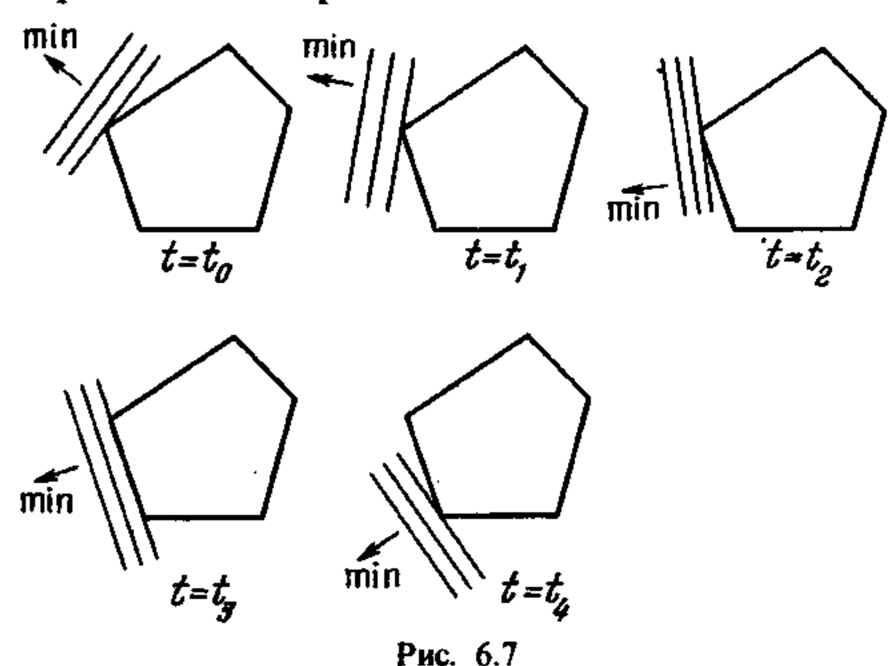


Рис. 6.7

уровня при этом «вращении». Из рисунка видно, что при $t = t_0$, $t = t_1$, $t = t_2$ оптимальной точкой является одна и та же вершина. При $t = t_3$ оптимальны две соседние вершины (и все ребро между ними). При большем $t = t_4$ оптимальна только одна новая вершина.

Если вершина ПЗЛП является оптимальной точкой при $t = t_0$, то существует определенный промежуток $\underline{t} \leqslant t_0 \leqslant \overline{t}$ такой, что для целевой функции, зависящей от t, в этом промежутке указанная вершина оптимальна, в то время как при t, лежащем вне его, она оптимальной не является. (При этом возможно $\underline{t} = -\infty$, $\overline{t} = +\infty$, $\underline{t} = \overline{t}$.)

Этот промежуток называется тогда *областью устойчивости* вершины. Если E_1 и E_2 – две вершины и t' лежит внутри обеих областей устойчивости, то области устойчивости тождественны. Нетождественные области устойчивости имеют максимум одну общую точку.

Пусть ПЗЛП имеет оптимальное решение по крайней мере для одного значения параметра. Тогда в интервале $-\infty < t < +\infty$ имеется конечное число *характеристических значений* $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r$ таких, что

а) при $t < t_0$ не существует решения ПЗЛП (этот интервал может быть пуст, $t_0 = -\infty$);

б) сегмент $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ при каждом $i = 0, 1, \ldots, r-1$ является областью устойчивости по меньшей мере одной вершины ПЗЛП, $t_i \leqslant t \leqslant t_i$ может быть областью устойчивости вершины при определенных $i = 0, 1, \ldots, r$;

в) при $t > t_r$ не существует решения ПЗЛП (этот интервал может быть пуст, $t_r = +\infty$).

Если рассматривать оптимальное значение целевой функции для каждой ПЗЛП с фиксированным t как функцию t, то получим *функцию оптимальных значений* $Q_0(t)$.

Функция оптимальных значений непрерывна, вогнута и кусочно линейна на интервале значений t, для которых ЗЛП разрешима. Точками излома являются характеристические значения $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$.

Метод решения. Основная идея метода состоит в решении ПЗЛП для фиксированных значений t и последовательном изменении t от одного характеристического значения t_i к другому.

Рассмотрим ПЗЛП канонического вида, которую можно получить, как описано в 6.1.4. Строка симплекс-таблицы, отведенная под целевую функцию (ср. 6.1.2), заменяется на две строки: одну для p_j, другую для q_j. Соответственно $-Q_0 = -Q_{0p} - Q_{0q}t$. При замене базиса обе строки преобразуются в отдельности, как обычная строка целевой функции:

$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
λ_m	$a_{\lambda_m \lambda_{m+1}}$	$\cdots$	$a_{\lambda_m \lambda_n}$	b_{λ_m}
	$p_{\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	p_{λ_n}	$-Q_{0p}$
	$q_{\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	q_{λ_n}	$-Q_{0q}$

(здесь буквами обозначены числа в соответствующей таблице; вообще они не являются числами из первоначально заданной ПЗЛП).

Если не известно ни одного значения t, для которого ПЗЛП разрешима, можно поступить следующим образом. Сначала найдем оптимальное решение для произвольно большого t. Это означает, что в качестве элементов «управляющей строки» для выбора разрешающего столбца нам требуются только q_j, если они отличны от нуля, а p_j нужны только в том случае, если $q_j = 0$. Таким образом, мы будем выполнять шаги симплекс-метода до тех пор, пока это возможно. В результате придем к одному из двух случаев.

Случай I. Все q_i в полученной таблице не меньше 0, и там, где $q_j = 0$, везде $p_j \geqslant 0$. Это значит, что мы получили оптимальную таблицу, соответствующую вершине с областью устойчивости, простирающейся до $t_r = +\infty$.

Тогда дальше мы поступаем, как описано ниже в разделе «Определение левой границы области устойчивости».

Случай II. Случай I не имеет места, т. е. при отрицательном элементе управляющей строки все a_{ij} соответствующего столбца в таблице не превышают 0.

Рассмотрим тогда (независимо от p_j и q_j) все столбцы, содержащие только неположительные элементы a_{ij}.

Пусть соответствующее множество индексов есть J. Определим t' как наибольшее t, для которого $p_j + q_j t \geqslant 0$ при всех $j \in J$. Если такого t' не существует, то ПЗЛП не имеет оптимального решения ни при каких t.

Используем $p_j + q_j t'$ в качестве новой управляющей строки и применим симплекс-метод. Если он ведет к оптимальной вершине, то $t' = t_r$ является правой границей ее области устойчивости, и далее мы поступаем, как описано в разделе «Определение левой границы области устойчивости». Если симплекс-метод не приводит к оптимальной вершине, то это происходит потому, что по отношению к новой управляющей строке вновь имеет место случай II. Опять повторяя все рассуждения, получаем t'' и т. д. После конечного числа шагов мы получим t_r или установим неразрешимость задачи.

Определение левой границы области устойчивости. Пусть мы знаем правую границу $t_{\nu+1}$ области устойчивости и оптимальную таблицу соответствующей вершины E. Выберем t^* чуть меньше, чем $t_{\nu+1}$ (при $t_{\nu+1} = \infty$ возьмем достаточно большое положительное число). Имеются две возможности: 1) таблица еще оптимальна при t^*, и t^* является внутренней точкой области устойчивости вершины E; положим в этом случае $E = E^*$; 2) таблица больше не является оптимальной для t^*, тогда $t_{\nu+1}$ есть левая граница области устойчивости вершины E. Вычислим оптимальную таблицу, соответствующую t^*, при помощи симплекс-метода. Если оптимальной вершины не существует, то $t_{\nu+1} = t_0$ и ПЗЛП неразрешима при значениях параметра, меньших $t_{\nu+1}$. Если оптимальная вершина существует, то мы обозначим ее через E^*; точка t^* – внутренняя точка ее области устойчивости.

В оптимальной таблице, соответствующей вершине E, определим минимальное t, для которого все $p_j + q_j t$ не меньше 0 (это может быть и $-\infty$). Полученное значение есть t_ν.

Продолжая применять этот метод, мы получим решение ПЗЛП для всех t, при которых оно существует.

Примечание 1. Метод упрощается, если известно значение параметра, для которого ПЗЛП разрешима. Сначала при помощи симплекс-метода определим соответствующую оптимальную таблицу. После этого применим метод «определения левой границы области устойчивости» ко всем характеристическим значениям, лежащим слева от этого значения, и аналогичный метод «определения правой границы области устойчивости» ко всем характеристическим значениям, лежащим справа. В оптимальной таблице, соответствующей E^*, в этом случае надо найти максимальное значение t, для которого все $p_j + q_j t \geqslant 0$.

Примечание 2. Если задана верхняя граница t_{max}, выше которой значения t нас не интересуют, то применим симплекс-метод с целевой функцией, соответствующей t_{max}. Если получим оптимальное значение, то используем t_{max} в качестве $t_{\nu+1}$ при «определении левой границы области устойчивости». Если же нет, то продолжаем вычисления, как в случае II.

Примечание 3. Если задана нижняя граница, ниже которой значения t нас не интересуют, вычисления прекращают сразу как только характеристические значения t или значения $t', t'', \ldots$ в случае II будут меньше значения t_{min}.

Примечание 4. Вырождение вершин играет такую же роль, как и при решении непараметрической задачи линейного программирования; здесь мы не будем специально на этом останавливаться.

Пример 18.

$$\underline{x_4} - x_5 + x_6 = 1,$$
$$\underline{x_1} - x_5 + 2x_6 = 3,$$
$$\underline{x_2} + x_3 + x_6 = 2,$$
$$x_1 \geqslant 0, \ldots, \quad x_6 \geqslant 0,$$
$$Q_{\min} = (-3 - 3t)x_3 + (1 - t)x_5 + (1 + 3t)x_6.$$

Мы сразу находим начальную вершину и составляем соответствующую таблицу (см. ниже) и управляющую строку для больших t. Таблица не является оптимальной при произвольно больших t, так как в столбце $j = 3$ (и, кроме того, в столбце $j = 5$) стоит отрицательный управляющий элемент. Мы выбираем столбец $j = 3$ в качестве разрешающего столбца и вычисляем следующую таблицу (см. ниже). Управляющий коэффициент, соответствующий $j = 5$, все еще отрицателен. Но мы не можем выбрать столбец $j = 5$ в качестве разрешающего столбца: имеет место случай II. Множество J есть $\{5\}$; определим наибольшее t такое, что $p_5 + q_5 t = 1 - t \geqslant 0 \to t' = 1$. Мы составляем управляющую строку с $t' = 1$ и устанавливаем оптимальность таблицы. Таким образом, $t_r = 1$. Для значений t^*, чуть меньших чем 1, таблица остается оптимальной. Определим наименьшее t, для которого все $p_j + q_j t$ не меньше 0.

$$3 + 3t \geqslant 0 \to t \geqslant -1,$$
$$1 - t \geqslant 0 \to t \leqslant 1,$$
$$4 + 6t \geqslant 0 \to t \geqslant -2/3,$$

откуда

$$t_{r-1} = -2/3.$$

Запишем новую управляющую строку при $t = -2/3$. При t^*, чуть меньшем чем $-2/3$, таблица больше не является оптимальной, так как управляющий коэффициент при $j = 6$ становится отрицательным.

Выбираем столбец $j = 6$ в качестве разрешающего столбца и т. д. Четвертая таблица при t^*, несколько меньшем чем -1, не является оптимальной; она соответствует вершине, область устойчивости которой состоит только из $t = -1$.

Результат. При $1 < t < \infty$ оптимальной таблицы не существует. При $-2/3 \leqslant t \leqslant 1$ оптимальна вторая таблица, $Q_0(t) = -6 - 6t$. При $-1 \leqslant t \leqslant -2/3$ оптимальна третья таблица, $Q_0(t) = -2$. При $-\infty \leqslant t \leqslant -1$ оптимальна пятая таблица, $Q_0(t) = 3 + 5t$.

	3	5	6	
4	0	−1	1	1
1	0	−1	2	3
2	**1**	0	1	2
	−3	1	1	0
	−3	−1	3	0
$t \to \infty$	<0	<0	>0	

→

	2	5	6	
4	0	−1	**1**	1
1	0	−1	2	3 →
3	1	0	1	2
	3	1	4	6
	3	−1	6	6
$t \to \infty$	>0	<0	>0	
$t = 1$	6	0	10	12
$t = -2/3$	1	5/3	0	2

	2	5	4	
6	0	−1	1	1
→ 1	0	1	−2	1
3	**1**	1	−1	1
	3	5	−4	2
	3	5	−6	0
$t = -2/3$	1	5/3	0	2
$t = -1$	0	0	2	2

→

	3	5	4	
6	0	−1	1	1
1	0	1	−2	1
2	1	**1**	−1	1
	−3	2	−1	−1
	−3	2	−3	−3
$t = -1$	0	0	2	2

→

	3	2	4	
6	1	1	0	2
1	−1	−1	−1	0
5	1	1	−1	1
	−5	−2	1	−3
	−5	−2	−1	−5
$t = -1$	0	0	2	2
$t \to -\infty$	>0	>0	>0	

Пример 19. Постановка задачи видна из левой таблицы: $t' = 1/4$, а $t_r = t'' = 0$. Правая таблица оптимальна при всех $t < 0$.

	3	4	
1	1	−20	2
2	1/10	−1	1/10
	−2	20	0
	1	−80	0
$t \to \infty$	>0	<0	
$t = 1/4$	−7/4	0	0

	2	4	
1	−10	−10	1
3	10	−10	1
	20	0	2
	−10	−70	−1
$t = 1/4$	70/4	−70/4	7/4
$t = 0$	20	0	2
$t \to -\infty$	>0	>0	

Пример 20. Постановка задачи видна из левой таблицы. Имеем случай $t_r = \infty$.

	3	4	
1	0	1	1
2	1	1	1
	1	2	0
	1	1/2	0
$t \to \infty$	>0	>0	
$t = -1$	0	3/2	0

	2	4	
1	0	1	1
3	1	1	1
	−1	1	−1
	−1	−1/2	−1
$t = -1$	0	3/2	0
$t \to -\infty$	>0	>0	

6.5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Если к задаче линейного программирования (см. 6.1.1) добавить еще условие, что все или некоторые переменные могут принимать только целочисленные значения, то получим задачу *целочисленного линейного программирования.*

Чисто целочисленное программирование — линейное программирование с требованием целочисленности для всех переменных.

Смешанно-целочисленное программирование — линейное программирование с требованием целочисленности только для некоторых, а не для всех переменных.

Если все переменные могут принимать только значения 0 или 1, то говорят о *булевом программировании (чисто булевом).* Если это справедливо лишь для некоторых переменных, то говорят о *смешанно-булевом программировании.*

Примеры применения целочисленного линейного программирования содержатся в задачах об использовании производственных мощностей (см. 6.3.1), если имеющиеся мощности не могут быть использованы по частям, в задачах о смесях (см. 6.3.2), если компоненты смесей могут добавляться только определенными порциями; в транспортных задачах (см. 6.2), в задачах о распределении (см. 6.3.3), в задачах о раскрое и покрытии (см. 6.3.4) и во многих других случаях.

Геометрическая интерпретация и разрешимость задач с двумя переменными вытекает из изложенного в 6.1.1, если принять во внимание, что в случае чисто целочисленной задачи допустимыми точками являются только точки координатной сетки (точки с целочисленными координатами) в допустимой области ЗЛП. В случае смешанно-целочисленной задачи получаются отрезки прямых в допустимой области ЗЛП.

Пример 21.

$$2x_1 + x_2 \leqslant 4, \qquad 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \qquad x_1, x_2 \text{ — целочисленные},$$

$$Q_{\min} = -x_1 - x_2.$$

Для решения целочисленных задач линейного программирования разработаны разнообразные методы:

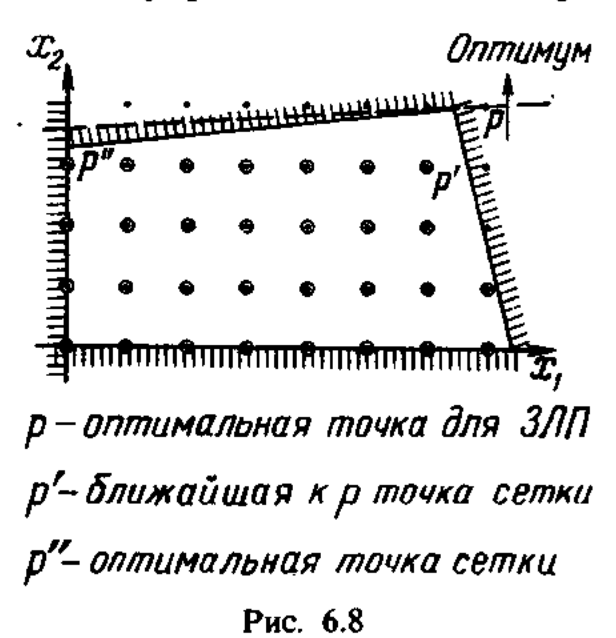
а) метод сечения (см. 6.5.2);

б) метод разветвления (см. 6.5.3);

в) доказательство целочисленности всех базисных решений соответствующей ЗЛП для частных классов задач (например, транспортная задача в 6.2.1); в этом случае решение ЗЛП, независимо от требования целочисленности, дает решение целочисленной задачи линейного программирования;

г) приближенные методы, которые дают хорошие допустимые решения (но в общем случае неоптимальные).

Замечание к г). Поиск (возможно, длительный) допустимой точки координатной сетки, ближайшей к решению ЗЛП, часто ведет к практически пригодному решению. В некоторых примерах, однако, он может дать точки, лежащие как угодно далеко от оптимальной (рис. 6.8).



p – оптимальная точка для ЗЛП

p' – ближайшая к p точка сетки

p'' – оптимальная точка сетки

Рис. 6.8

6.5.2. МЕТОД СЕЧЕНИЯ ГОМОРИ

6.5.2.1. Чисто целочисленные задачи линейного программирования. Сначала решается ЗЛП, соответствующая целочисленной задаче линейного программирования. Если ее оптимум P является точкой координатной сетки, то P – решение целочисленной задачи. В противном случае к ЗЛП добавляется еще одно условие («сечение»), такое, что все допустимые точки координатной сетки удовлетворяют ему, а точка P – нет.

Геометрически это значит, что P и окрестность P отсекаются от допустимой области ЗЛП. Решается новая ЗЛП и т. д. Надлежащим методом построения сечений можно достичь того, что после конечного числа шагов возникнет ЗЛП, оптимальная точка которой целочисленна и тем самым является решением первоначальной целочисленной задачи линейного программирования. Первый метод такого рода был разработан Гомори в 1958 г., и на его основе с тех пор было развито несколько методов. Постоянное добавление условий ведет к тому, что задача решается при помощи двойственного или модифицированного двойственного симплекс-метода.

Указание к построению модели. Если первоначально задача содержит дополнительные условия в форме неравенств, то посредством введения вспомогательного переменного перейдем к ЗЛП с условиями-равенствами. Если постоянный член и все коэффициенты неравенства целочисленны, то на вспомогательное переменное также можно наложить требование целочисленности. Неравенства с рациональными коэффициентами перед введением вспомогательного переменного следует умножить на общий знаменатель рациональных коэффициентов. Неравенства с иррациональными коэффициентами приводят (если иррациональные числа не приближены рациональными и не преобразованы так, как указано выше) к смешанно-целочисленным задачам программирования, так как в этом случае для вспомогательных переменных нельзя потребовать целочисленности.

Построение сечений. Пусть $\{w\}$ – дробная часть числа w, $0 \leqslant \{w\} < 1$. Например, $\{4{,}1\} = 0{,}1$ вследствие того, что $4{,}1 = 4 + 0{,}1$, но $\{-4{,}1\} = 0{,}9$, так как $-4{,}1 = -5 + 0{,}9$.

Пусть задана оптимальная таблица из m строк, соответствующая ЗЛП, на все n переменных которой наложено еще дополнительное требование целочисленности. Пусть строка, соответствующая в симплекс-таблице базисному переменному x_i, есть $i \mid a_{i\lambda_1} \ldots a_{i\lambda_{n-m}} \mid b_i$, причем b_i нецелочисленное. Тогда к таблице приписывается еще одна строка, соответствующая условию $n+1 \mid -\{a_{i\lambda_1}\} \ldots -\{a_{i\lambda_{n-m}}\} \mid -\{b_i\}$, и x_{n+1} рассматривается как целочисленное вспомогательное переменное такое, что $x_{n+1} \geqslant 0$. После этого применяется двойственный симплекс-метод.

Указания к использованию метода. Если в процессе вычислений получится оптимальная таблица, в которой вспомогательное переменное имеет положительное значение, то соответствующая строка может быть вычеркнута. Таким образом, мы воспрепятствуем чрезмерному увеличению числа строк.

Выбор среди нескольких нецелочисленных b_i в таблице может быть произвольным; рекомендуется выбирать b_i с максимальной дробной частью $\{b_i\}$.

Если ясно, что оптимальное значение целевой функции должно быть целым, то строка целевой функции тоже может быть использована для построения сечения.

Может случиться, что, хотя допустимая область ЗЛП не пуста, она не содержит ни одной точки координатной сетки. Этот случай распознают так же, как и при использовании двойственного симплекс-метода (не находится разрешающих столбцов).

Пример 22.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6,$$

x_1, x_2, x_3, x_4 – все больше 0 и целочисленны,

$$Q_{min} = -x_1 - x_2.$$

Сначала мы решим ЗЛП (не обращая внимания на целочисленность) при помощи симплекс-метода:

	1	2	
3	[2]	1	4
4	2	3	6
	−1	−1	0

→

	3	2	
1	1/2	1/2	2
4	−1	[2]	2
	+1/2	−1/2	2

→

	3	4	
1	3/4	−1/4	3/2
2	−1/2	1/2	1
	1/4	1/4	5/2

В оптимальном решении ЗЛП x_1 нецелочисленно. Поэтому из соответствующей строки мы должны построить сечение и решить новую ЗЛП при помощи двойственного симплекс-метода:

	3	4	
1	3/4	−1/4	3/2
2	−1/2	1/2	1
5	−3/4	**[−3/4]**	−1/2
	1/4	1/4	5/2

→

	3	5	
1	1	−1/3	5/3
2	−1	2/3	2/3
4	1	−4/3	2/3
	0	1/3	7/3

Мы используем $i = 4$ для построения сечения (для этого целесообразно сразу оставлять пустую строку в новой таблице) и снова применим двойственный симплекс-метод:

	3	5	
1	1	−1/3	5/3
2	−1	2/3	2/3
4	1	−4/3	2/3
6	0	**[−2/3]**	−2/3
	0	1/3	7/3

→

	3	6	
1	1	−1/2	2
2	−1	1	0
4	1	−2	2
5	0	−3/2	1
	0	1/2	2

Оптимальная точка целочисленна; следовательно, набор $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$ является **оптимальным решением** целочисленной задачи линейного программирования (если бы вычисления были продолжены, то строка, соответствующая x_5, могла бы быть вычеркнута).

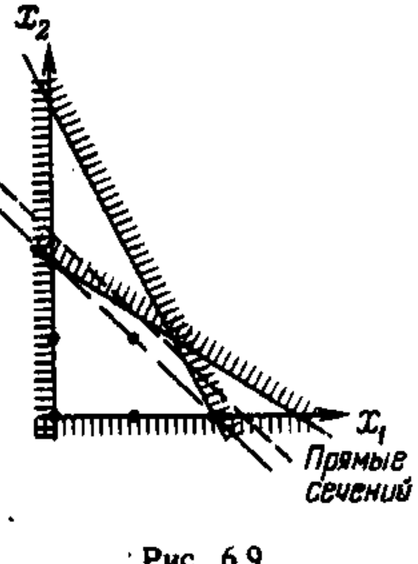


Рис. 6.9

Если рассматривать x_3, x_4 как вспомогательные переменные, то задачу графически можно изобразить в плоскости x_1, x_2; сечения имеют вид $2x_1 + x_2 \leqslant 4$ и $2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$ (рис. 6.9).

6.5.2.2. Смешанно-целочисленные задачи линейного программирования. Основная идея – та же самая, что и в чисто целочисленном случае; нецелочисленные b_i в таблице, конечно, только тогда дают повод для построения сечения, когда на соответствующее базисное переменное наложено требование целочисленности. Однако строятся сечения по-другому:

$$\begin{array}{l} i \mid a_{i\lambda_1} \ldots \quad a_{i\lambda_{n-m}} \mid b_i, \\ n+1 \mid a_{i\lambda_1}\delta_{\lambda_1} \ldots a_{i\lambda_{n-m}}\delta_{\lambda_{n-m}} \mid -\{b_i\}, \end{array}$$

$$\text{где } \delta_{\lambda_j} = \begin{cases} -1 & \text{для } a_{i\lambda_j} \geqslant 0, \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}} & \text{для } a_{i\lambda_j} < 0. \end{cases}$$

Пример 23. Рассмотрим ЗЛП из 6.5.2.1 (пример 22), но потребуем целочисленность только для x_1. Вычисления до получения оптимальной точки аналогичны примеру 22. Затем вводится сечение и применяется двойственный симплекс-метод:

	3	4	
1	3/4	−1/4	3/2
2	−1/2	1/2	1
5	**[−3/4]**	−1/4	−1/2
	1/4	1/4	5/2

→

	5	4	
1	1	−1/2	1
2	−2/3	2/3	4/3
3	−4/3	1/3	2/3
	1/3	1/6	7/3

Оптимальная точка имеет координаты $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 0$.

В геометрической интерпретации примера 22 сечение равнозначно дополнительному условию $4x_1 + 3x_2 \leqslant 8$.

6.5.3. МЕТОД РАЗВЕТВЛЕНИЯ

Предположение, что переменные могут принимать только целочисленные значения (т. е. в практических применениях чаще всего конечное число значений), дает возможность решить задачу проверочной подстановкой всех допустимых значений в целевую функцию и сравнением полученных значений. Удобной для использования эта идея, однако, становится лишь тогда, когда полный перебор может быть сокращен дополнительными рассуждениями. Эти рассуждения основаны на принципе разветвления комбинаторного программирования. Для решения общей чисто- и смешанно-целочисленной задач линейного программирования возникает, таким образом, следующий метод.

Для оценки целевой функции на некотором множестве допустимых решений целочисленной задачи служит оптимальное решение соответствующей ЗЛП (так как, если к ЗЛП добавить требования целочисленности, оптимальное значение не может улучшиться). Множество допустимых решений постепенно расщепляется по мере того, как для оптимальной таблицы с нецелочисленными $b_i = [b_i] + \{b_i\}$ ($[a]$ – целая, а $\{a\}$ – дробная часть числа a, $0 \leqslant \{a\} < 1$) ставятся две задачи: I и II (см. пример 24) с условиями $x_i \leqslant [b_i]$ или $x_i \geqslant [b_i] + 1$. Допустимые области обеих задач, взятые вместе, содержат все допустимые решения целочисленной задачи.

Рекомендуется сначала проводить разветвление для тех i, при которых $\{b_i\}$ максимально близко к 0,5.

Разветвление, конечно, следует проводить только для таких i, для которых x_i должно быть целочисленным. Для того чтобы иметь возможность по мере надобности просто добавлять новые условия, используют двойственный симплекс-метод.

Пример 24. Задача $A_{\text{целочисл}}$:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 3, \\ 2x_1 - 2x_2 \quad + x_4 &= 13, \end{aligned} \qquad (6.13)$$

все $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$, x_1, x_2 — целые,

$$Q_{min} = 2x_1 - 3x_2.$$

Двукратное применение симплекс-метода к A (пусть это будет $A_{целочисл}$ без требования целочисленности) приводит к оптимальной таблице

	4	3	
2	1/4	1/4	4
1	1/4	−1/4	5/2
	1/4	5/4	7

x_1 имеет в этой таблице нецелочисленное значение. Расщепление

$$A \begin{cases} AI & x_1 \leqslant 2 \to x_1 + x_5 = 2, \\ AII & x_1 \geqslant 3 \to x_1 - x_5 = 3 \end{cases}$$

при помощи уравнения, полученного из последней строки таблицы:

$$x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_3 = \frac{5}{2},$$

должно быть пересчитано к небазисным в данный момент переменным x_4, x_3.

В общем случае в качестве формального метода расщепления строки i задачи с n переменными и m строками получим:

I. $$\begin{array}{l} i \mid a_{i\lambda_1} \ldots a_{i\lambda_{n-m}} \mid b_i, \\ n+1 \mid -a_{i\lambda_1} \ldots -a_{i\lambda_{n-m}} \mid -\{b_i\}. \end{array}$$

II. $$\begin{array}{l} i \mid a_{i\lambda_1} \ldots a_{i\lambda_{n-m}} \mid b_i, \\ n+1 \mid a_{i\lambda_1} \ldots a_{i\lambda_{n-m}} \mid (\{b_i\} - 1). \end{array}$$

В нашем примере получаются таблицы A I и A II.

A I

		4	3	
I	2	1/4	1/4	4
	1	1/4	−1/4	5/2
	5	−1/4	1/4	−1/2
		1/4	5/4	7

A II

		4	3	
II	2	1/4	1/4	4
	1	1/4	−1/4	5/2
	5	1/4	−1/4	1/2
		1/4	5/4	7

Теперь обе задачи решаются при помощи двойственного симплекс-метода. Если в оптимальной точке для x_1 и x_2 не получаются целочисленные значения, то задача разветвляется дальше (при помощи наиболее удобного оптимального значения) и т. д.

На рис. 6.10 показан ход решения примера 24; там указаны оптимальные значения x_1, x_2 и целевой функции.

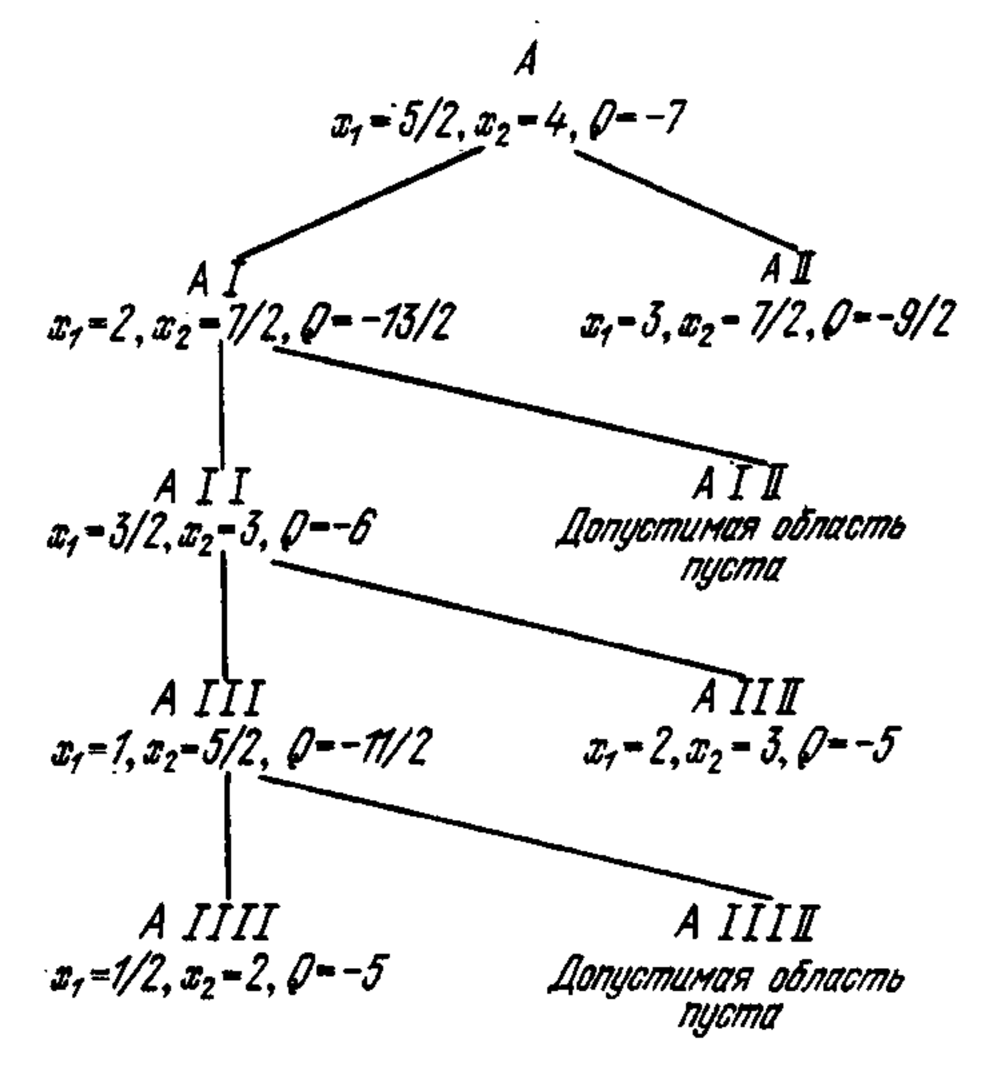


Рис. 6.10

Решение A I I II дает оптимальное решение целочисленной задачи линейного программирования $A_{целочисл}$, $Q_0 = -5$. Допустимые точки задачи $A_{целочисл}$, содержащиеся в A II, имеют значения целевой функции не менее −9/2, т. е. больше, чем Q_0.

Допустимые точки задачи $A_{целочисл}$, содержащиеся в A I I I I, имеют значения целевой функции не менее −5, т. е. среди них могли бы быть точки с оптимальным значением Q_0 (это можно было бы исследовать путем дальнейшего разветвления), но во всяком случае — не допустимые точки задачи $A_{целочисл}$ с меньшим, чем Q_0, значением целевой функции.

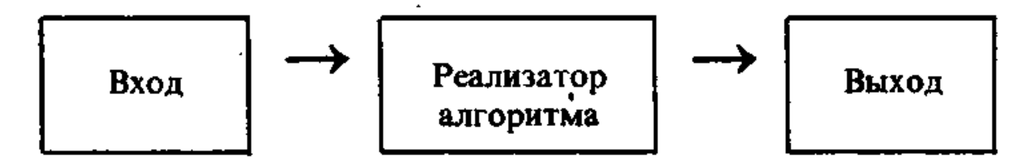
6.5.4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

В некоторых примерах бóльших вычислительных затрат требуют методы сечения, в других — методы разветвления. Оба пути решения интенсивно разрабатываются, так что постоянно появляются новые варианты, эффективность которых, в общем, едва ли может быть оценена. При использовании вычислительных устройств методы разветвления, как правило, требуют большего объема памяти, но численно они устойчивее. В обоих методах трудность состоит в том, что надо решить, рассматривать ли число b_i, несущее в себе погрешности округления, как целое или нет.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Одна из важнейших задач вычислительной математики – установление правил вычисления (алгоритмов), при помощи которых исходные данные (вход) при использовании ранее созданных вспомогательных схем и устройств (таблиц, настольных вычислительных машин, аналоговых вычислительных машин, цифровых вычислительных машин и т. д.) преобразуются в выходные данные (выход):



Для создания таких правил на основе теоретических положений должны быть проведены особые, ориентированные на возможности практической реализации рассуждения.

Пример 1. Нужно вычислить наименьший корень уравнения $x^2 - 20x + 1 = 0$. Но теоретический результат $x = 10 - \sqrt{99}$ как основа для проведения вычисления неудобен, если вычисление должно проводиться с постоянным числом десятичных знаков (например, три): $10{,}0 - 09{,}9 = 00{,}1$. Если же применить эквивалентное выражение $10 - \sqrt{99} = (10 + \sqrt{99})^{-1}$, то получится пригодный алгоритм, так как теперь $(10{,}0 + 09{,}9)^{-1} = 19{,}9^{-1} = 0{,}05$.

Некоторые общие положения

1. Математические аналитические методы решений зачастую оказываются непригодными для использования в качестве вычислительных алгоритмов.

2. Алгоритмы должны быть по возможности изменяемыми в зависимости от набора исходных данных; заметим, что границы изменения этих данных не всегда известны.

3. Метод может применяться как алгоритм только тогда, когда он полностью схематизирован. Это означает, что в каждый момент должно быть однозначно установлено, какой следующий шаг должен быть сделан.

4. Алгоритм должен строиться преимущественно рекурсивно. Рекурсивный алгоритм состоит из относительно небольших составных частей, которые неоднократно реализуются для различных наборов значений.

5. Вычислительный алгоритм должен быть конечным, т. е. приводить к результату за конечное число шагов. Бесконечные математические модели (последовательности, ряды и т. п.) должны, согласно этому, приводиться всегда к конечному представлению.

6. Вычислительный алгоритм может содержать лишь такие операции, которые являются выполнимыми на используемых вычислительных устройствах (или согласуются с вычислительной машиной).

7.1.1. ПОГРЕШНОСТИ И ИХ УЧЕТ

Если величины представляются численно (т. е. посредством конечной p-разрядной дроби), то они реализуются лишь приблизительно, с некоторой погрешностью. В соответствии с общепринятыми в математике обозначениями теоретическое, или точное, значение величины обозначают так же, как и саму величину: $x, y, z, \ldots, a, b, c, d, \ldots$. Чертой сверху мы будем помечать соответствующие значения, содержащие погрешность, т. е. числа, с которыми мы фактически проводим вычисления. В соответствии с этим $\delta(x) = \bar{x} - x$ обозначает истинную погрешность; $\underline{\delta}(x)$ и $\bar{\delta}(x)$ – ее нижнюю, соответственно верхнюю, границу, $\Delta(x) = \max(|\underline{\delta}(x)|, |\bar{\delta}(x)|)$ – максимальную погрешность; $\rho(\bar{x}) = \delta(x)/x$ – относительную истинную погрешность x. Следовательно,

$$x = \bar{x} - \delta(x),\quad \underline{\delta}(x) \leqslant \delta(x) \leqslant \bar{\delta}(x),\quad |x - \bar{x}| \leqslant \Delta(x).$$

Для проведения численного расчета нужно знать, каковы исходные данные, с какой точностью должны быть получены выходные данные, какова возможная точность выполнения операций и какой алгоритм должен быть применен в связи с этим.

Существует три источника погрешностей; 1) погрешность входных данных, 2) погрешность метода (обрыва), 3) погрешность округления (машинная погрешность).

Исследование погрешности выхода является очень сложной проблемой. Если мы рассматриваем отдельный вычислительный шаг вида $x = g(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, в котором выходная величина должна быть вычислена согласно правилу g по N исходным данным, то истинную погрешность $\delta(x) = \bar{x} - x$ можно разложить на следующие три составляющие:

$$\delta(x) = \delta_{\text{м}}(x) + \delta_{\text{вв}}(x) + \delta_{\text{с}}(x).$$

Погрешность метода (погрешность обрыва):

$$\delta_{\text{м}}(x) = \bar{g}(a_1, a_2, \ldots, a_N) - g(a_1, a_2, \ldots, a_N).$$

Она является мерой отклонения вычислительной модели от точной и может появляться даже тогда, когда исходные данные точны (например, целые числа).

Погрешность, обусловленная вводом:

$$\delta_{\text{вв}}(x) = \bar{g}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N) - \bar{g}(a_1, a_2, \ldots, a_N).$$

Эта погрешность является оценкой распространения погрешности ввода при вычислении.

Дополнительная погрешность, случайная погрешность:

$$\delta_C(x) = \bar{x} - \bar{g}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N).$$

Она является мерой погрешностей, присоединяющихся от машинной реализации действий.

Максимально точная оценка *погрешности метода* есть составная часть каждого вычислительного метода. Она совершенно не зависит от того, как этот метод реализуется.

Погрешность, обусловленную входными данными, можно заметить и оценить, если алгоритм прост и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Для сложных задач простые и непосредственные методы исследования распространения погрешности перестают действовать. Нужно принимать во внимание, что эта часть погрешности не зависит от реализации вычислений.

Число разрядов арифметики, кодирование, фиксированная или плавающая запятая, особые операции, сделанные с двойной точностью, и т. п. имеют непосредственное влияние на распространение погрешности. До сих пор существенные результаты имелись в трех направлениях:

— в статистических исследованиях накопления погрешностей;

— в детерминированном анализе распространения погрешности при общих методах по Уилкоксону;

— в *арифметике интервалов.*

В противоположность разрабатывавшимся до последнего времени моделям в арифметике интервалов точная модель $x = g(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ заменяется на алгоритм, который использует интервал как величину входа и дает в качестве выхода интервал $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{g}}(\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \ldots, \bar{\bar{a}}_N)$ с

$$\bar{\bar{a}}_i = [A_i \leqslant a_i \leqslant B_i], \quad \bar{\bar{x}} = [X_1 \leqslant x \leqslant X_2].$$

Таким образом, надо принимать в расчет непосредственно интервалы, так что надобность в специальном исследовании погрешностей отпадает. К настоящему времени уже имеется целый ряд алгоритмов арифметики интервалов. Так как эта арифметика должна охватывать все случаи, то зачастую оказывается, что выходные интервалы очень велики; в связи с этим арифметика точек с более точным слежением за погрешностями приводит все-таки к более точным результатам.

Величина *дополнительной погрешности* зависит в первую очередь от функционирования вычислительной техники. Главные причины больших случайных погрешностей:

— метод обрыва и округления, принятый в машине;

— *потеря значащих разрядов* при вычитании. Если два числа одного порядка величины, содержащие погрешность, вычитаются, то разность, смотря по обстоятельствам, может оказаться и чисто случайным числом. Тогда, если это число входит в дальнейшие расчеты, возникают большие случайные относительные погрешности; например, $3{,}1415\underline{613} - 3{,}1415\underline{524} = 0{,}00000\underline{89}$; от восьми значащих цифр остались только две;

— техническое состояние машины;

— потеря разрядов при превышении допустимой разрядности представления чисел (например, при делении на маленькие числа).

Вычислительный алгоритм состоит из целого ряда отдельных операций, которые снова и снова повторяются. При этом погрешности выхода каждого шага оказываются входными погрешностями следующей операции, а точный анализ погрешностей становится далее все более трудным, и часто ограничиваются только оценками.

Вычислительный метод называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что максимальная погрешность вывода меньше ε при максимальной погрешности ввода, меньшей δ.

7.1.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

7.1.2.1. Решение линейных систем уравнений. Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,$$

т. е. $Ax = b$, которая в предположении, что $\det A \neq 0$, имеет для любых правых частей уравнений однозначно определенное решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Для отыскания этого вектор-решения имеется два вида методов: вычисление на основе метода исключения и вычисление на основе методов последовательных приближений (итераций).

7.1.2.1.1. Прямые методы (метод исключения Гаусса).

1) Простой метод Гаусса. Известный метод исключения (см. 2.4.4.3.3) после преобразования в алгоритм состоит из двух циклических процедур.

Преобразование матрицы A в матрицу треугольного вида.

1. Пусть $k = 1$.

2. Следует проверить, отлично ли a_{kk} от нуля.

3. Если да, то k-я строка становится *рабочей строкой*. Если нет, то меняем k-ю строку на l-ю ($l > k$), в которой $a_{lk} \neq 0$.

4. Для $i = k+1, k+2, \ldots, n$ вычисляем новые матричные элементы, которые обозначим, подобно прежним, по правилу:

$$a'_{ij} = 0 \quad \text{для } j = k,$$
$$a'_{ij} = a_{ij} + q_i a_{kj} \quad \text{для } j \neq k,$$

где

$$q_i = -a_{ik}/a_{kk};$$

аналогично представим новые правые части уравнений:

$$b'_i = b_i + q_i b_k.$$

5. Увеличиваем k на единицу, если $k \leqslant n-2$, и начинаем снова с п. 2. В итоге получим верхнюю треугольную матрицу

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вычисление вектор-решения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$:

1. $x_n = b'_n / a'_{nn}$.
2. Для $i = n-1, n-2, \dots, 1$

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i - \sum_{j=1}^{n-i} a'_{i,i+j} x_{i+j}\right).$$

2) Метод Гаусса – Жордана. Модифицируем простой метод Гаусса, а именно в п. 4 позволим номеру строки i пробегать значения от 1 до $k-1$ и от $k+1$ до n. Это приведет к тому, что *все* элементы k-го столбца, за исключением диагонального элемента, становятся равными 0, и вместо верхней треугольной матрицы мы получаем теперь в конечном результате диагональную матрицу

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тем самым расчет вектор-решения существенно упрощается:

$$x = (b'_1/a'_{11}, \dots; b'_n/a'_{nn})^T.$$

Тем не менее число операций в этом методе больше, чем в простом методе Гаусса.

Решающее значение для точности вычисления имеет деление на a_{kk}, необходимое при расчете q_i. Поэтому условие п. 2 метода Гаусса для выбора диагонального элемента слишком слабо с точки зрения точности, и часто применяют следующую схему.

Перестановкой строк и столбцов (последние должны быть «помечены» и восстановлены при построении вектор-решения) добиваются того, чтобы элемент, который имеет наибольшую по модулю величину среди всех элементов, не использовавшихся ранее в качестве диагональных элементов, оказался диагональным.

Пример 2. Процесс полной диагонализации методом Гаусса – Жордана (табл. 7.1).

Колонки s_i и S_i даны для контроля:

$$s_i = -\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} - b'_i,$$

$$S_i = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} + b'_i + s_i \equiv 0.$$

3) Связанный алгоритм (способ Гаусса – Банашевича). Можно прийти к очень наглядной и компактной вычислительной схеме, если отдельные шаги гауссова метода

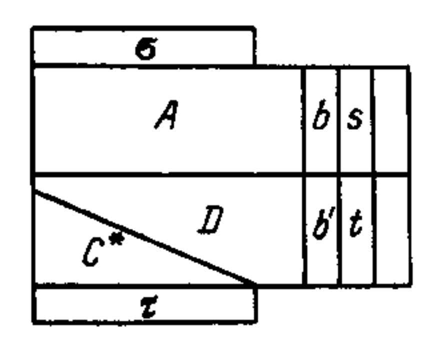


Рис. 7.1

исключения расположить так, чтобы работать только с числами, которые в дальнейшем не обрабатываются и могут быть просто «переписаны».

Таблица 7.1

i	A			b_i	s_i	q_i	S_i
1	−1	3/2	1	9/2	−6	1/2	
2	2	1	0	−1	−2	диагональ	
3	$-\bar{1}$	−1	7/4	7/2	−13/4	1/2	
1	0	2	1	4	−7	диагональ	0
2	2	$\bar{1}$	0	−1	−2	−1/2	0
3	$\bar{0}$	−1/2	7/4	3	−17/4	1/4	0
1	0	2	1	4	−7	−1/2	0
2	2	$\bar{0}$	−1/2	−3	3/2	1/4	0
3	$\bar{0}$	0	2	4	−6	диагональ	0
1	0	2	0	2	−4		0
2	2	$\bar{0}$	0	−2	0		0
3	$\bar{0}$	0	$\underline{2}$	4	−6		0
$x^T = (-1, +1, 2)$							

Таблица 7.2

σ_1 −2	σ_2 1	σ_3 −7	σ_4 7	σ −30	−31 / $-31K_1$
a_{11} 2	a_{12} 3	a_{13} −1	a_{14} 0	20	−24
a_{21} −6	a_{22} −5	a_{23} 0	a_{24} 2	−45	54
a_{31} 2	a_{32} −5	a_{33} 6	a_{34} −6	−3	6
a_{41} 4	a_{42} 6	a_{43} 2	a_{44} −3	58	−67
2	3	−1	0	20	−24
−3	4	−3	2	15	−18
1	−2	1	−2	7	−6
2	0	4	5	−10	5
τ_1 −1	τ_2 1	τ_3 −5	τ_4 −1	K_3 0	K_4 0
K_2 −1	−1	−1	−1		
$\underline{x}$ = 1	7	3	−2		

Вычислительная схема (рис. 7.1, табл. 7.2):

$$s_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - b_i,$$

$$\sigma_k = -\sum_{i=1}^{n} a_{ik}, \quad \sigma = -\sum_{i=1}^{n} b_i,$$

$$d_{ik} = a_{ik} - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il} d_{lk}, \quad d_{1k} = a_{1k},$$

$$b_i' = b_i - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il} b_l', \quad t_i = s_i - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il} t_l,$$

$$c_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_{11}}, \quad c_{ik} = \frac{1}{d_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{l=1}^{k-1} c_{il} d_{lk}\right),$$

$$\tau_k = \frac{1}{d_{kk}}\left(\sigma_k - \sum_{l=1}^{k-1} \tau_l d_{lk}\right).$$

Численный пример:

$$d_{24} = 2 - 0\cdot(-3) = 2, \quad c_{42} = \frac{1}{4}(6 - 2\cdot 3) = 0,$$

$$\tau_4 = \frac{1}{5}(7 - (0 + 2 + 10)) = -1.$$

Проверка:

K_1: $\sum \sigma_k + \sigma = \sum s_i$, K_2: $\sum_i c_{ik} + \tau_k = -1$ для всех k,

K_3: $\sum \tau_k b_k' - \sigma = 0$, K_4: $\sum \tau_k t_k - \sum s_k = 0$.

Все схемы позволяют решать параллельно несколько систем уравнений с одинаковой матрицей A и различными столбцами правых частей. Для этого требуется лишь иметь нужное число столбцов b.

4) Нахождение обратных матриц. Для каждой невырожденной матрицы A существует матрица A^{-1}, для которой $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ является единичной матрицей. Матрицу A^{-1} называют матрицей, *обратной* к A (см. 2.4.4.2.4).

Когда надо решать несколько уравнений с одной и той же матрицей, но с различными правыми частями, рекомендуется произвести вычисление обратной матрицы; тогда вектор-решение $x = A^{-1}b$ можно вычислить простым перемножением матриц.

Для этого решают одновременно n систем уравнений $Ay^{(k)} = e^{(k)}$ с правыми частями

$$e^{(1)} = (1,\ 0, \ldots, 0)^T,$$

$$e^{(2)} = (0,\ 1,\ 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e^{(n)} = (0,\ 0, \ldots, 1)^T$$

и составляют обратную матрицу из вектор-решений $y^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ как вектор-столбцов.

Пример 3. Найти матрицу, обратную A (способ Гаусса – Жордана. См. табл. 7.3).

7.1.2.1.2. Метод итерации. Возможны разнообразные способы приведения векторного уравнения $Ax - b = 0$ к виду $x = Mx + c$ путем выполнения подходящих эквивалентных преобразований. В этой форме решение x определяется как *неподвижная точка* линейного преобразования $Tx = Mx + c$, которую определяют методом последовательных приближений. Векторная последовательность $\{x^{(m)}\}_1^{\infty}$, определенная следующим образом:

$$x^{(m+1)} = Mx^{(m)} + c, \qquad m = 0,\ 1, \ldots,$$

где $x^{(0)}$ – постоянный заданный *начальный вектор*, сходится к вектор-решению x, если матрица M не вырождена и удовлетворяет неравенству

$$\| M \| \leqslant p < 1,$$

где

$$\| M \| = \sup \{\| Mx \|,\ \| x \| \leqslant 1\}$$

или любая другая норма в пространстве матриц.

При этом справедливы оценки

$$\| x^{(m)} - x \| = \frac{p^m}{1-p} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|.$$

Таблица 7.3

i	A			E			q		
1	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	0	1	диагональ	-6	–
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	–	–
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	–	–
2	0	$\boxed{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	–	диагональ	-15
3	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	–	-1	–
1	1	0	$-\frac{1}{6}$	4	-6	0			30
3	0	0	$\boxed{\frac{1}{180}}$	$\frac{1}{6}$	-1	1			диагональ
1	1	0	0	9	-36	30	$k=1$	$k=2$	$k=3$
2	0	1	0	-36	192	-180			
3	0	0	1	30	-180	180			
	E			A^{-1}					

1) Метод Якоби. Если $A = L + D + R$ с составляющими матрицами

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & \ddots & a_{n,n-1} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix},$$

то в этом методе $M = M_J = -D^{-1}(L+R)$ и $c = D^{-1}b$.

Таким образом,

$$Dx^{(m+1)} = -(L+R)x^{(m)} + b, \quad x^{(0)} \text{ задано.}$$

Метод сходится при $\| D^{-1}(L+R) \| < 1$; достаточным условием этого является выполнение неравенства $\| L+R \| < \inf |a_{ii}|$. Если в качестве нормы выбрать суммарную норму строки $\| A \| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, то получим важный результат: метод Якоби сходится в предположении, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(условие *доминирования диагонали*).

2) Метод Гаусса – Зейделя:

$$M = M_G = -(L+D)^{-1}R.$$

Формула итерации:

$$(L+D)x^{(m+1)} = -Rx^{(m)} + b, \; x^{(0)} \text{ задано.}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)};$$

следовательно,

$$x_i^{(m+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - b_i \right)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Вычислительная схема и пример. Итерационный метод Гаусса – Зейделя (табл. 7.4).

Таблица 7.4

	Матрица A				$-b$
	24	−2	2	1	−54
	−1	21	2	−1	61
	1	2	28	−2	−28
	0	1	−2	20	45
n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$x_4^{(n)}$	
0	0	0	0	0	—
1	2,250	−2,7976	1,1195	−1,9982	1
2	2,00683	−3,01097	1,00067	−1,99938	1
3	1,99900	−3,00008	1,00009	−1,99999	1
4	1,99999	−3,00001	1,00000	−2,00000	1
5	2,00000	−3,00000	1,00000	−2,00000	1
6		Далее не требуется!			

Сходимость при $\|(L+D)^{-1}R\| < 1$. Достаточными условиями этого являются, например:

а) A симметрична и положительно определена;

б) $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ для всех i.

7.1.2.2. Линейные задачи о собственных значениях. Принципиально имеется много возможностей для вычисления собственных значений λ_j и принадлежащих им собственных векторов x_j матрицы A, которые определены и связаны посредством соотношения $Ax_j = \lambda_j x_j$. Поэтому при выборе принимают во внимание, вообще говоря, не только вычислительную точку зрения, но и метод, который будет учитывать поставленную цель и особенности матрицы.

Мы ограничимся рассмотрением только некоторых методов при дополнительном предположении *симметричности* (т. е. $A^T = A$).

7.1.2.2.1. Прямые методы. Цель прямых методов — *одновременное* определение всех собственных значений, а также собственных векторов по единому методу. Поэтому можно говорить о *численном преобразовании к главным осям,* потому что собственные векторы A являются вектор-столбцами матрицы преобразований X, а собственные значения λ_j — диагональными элементами диагональной матрицы D в преобразовании $X^TAX = D$ (см. 2.4.4.5.3).

1) Решение характеристического (векового) уравнения. Собственные значения λ_j являются корнями многочлена $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, коэффициенты которого можно вычислить различными способами по элементам матрицы. Для численного нахождения решений уравнения $P_A(\lambda) = 0$ следует обратиться к 7.1.2.3.

Собственные векторы каждого собственного значения получаются как вектор-решения системы линейных уравнений $Ax = \lambda_j x$, и их находят при помощи соответствующих методов (см. 7.1.2.1).

Однако надо отметить, что этот метод нарушает *принцип непосредственного приложения* (ср. 7.1.3.1) и все более и более оттесняется другими.

2) Метод Якоби. Рассмотрим матрицы

$$T_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & 1\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi & \dots & \sin\varphi & \dots & 0 & -p\text{-я} \\ 0 & 0 & \dots & 0\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\ 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & -\sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0 & -q\text{-я} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\ 1 & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix},$$

p-й столбец q-й столбец

получившие название матриц *элементарных вращений Якоби.* Всегда можно определить угол φ в интервале $(-\pi/4, \pi/4)$ так, что в преобразованной матрице $A' = T_{pq}^TAT_{pq}$ элементы $a'_{pq} = a'_{qp}$ обращаются в нуль.

В матрице $A'' = T_{pq}^TA$, очевидно, меняются лишь p-я и q-я строки, при этом:

$$a''_{pj} = a_{pj}\cos\varphi - a_{qj}\sin\varphi,$$

$$a''_{qj} = a_{pj}\sin\varphi + a_{qj}\cos\varphi,\quad a''_{ij} = a_{ij} \text{ для } i \neq p,\ q.$$

В матрице $A' = A''T_{pq}$ изменены по сравнению с A'' только p-й и q-й столбцы:

$$a'_{ip} = a''_{ip}\cos\varphi - a''_{iq}\sin\varphi,$$

$$a'_{iq} = a''_{ip}\sin\varphi + a''_{iq}\cos\varphi,\quad a'_{ij} = a''_{ij} \text{ для } j \neq p,\ q.$$

Если объединить обе части, то для элементов в точках пересечения p-х и q-х строк и столбцов получим

$$a'_{pp} = a_{pp}\cos^2\varphi - 2a_{pq}\cos\varphi\sin\varphi + a_{qq}\sin^2\varphi,$$

$$a'_{qq} = a_{pp}\sin^2\varphi + 2a_{pq}\cos\varphi\sin\varphi + a_{qq}\cos^2\varphi,$$

$$a'_{pq} = a'_{qp} = (a_{pp} - a_{qq})\cos\varphi\sin\varphi + a_{pq}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Следовательно, элементы a'_{pq} и a'_{qp} становятся нулями, если

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}}, \text{ где } -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Идея метода состоит в вычислении матрицы преобразования X как произведения таких специальных матриц, которые находятся методом итерации.

Если к A' снова применить элементарное вращение Якоби, то в нуль обращаются еще два других элемента, а элементы, которые ранее были равны нулю в A', не становятся отличными от нуля.

Итак, *метод Якоби* включает следующие действия (k-й шаг):

1. Выбор элемента $a_{pq}^{(k)}$ из матрицы $A^{(k)}$.
2. Вычисление $A^{(k+1)} = T_{pq}^T A^{(k)} T_{pq}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.
3. Обрыв при $\sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}^{(k+1)}|^2 < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ задано.

В противном случае – переход к $k+1$-шагу. При обрыве матрица $A^{(k)}$ имеет диагональный вид с точностью, определяемой ε, диагональные элементы являются приближениями собственных значений, а столбцы матрицы произведения всех примененных T_{pq} являются приближениями собственных векторов.

Сходимость метода очень существенно зависит от последовательности элементов в процессе. Она доказана для

а) *классического метода Якоби*: выбор в качестве основного, ведущего элемента наибольшего по абсолютной величине внедиагонального элемента, $a_{pq}^{(k)} = \max\limits_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|$;

б) *циклического метода Якоби*: выбор элемента, согласно заранее определенной последовательности, способом строки или столбца. Метод создан для автоматического счета (на ЭВМ).

7.1.2.2.2. Методы итерации. Под ними понимают все методы, задача которых – целенаправленное вычисление отдельных собственных значений или векторов.

1) Простая векторная итерация (степенной метод, метод Мизеса) для вычисления наибольшего по величине собственного значения. Если матрица A обладает *простым* превалирующим собственным значением λ_1 $(|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|)$, то векторная последовательность, определяемая соотношением

$$x^{(m+1)} = Ax^{(m)} = A^{m+1}x^{(0)}, \quad x^{(0)} \text{ задано},$$

асимптотически сходится к собственному вектору y_1, принадлежащему λ_1, $x^{(m)} \sim \lambda_1^m c y_1$, если начальный вектор $x^{(0)}$ обладает компонентой в направлении собственного вектора y_1. Собственное значение можно вычислить следующим образом:

$$\lambda_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{x_i^{(m+1)}}{x_i^{(m)}}$$

или, лучше,

$$\lambda_1 = \lim_{m \to \infty} R(x^{(m)}).$$

Во второй формуле $R(x)$ означает частные Релея:

$$R(x) = x^T A x / x^T x.$$

Собственный вектор можно вычислить по асимптотической формуле только при наличии нормировки. Собственный вектор в направлении y_1 определяется как

$$y_{i1}/\| y_1 \| = \lim_{m \to \infty} x_i^{(m)}/\| x^{(m)} \| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Без такой нормировки метод численно неустойчив.

Наименьшее по абсолютной величине собственное значение можно найти, если принять во внимание, что оно равно обратной величине наибольшего собственного значения матрицы A^{-1} (обратная векторная итерация).

2) Дробная итерация. Этот метод должен применяться тогда, когда нужно определить *отдельное* собственное значение вместе с соответствующим собственным вектором. Его использование опирается на знание такого хорошего приближения $\bar{\lambda}_k$ искомого λ_k, что величина $|\lambda_k - \bar{\lambda}_k|$ мала по сравнению с $|\lambda_j - \lambda_k|$, $j \neq k$, и на то, что собственные значения расположены изолированно.

Матрица $B(\bar{\lambda}_k) = A - \bar{\lambda}_k E$ имеет собственное значение $\mu_k = \lambda_k - \bar{\lambda}_k$ для собственного вектора x_k матрицы A. В самом деле, $B(\bar{\lambda}_k) x_k = Ax_k - \bar{\lambda}_k x_k = \lambda_k x_k - \bar{\lambda}_k x_k = (\lambda_k - \bar{\lambda}_k) x_k$. Но тогда μ_k^{-1} есть доминантное собственное значение матрицы $B^{-1}(\bar{\lambda}_k)$ для достаточно произвольного начального вектора $x^{(0)}$. Поэтому, если $x^{(m+1)} = B^{-1}x^{(m)}$, или $Bx^{(m+1)} = x^{(m)}$, то

$$(\mu_k)^{-1} = \lim_{m \to \infty} R(x^{(m)}), \quad \lambda_k = \bar{\lambda}_k + \lim_{m \to \infty} R^{-1}(x^{(m)}).$$

Кроме того, последовательности $x_i^{(m)}/\| x^{(m)} \|$ сходятся к компонентам нормированного собственного вектора $y_k/\| y_k \|$.

7.1.2.3. Нелинейные уравнения. Пусть функция $y = f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ определена и непрерывна. Пусть, далее, имеются два числа x_1 и x_2 такие, что $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Если $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют противоположные знаки, то между x_1 и x_2 существует хотя бы один корень функции $f(x)$.

1) Итерационные методы. Нелинейное уравнение $f(x) = 0$ можно эквивалентным преобразованием многими способами привести к виду $g(x) = h(x)$.

Пример 4.

$$x^2 - \ln x - 2 = 0, \qquad f(x) = x^2 - \ln x - 2;$$
$$x^2 - 2 = \ln x, \qquad g(x) = x,\ h(x) = e^{x^2 - 2};$$
$$x = e^{x^2 - 2},\ g(x) = x,\ h(x) = e^{x^2 - 2};$$
$$e^{x^2} = xe^2, \quad g(x) = e^{x^2},\ h(x) = xe^2 \text{ и т. д.}$$

Построение сходящейся числовой последовательности $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ по правилу $g(x^{(m+1)}) = h(x^{(m)})$ при заданном $x_i^{(0)}$ называется *итерационным методом* вычисления корня x_N.

Вследствие предположенной непрерывности предельное значение такой последовательности является корнем, потому что из соотношений $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = a$ и $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m+1)} = a$ в силу непрерывности g и h имеем $g(a) = h(a)$, т. е. $a = x_N$.

Достаточные условия сходимости: $g'(x)$ и $h'(x)$ непрерывны в некоторой окрестности x_N, $x^{(0)}$ лежит в этой окрестности и в этой окрестности $|g'(x)| > |h'(x)|$.

Таблица 7.5

m	x_m	$x_m^2 - 2$	$\lvert x_{m+1} - x_m \rvert$	$\lvert x_m - x_N \rvert$
0	0,15	−1,9775		0,0120652
1	0,138	−1,980956	0,012	0,0000627
2	0,1379373	−1,9809733	0,0000627	0,0000025
3	0,1379349	−1,9809740	0,0000024	0,0000001
4	0,1379348	−1,9809740	0,0000001	0,0000000
5	Дальше не заполняется, потому что процесс останавливается. Данные последней колонки на практике неизвестны и приведены для того, чтобы показать, что разность двух последовательных итераций вполне характеризует сходимость.			

Пример 5. $x^2 - \ln x - 2 = 0$, $\ln x = x^2 - 2$, следовательно, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 - 2$.

Из пересечения графиков этих функций находим $x^{(0)} = 0{,}15$; $g'(x) = 1/x$, $h'(x) = 2x$, откуда $1/x > 2x$ для $0 < x < 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$.

Выбором функций $g(x)$ и $h(x)$ можно получить ряд хорошо сходящихся методов.

Метод Ньютона:

$$g(x) = x, \quad h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Сходимость имеет место тогда, когда $|h'(x)| = \left|\frac{f''f}{f'^2}\right| < 1$ в окрестности x_N. Если x_N является простым корнем, то выполняются соотношения $f'(x_N) \neq 0$ и $h'(x_N) \neq 0$. Следовательно, для начального значения $x^{(0)}$ должно выполняться неравенство

$$|f''(x^{(0)}) f(x^{(0)})| < |f'(x^{(0)})|^2.$$

Итерационная формула имеет вид

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \frac{f(x^{(m)})}{f'(x^{(m)})}; \; f'(x^{(m)}) \neq 0.$$

Метод секущих (правило ложного положения, метод хорд):

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \frac{f(x^{(m)})}{s_m} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$s_m = \frac{f(x^{(m)}) - f(x^{(m-1)})}{x^{(m)} - x^{(m-1)}}.$$

Здесь $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ – два заданных числа таких, что $f(x^{(0)}) f(x^{(1)}) < 0$.

Простая итерация. Если $g(x) = x$, то $x^{(m+1)} = h(x^{(m)})$; условие сходимости: $|h'(x)| < 1$. Если $x^{(m)}$ достаточно близко к x_N, то для погрешности $r^{(m)} = x_N - x^{(m)}$ справедливо следующее соотношение:

$$r^{(m)} \approx h'(x_N) r^{(m-1)} \approx (h'(x_N))^m (x_N - x^{(0)}).$$

Пример 6. *Нахождение значения квадратного корня.* $x_N = \sqrt{a}$, т. е. x_N есть корень уравнения $x^2 - a = 0$, $a > 0$; записав уравнение в виде $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, получим

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$

откуда

$$x^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(m)} + \frac{a}{x^{(m)}}\right).$$

Неравенство $|h'(x)| < 1$ равносильно $a/x^2 < 3$; отсюда следует, что единственным условием на $x^{(0)}$ является

$$(x^{(0)})^2 > a/3.$$

2) Вычисление корней рациональных функций. Если

$$P_n(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \; a_n \neq 0,$$

и все a_i действительные, то нелинейное уравнение

$$P_n(x) = 0$$

имеет точно n корней $x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_n}$ (см. 2.4.2.4). Некоторые из них или все могут быть действительными, некоторые могут совпадать (кратные корни). Число комплексных корней четно, и наряду с комплексным корнем z существует также сопряженный ему корень $\bar{z}$. Согласно этому многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Если некоторый корень x_N известен, то $P_n(x)$ можно разделить без остатка на линейный множитель $(x - x_N)$; следовательно, для вычисления других корней степень многочлена можно уменьшить.

Вычисление значений функции и ее производных осуществляется при помощи указанного разложения на линейные множители по *схеме Горнера* (см. 7.1.3.3).

Конечно, все изложенные в 1) методы с соответствующими изменениями могут быть применены и к многочленам. Но существует также большое количество специальных методов, которые по аналогии с методами решения задач на нахождение собственных значений могут быть подразделены на прямые и итерационные методы в зависимости от того, вычисляются ли все или только отдельные корни.

Метод Лобачевского – Греффе (как пример прямого метода). Для простоты предположим, что многочлен

$$P_n^{(j)}(x) = a_0^{(j)}(x - x_1^{(j)})(x - x_2^{(j)})\ldots(x - x_n^{(j)}) = a_0^{(j)} x^{(n)} + a_1^{(j)} x^{(n-1)} + \ldots + a_n^{(j)}$$

имеет только действительные и простые корни $x_k^{(j)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $|x_{i+1}^{(j)}| < |x_i^{(j)}|$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Новый многочлен $P_n^{(j+1)}(x)$ находим по следующей схеме (табл. 7.6).

Таблица 7.6

$p^{(j)}$		$a_0^{(j)}$	$a_1^{(j)}$	$a_2^{(j)}$	$a_3^{(j)}$	...
		$(a_0^{(j)})^2$	$(a_1^{(j)})^2$	$(a_2^{(j)})^2$	$(a_3^{(j)})^2$	...
.	−		$-2a_0^{(j)}a_2^{(j)}$	$-2a_1^{(j)}a_3^{(j)}$	$-2a_2^{(j)}a_4^{(j)}$	...
	+			$+2a_0^{(j)}a_4^{(j)}$	$+2a_1^{(j)}a_5^{(j)}$	...
.	−				$-2a_0^{(j)}a_6^{(j)}$	...
	.					
+	.		...	...		
$p^{(j+1)}$:		$a_0^{(j+1)}$	$a_1^{(j+1)}$	$a_2^{(j+1)}$	$a_3^{(j+1)}$	...

Для корней этого нового многочлена справедливо неравенство

$$\frac{|x_k^{(j+1)}|}{|x_{k-1}^{(j+1)}|} \leqslant \frac{|x_k^{(j)}|}{|x_{k-1}^{(j)}|} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n);$$

последнее означает, что корни изолированы друг от друга. Кроме того, $|x_k^{(j)}| = |x_k^{(j+1)}|^2$.

Можно показать, что при сделанных предположениях процесс нахождения многочлена $P_n^{(M)}(x)$ практически заканчивается после конечного числа шагов, когда все двойные произведения в табл. 7.6 становятся равными нулю с точностью до погрешности округления. Тогда $|x_{i+1}^{(M)}|$ пренебрежимо мало по сравнению с $|x_i^{(M)}|$, где $M = 2^k$, k – число итераций, и следовательно,

$$a_1^{(M)} = a_0^{(M)}x_1^{(M)},$$
$$a_2^{(M)} = a_0^{(M)}x_1^{(M)}x_2^{(M)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^{(M)} = a_0^{(M)}x_1^{(M)}x_2^{(M)}\ldots x_n^{(M)},$$

откуда находим $x_k^{(M)}$; корни исходного многочлена легко вычисляются путем извлечения корня. Знаки корней можно определить при помощи простых дополнительных соображений или непосредственно проверкой.

Метод применим также как к многочленам с кратными действительными, так и к многочленам с комплексными корнями, однако последний этап – нахождение корней, а также критерий окончания процесса – несколько видоизменяется. Следует заметить также, что при практическом проведении вычислений по схеме табл. 7.6 необходимо все коэффициенты представлять в виде $a = b^m c$, где $b = 2$ или $b = 10$.

7.1.2.4. Системы нелинейных уравнений. Если непрерывные функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ от n независимых переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заданы в общей области определения $D \subseteq \mathbf{R}^n$ и имеется вектор $x_N \in D$, для которого $f_j(x_N) = 0$ для всех j, то x_N называется *вектор-решением* системы нелинейных уравнений $f(x) = 0$:

$$(f(x)) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T.$$

Задача нахождения такого вектора-решения является обобщением задач в 7.1.2.1 и 7.1.2.3.

1) Линеаризация. Нелинейное представление $f(x)$ заменяют подходящим линейным отображением $L(x) = Ax + b$ (A – матрица размера $n \times n$). Тогда при определенных условиях решение x_L системы $L(x) = 0$ оказывается подходящим приближением к x_N.

Метод Ньютона – Канторовича (линеаризация через разложение по формуле Тейлора). Пусть $x^{(0)}$ – начальное приближение x_N, и пусть $f_j(x)$ по меньшей мере один раз непрерывно дифференцируемы в D; тогда

$$f(x) = f(x^0) + \left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x^{(0)}}(x - x^{(0)}) + R(x).$$

Отбрасывая остаточный член $R(x)$, получаем

$$L(x) = A(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}),$$

где A – *матрица Якоби* $\left.\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x = x^{(0)}}$

Предположим, что A невырождена. Тогда система $y = f(x)$ однозначно разрешима в окрестности $x^{(0)}$. Согласно этому, метод описывается следующей схемой:

1. Выбор приближения $x^{(0)}$ значения x_N.
2. Вычисление матрицы $A(x^0)$.
3. Решение $z^{(1)}$ системы $A(x^{(0)})z + f(x^{(0)}) = 0$ дает новое приближение $x^{(1)} = x^{(0)} + z^{(1)}$, для которого процесс повторяют до тех пор, пока изменение $z^{(j)}$ не окажется в пределах погрешности.

Пример 7. *Метод Ньютона – Канторовича для двух нелинейных уравнений* (табл. 7.7).

2) Метод итерации. Эквивалентное преобразование $f(x) = 0$ к виду $x = g(x)$ дает возможность определить x как неподвижную точку отображения $g(x)$ на D по итерационной формуле

$$x^{(m+1)} = g(x^{(m)}),\ x^{(0)} \text{ задано.}$$

Имеет место следующая теорема о сходимости построенной таким образом последовательности векторов $\{x^{(m)}\}_0^\infty$ к решению x_N.

Пусть R – прямоугольный параллелепипед в n-мерном пространстве:

$$R = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Таблица 7.7

$f_1(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ $f_2(x, y) = 1 - x^2 + y^2$	$-f_{1x} = 2x$, $-f_{1y} = 2y$ $-f_{2x} = 2x$, $-f_{2y} = -2y$		$z_1^{(j)}$ $z_2^{(j)}$	$x^{(j-1)}$ $y^{(j-1)}$
$j = 1$				Пуск
0 1	2 2	2 −2	0,25 −0,25	1 1
$j = 2$				
−0,125 0	2,5 2,5	1,5 −1,5	−0,025 −0,04167	1,25 0,75
$j = 3$				
−0,0024 0,0011	2,45 2,45	1,4167 1,4167	−0,0003 −0,0012	1,2247 0,7071
Точно: $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}}$				

Пусть вектор-функция $g(x)$ определена на R и удовлетворяет следующему условию: существует действительная постоянная L, $0 < L < 1$, такая, что

$$\| g(x) - g(z) \| \leqslant L \| x - z \|$$

для всех

$$x, z \in R \left(\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \right).$$

Тогда:

1) Уравнение $x = g(x)$ обладает *точно одним решением* x_N в R.

2) Определенная выше итерационная последовательность сходится к x_N для любого начального вектора $x^{(0)} \in R$.

3) Справедлива оценка

$$\| x^{(m)} - x_N \| \leqslant \frac{L^m}{1 - L} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|.$$

7.1.2.5. Аппроксимация. Большое число специальных задач по аппроксимации можно понимать и рассматривать как частный случай *общей проблемы аппроксимации.*

Рассматривается векторное пространство V, элементами которого являются функции f какого-либо класса, определенные на одной и той же области M, и в котором определена норма $p(f)$, обладающая теми же свойствами, что и норма в евклидовом и гильбертовом пространствах (более точно общая постановка задачи аппроксимации рассматривается в функциональном анализе). Пусть f – элемент из V и G – подпространство V. Тогда общая проблема аппроксимации $AP(f, G, p(f))$ состоит в следующем: найти функцию $\hat{g}(x) \in G$ такую, что

$$D(f, G, p(f)) = \inf_{g \in G} \{p(f - g)\} = p(f - \hat{g}).$$

Функция $\hat{g}(x)$ называется *наилучшим приближением*, соответствующим $AP(f, G, p(f))$, число $D(f, G, p)$ – *дефектом.*

С практической точки зрения речь идет о замене численно не выражаемой функции f через вычисляемую функцию $\hat{g} \in G$ *по возможности более точно*, т. е. так, чтобы для заданного действительного числа $\varepsilon > 0$ подходящим выбором G получить дефект, меньший ε.

При решении $AP(f, G, p)$ должен быть найден ответ на следующие вопросы:

а) Существует ли наилучшее приближение $\hat{g}$?

б) Однозначно ли определено $\hat{g}$?

в) Как можно вычислить $\hat{g}$?

7.1.2.5.1. Проблема линейной аппроксимации в гильбертовом пространстве. Пусть V – гильбертово пространство со скалярным произведением (f, g) и *нормой* $p(f) = \| f \| = \sqrt{(f, f)}$, и пусть, кроме того, $G_n \subseteq V$ есть n-мерное *подпространство* V. Задача $AP(f, G_n, \| \ \|)$ имеет однозначно определенное решение $\hat{g}$ такое, что $(\hat{g} - f, h) = 0$ для всех $h \in G_n$. Если $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ – некоторый базис G_n, то $\hat{g} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} h_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} (h_k, h_j) = (f, h_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\| f - \hat{g} \|^2 = (f - \hat{g}, f - \hat{g}) = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} (h_k, f).$$

Матрица системы линейных уравнений для вычислений коэффициентов разложения $c_k^{(n)}$ называется *матрицей Грама базиса* $\{h_j\}$. Будем обозначать ее $A_n(h_j)$. Эта матрица является симметричной (эрмитовой для комплексного гильбертова пространства) и положительно определенной.

Частные случаи AP подчиняются этой теории.

1) Гармонический анализ, разложение Фурье:

$$V = L_2(-\pi, \pi), \qquad G_{2n+1} = \{\sin kx, \cos kx\}_{k=0}^{n}$$

(см. 4.4.1).

2) Метод наименьших квадратов. V – пространство интегрируемых функций, определенных на $[a, b]$, с интегрируемым квадратом. Скалярное произведение функций $f(x)$, $g(x)$ определяется как $\int_a^b f(x) g(x)\, dx$. Такое пространство иногда обозначается $R_2(a, b)$; пусть G_{n+1} – множество всех многочленов P_n с действительными коэффициентами степени не больше n.

Сформулируем задачу $AP(f, G_{n+1}, \| \|)$: для заданной функции f найти многочлен $\hat{P}_n(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \ldots + \hat{a}_n x^n$ такой, чтобы для всех многочленов P_n из G_{n+1} выполнялось неравенство

$$\int_a^b (f(x) - \hat{P}_n(x))^2 \, dx \leqslant \int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 \, dx.$$

Набор $h_k = x^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ степенных функций выступает как естественный базис G_{n+1}, а коэффициенты $\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_n$ *минимального многочлена* определяются из системы уравнений

$$\sum_{l=0}^{n} \hat{a}_l \int_a^b x^{l+k-2} \, dx = \int_a^b x^{k-1} f(x) \, dx$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n+1),$$

т. е. из системы уравнений

$$\sum_{l=0}^{n} \hat{a}_l \frac{1}{l+k-1} (b^{l+k-1} - a^{l+k-1}) = \int_a^b x^{k-1} f(x) \, dx$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Отметим, что эта система малоудобна для вычислений и может решаться только с посредственной точностью. Например, при $a = 0$ и $b = 1$ матрицей этой системы является *матрица Гильберта*

$$H_n = \begin{bmatrix} 1/1 & 1/2 & \ldots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \ldots & 1/(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/n & 1/(n+1) & \ldots & 1/(2n-1) \end{bmatrix},$$

норма которой с возрастанием n неограниченно растет.

Система уравнений становится особенно простой, если в качестве базиса $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ подпространств G_{n+1} выбирать ортогональные многочлены. Для таких многочленов $Q_i(x)$ справедливы равенства

$$\int_a^b Q_i(x) Q_j(x) \, dx = 0 \quad \text{для } i \neq j.$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b Q_i^2(x) \, dx = 1 \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

то говорят, что многочлены $Q_i(x)$ образуют *ортонормированную систему*.

Для отрезка $[a, b] = [-1, 1]$ это общеизвестные *многочлены Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n (n!)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \qquad P_0(x) \equiv 1.$$

Ортогональность:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, dx = 0 \quad \text{для } m \neq n,$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентная формула: $(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$.

Корни: $P_n(x)$ имеет на $[-1, 1]$ ровно n различных действительных корней.

Дальнейшие соотношения ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) \, dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x) \, dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Если наилучшее приближение $\hat{P}_n(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ ищется в виде линейной комбинации многочленов Лежандра

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} P_k(x),$$

то для отыскания коэффициентов $c_k^{(n)}$ система уравнений существенно упрощается:

$$c_k^{(n)} \equiv c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) \, dx,$$

$$D^2(f, G_{n+1}, \| \|) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} (f, P_k)^2 =$$

$$= \int_{-1}^{1} f^2(x) \, dx - \left(\sum_{k=0}^{n} \left[\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) \, dx \right]^2 \frac{2k+1}{2} \right).$$

Пример 8. Найти параболу, которая наилучшим образом аппроксимирует функцию $y = \sin t$ на отрезке $[0, \pi]$ в смысле квадратичного отклонения.

1. Преобразование отрезка:

$$x = \frac{2t}{\pi} - 1, \quad y = \sin\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right], \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2. Многочлены Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \; P_1(x) = x, \; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

3. Коэффициенты разложения:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) dx = \frac{2}{\pi},$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) dx = 0,$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) dx = \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).$$

4. Аппроксимация:

$$\hat{P}_2(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right) \frac{1}{2} (3x^2 - 1),$$

или

$$\hat{P}_2(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right).$$

3) Разложение по обобщенным ортогональным многочленам:

$$V = R_2([a, b];\ q(x)),\ G_{n+1} = \{P_n\}.$$

В этом пространстве скалярное произведение образовано с помощью неотрицательной интегрируемой весовой функции $q(x)$:

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, q(x)\, dx.$$

Для специальных весовых функций и нормированного отрезка $[-1, 1]$ известны соответствующие ортогональные многочлены. Например, для

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

это

многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ортогональность:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq n, \\ \pi/2 & \text{для } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{для } m = n = 0. \end{cases}$$

Рекуррентная формула:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots);$$
$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x.$$

Корни: $T_n(x_k) = 0$ для $x_k = \cos((2k+1)\pi/(2n))$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, т. е. на $[-1, 1]$ существует точно n действительных корней.

Точки экстремума: $|T_n(x)| \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $T_n(x_l) = (-1)^l$ для $x_l = \cos(l\pi/n)$ $(l = 0, \ldots, n)$, т. е. на отрезке $[-1, 1]$ точно $n+1$ действительных точек экстремума.

Разложение по многочленам Чебышева можно практически реализовать также, исходя из разложения Тейлора, сходящегося на $[-1, 1]$, заменой степеней x на многочлены Чебышева, учитывая, что

$$1 = T_0(x), \quad x = T_1(x),$$
$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)),$$
$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)), \ldots$$

Пример 9. $e^x = 1 + x + 0{,}5x^2 + 0{,}16667x^3 + 0{,}04167x^4 + R_5(x) = P_4(x) + R_5(x)$.

Разложение по многочленам Чебышева:

$$P_4(x) = 1{,}2656T_0 + 1{,}1250T_1 + 0{,}2708T_2 + 0{,}0417T_3 + 0{,}0052T_4.$$

На этом примере мы хотим пояснить важное свойство разложения по чебышевским многочленам: если ищется приближение 3-го порядка, то

$$P_3(x) = 1{,}2656T_0 + 1{,}1250T_1 + 0{,}2708T_2 + 0{,}0417T_3$$

дает оптимальный результат такого приближения. Если же положить в основу разложение Тейлора и просто опустить члены, начиная с 4-го порядка, то получим погрешность, в 8 раз бóльшую.

7.1.2.5.2. Приближение Чебышева. Мы рассматриваем пространство $V = C[a, b]$ функций, определенных и непрерывных на $[a, b]$, и ставим задачу аппроксимации $AP(f, G, p)$ с нормой

$$p(f) = \sup_{x \in B} |f(x)|,$$

где B – некоторое подмножество отрезка $[a, b]$.

В качестве системы функций G обычно берут множества многочленов P_n.

1) *Равномерное приближение.* Если B совпадает со всем отрезком $[a, b]$, то

$$p(f) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Пусть $G_{n+1} = P_n$ – векторное пространство многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Тогда верны следующие высказывания:

1. Существует единственный (минимизирующий) многочлен

$$\hat{P}_n(x) \in G_{n+1} \text{ с } D(f, G_{n+1}, \|\ \|_C) =$$
$$= \max_{x \in (a, b)} |f(x) - \hat{P}_n(x)| \leqslant \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)|$$

для всех $P_n \in G_{n+1}$.

2. *Теорема Чебышева об альтернансе.* Всегда существуют множество $n+2$ точек $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$ и однозначно определенный многочлен $\tilde{P}_n(x)$ такие, что

$$|f(x_j) - \tilde{P}_n(x_j)| = D(f, G_{n+1}, \|\ \|_C),$$
$$(f(x_j) - \tilde{P}_n(x_j)) + (f(x_{j+1}) - \tilde{P}_n(x_{j+1})) = 0$$

для $j = 0, 1, \ldots, n$.

Очевидно, что $\tilde{P}_n(x) \equiv \hat{P}_n(x)$. Множество точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ называется *чебышевским альтернансом.*

3. *Теорема Вейерштрасса.* Для каждой функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой многочлен $P(x)$, что

$$\| P(x) - f(x) \| < \varepsilon.$$

4. В каждом разложении по многочленам Чебышева (см. 7.1.2.5.1) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x)$ частичная сумма

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x)$$

является минимизирующим многочленом для $S_{n+1}(x)$ относительно G_{n+1}, т. е. из неравенства

$$\max_{x \in [a, b]} |S_{n+1}(x) - \hat{P}_n(x)| \leqslant \max_{x \in [a, b]} |S_{n+1}(x) - P_n(x)|$$

(для всех $P_n(x) \in G_{n+1}$) следует:

$$\hat{P}_n(x) = S_n(x).$$

Для практического определения минимизирующего многочлена $\hat{P}_n$ чаще всего используются свойства 2 и 4.

Алгоритм Ремеза. Исходя из множества $M^{(0)} = \{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$, $a \leqslant x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \ldots < x_{n+1}^{(0)} \leqslant b$, как начального приближения чебышевского альтернан-

са, согласно свойству 2, определяют соответствующий $\tilde{P}_n^{(0)}(x)$ и дефект.

Заменой *отдельных* или всех элементов множества $M^{(0)}$ добиваются уменьшения величины дефекта, приходя тем самым к новому множеству $M^{(1)}$, с которым поступают аналогично, и т. д. Процесс заканчивается, когда в пределах точности вычислений уменьшение дефекта оказывается невозможным.

Пример 10. $y(x)=e^x$, $n=1$, заданы три точки:

$M^{(0)}$:	-1	0	1
$y(x_j^{(0)})$:	0,368	1,000	2,718

$$\tilde{P}_1^{(0)}(x)=a^{(0)}x+b^{(0)},$$

$$a^{(0)}\cdot(-1)+b^{(0)}+D^{(0)}=0{,}368,$$
$$a^{(0)}\cdot(0)+b^{(0)}-D^{(0)}=1{,}000,$$
$$a^{(0)}\cdot(1)+b^{(0)}+D^{(0)}=2{,}718.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\tilde{P}_1^{(0)}(x)=1{,}175x+1{,}272,\qquad D^{(0)}=0{,}272;$$
$$\max_{x_k=-1+k\cdot 0{,}1}|\tilde{P}^{(0)}(x)-e^x|=0{,}286 \text{ для } x_k=0{,}2.$$

Поэтому в $M^{(0)}$ мы меняем $x_2^{(0)}=0$ на 0,2:

$M^{(1)}$	-1	0,2	1
$y(x_j^{(1)})$:	0,368	1,221	2,718

$$\tilde{P}_1^{(1)}(x)=a^{(1)}x+b^{(1)}.$$

Решая соответствующую систему уравнений, получим теперь

$$\tilde{P}_1^{(1)}(x)=1{,}175x+1{,}264,\ D^{(1)}=0{,}278.$$

Максимум погрешности $|\tilde{P}_1^{(1)}(x)-e^x|$ в окрестности 0,2 с величиной шага 0,01 равен 0,279 для $x=0{,}16$:

$$M^{(2)}:\quad -1\quad 0{,}16\quad 1.$$

Но при данном числе точек это приводит к тому же самому многочлену. Тем самым мы должны рассматривать $\tilde{P}_1^{(1)}(x)$ в пределах нашей точности как наилучшее приближение первой степени функции e^x.

Метод телескопа (приближенная равномерная аппроксимация). Если $f(x)\in C(a,b)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(x)$ – функциональный ряд, равномерно сходящийся к $f(x)$, то в качестве приближения наилучшей аппроксимации $\hat{P}_n(x)$ выбирают

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kF_k(x).$$

При этом

$$\|S_n-\hat{P}_n\|_{C(a,b)}$$

оказывается минимальной, если речь идет о разложении f по многочленам Чебышева.

2) Дискретная аппроксимация Чебышева. Если $x_1<x_2<\ldots<x_N$ являются N опорными точками, то вводят *дискретную норму Чебышева*

$$\|f\|_T^N=\max_{x_j}|f(x_j)|.$$

Рассмотрим задачу

$$AP(f,G_{n+1},\|\ \|_T^N)\quad\text{с}\quad G_{n+1}=P_n.$$

При $N\geqslant n+1$ справедливы высказывания, аналогичные высказываниям в случае непрерывной аппроксимации Чебышева. Численно задача может быть решена методами линейного программирования (см. 6.1).

При $n+1=N$ речь идет об интерполяционной проблеме (см. 7.1.2.6), и соответствующий минимизирующий многочлен называют тогда *интерполяционным многочленом*. При $n+1=N$ он определяется однозначно, а при $n\geqslant N$ – нет.

7.1.2.6. Интерполяция.

7.1.2.6.1. Интерполяционный многочлен. Пусть на сегменте $[a,b]$ заданы $n+1$ опорных (узловых) точек $a\leqslant x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n\leqslant b$. Пусть, кроме того, заданы $n+1$ действительных чисел y_j ($j=0,1,\ldots,n$) (например, как значения функции $f(x)$ в узловых точках). Тогда имеем следующую задачу интерполяции.

Найти многочлен $I_n(x)$ степени не больше n такой, что $I_n(x_j)=y_j$ для $0\leqslant j\leqslant n$.

Интерполяцию применяют главным образом тогда, когда относительно f известны только дискретные значения функции $y=f(x)$, и, чтобы вычислить другие ее значения между узловыми точками (*интерполяция*) или за отрезком узловых точек (*экстраполяция*), ее приближают многочленом $I_n(x)$, причем

$$f(x_j)=I_n(x_j)\quad(j=0,1,\ldots,n).$$

Всегда существует *только один* интерполяционный многочлен (который может быть представлен в различной форме).

Форма Лагранжа:

$$I_n(x)=\sum_{j=0}^{n}y_jL_j(x),$$

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}.$$

Нетрудно видеть, что $L_j(x_j)=1$, $L_j(x_k)=0$ при $k\neq j$, и, следовательно, $I_n(x_j)=y_j$.

Форма Ньютона:

$$I_n(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jN_j(x),$$

$$N_0(x)=1,$$

$$N_j(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})$$
$$(j=1,2,\ldots,n),$$

$$c_j=[x_0x_1\ldots x_j]=[x_jx_{j-1}\ldots x_0],$$

где

$$[x_jx_{j-1}\ldots x_0]=$$
$$=\frac{1}{x_j-x_0}([x_jx_{j-1}\ldots x_1]-[x_{j-1}\ldots x_0]),$$

$$[x_j]=y_j\qquad(j=0,1,\ldots,n).$$

Выражение $[x_0x_1\ldots x_j]$ называется *разделенной разностью*.

Для определения многочлена в форме Ньютона применяют *разностную схему* или *схему спуска*:

j	x_j	$[x_j]$	$[x_jx_{j+1}]$	$[x_jx_{j+1}x_{j+2}]$	$[x_jx_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}]$
0	x_0	$\boxed{y_0}$			
			$\boxed{\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$		
1	x_1	y_1		$\boxed{\dfrac{[x_1x_2]-[x_0x_1]}{x_2-x_0}}$	
			$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$\boxed{\dfrac{[x_1x_2x_3]-[x_0x_1x_2]}{x_3-x_0}}$
2	x_2	y_2		$\dfrac{[x_2x_3]-[x_1x_2]}{x_3-x_1}$	
			$\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_2}$		$\dfrac{[x_2x_3x_4]-[x_1x_2x_3]}{x_4-x_1}$
3	x_3	y_3		$\dfrac{[x_3x_4]-[x_2x_3]}{x_4-x_2}$	
			...		
...	...	...		...	...

Коэффициенты c_j многочлена Ньютона равны числам в верхнем спускающемся ряду (обведены рамкой).

Пример 11. *Нахождение интерполяционного многочлена.*

Пусть $x_1=4$, $x_2=6$, $x_3=8$, $x_4=10$, $y_1=1$, $y_2=3$, $y_3=8$, $y_4=20$.

Многочлен Ньютона:

$$I_3(x)=1+1\cdot(x-4)+\frac{3}{8}(x-4)(x-6)+$$
$$+\frac{1}{12}\cdot(x-4)(x-6)(x-8)=$$
$$=\frac{1}{24}\cdot(2x^3-27x^2+142x-240).$$

Многочлен Лагранжа:

$$I_3(x)=$$
$$=1\cdot\frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{(4-6)(4-8)(4-10)}+3\cdot\frac{(x-4)(x-8)(x-10)}{(6-4)(6-8)(6-10)}+$$
$$+8\cdot\frac{(x-4)(x-6)(x-10)}{(8-4)(8-6)(8-10)}+20\cdot\frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(10-4)(10-6)(10-8)}=$$
$$=-\frac{1}{48}(x-6)(x-8)(x-10)+\frac{3}{16}(x-4)(x-8)(x-10)-$$
$$-\frac{1}{2}(x-4)(x-6)(x-10)+\frac{5}{12}(x-4)(x-6)(x-8),$$
$$I_3(x)=\frac{1}{24}(2x^3-27x^2+142x-240).$$

j	x_j	y_j	$[x_jx_{j-1}]$	$[x_jx_{j+1}x_{j+2}]$	$[x_jx_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}]$
0	4	$\boxed{1}$			
			$\frac{1}{2}\cdot 2=\boxed{1}$		
				$\boxed{\frac{3}{8}}$	
1	6	3			
			$\frac{5}{2}$		$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{8}=\boxed{\frac{1}{12}}$
2	8	8		$\frac{7}{8}$	
			6		
3	10	20			

Если функция $f(x)$, подлежащая интерполяции, достаточное число раз дифференцируема, то можно вывести формулу для *погрешности интерполяции*:

$$f(x) - I_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

где ξ — некоторое число, расположенное между a и b и зависящее от x.

Часто применяют *равноотстоящие узловые точки* (узловые точки, расположенные на равном расстоянии друг от друга):

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh = b$$

(т. е. $h = (b - a)/n$). Как легко видеть, в этом случае разделенные разности выражаются через простые разности:

$$[x_k x_{k+1} \ldots x_{k+m}] = \frac{1}{m!\,h^m}\Delta^m y_k,$$

где

$$\Delta^0 y_k = y_k,\quad \Delta^1 y_k = y_{k+1} - y_k,\quad \Delta^m y_k = \Delta(\Delta^{m-1} y_k)$$
$$(m = 2, \ldots, k).$$

Разностная схема упрощается. Формула Ньютона принимает вид

$$I_n(x) = y_0 + \frac{1}{h}\Delta y_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{1}{n!h^n}\Delta^n y_0 (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Если положить $x = x_0 + th$, где t может быть действительным числом между нулем и n, то предыдущая формула примет вид

$$I_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{t}{k}\Delta^k y_0,$$

где

$$\binom{t}{k} = C_t^k = \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-k+1)}{k!} \quad \text{при} \quad k \geqslant 1,$$
$$\binom{t}{0} = C_t^0 = 1.$$

Вычисление и использование разностей может быть формализовано введением операторов.

Важнейшие операторы и формулы.
Тождественность: $Iy_k = y_k$.
Сдвиг: $Ey_k = y_{k+1} = y(x_k + h)$, $E^p y_k = y_{k+p} = y(x_k + ph)$, p действительно.
Разность:

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ — опережающая разность,

$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$ — запаздывающая разность,

$\delta y_k = E^{1/2} y_k - E^{-1/2} y_k = y_{k+(1/2)} - y_{k-(1/2)}$ — *центральная разность*.

Среднее значение:

$$\mu y_k = \frac{1}{2}(y_{k+(1/2)} + y_{k-(1/2)}) = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})\,y_k.$$

Правила вычисления:

$$E = I + \Delta = (I - \nabla)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\delta + \mu\right)^2,$$

$$E^n = (I + \Delta)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j,$$

$$\Delta^n = (E - I)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^{n-j} E^j,$$

$$\Delta E = E\Delta, \quad \nabla E = E\nabla = \Delta \quad \text{и др.}$$

Приведенные формулы следует понимать так, что результаты применения операторов правой и левой части к функциональным значениям y_k или $f_k = f(x_k)$ оказываются тождественными. Операторы допускают широкие формальные преобразования (возведение в степень, формула бинома и т. д.).

Важнейшие формы интерполяционного многочлена при равноотстоящих узлах приведены в табл. 7.8.

7.1.2.6.2. Сплайн-интерполяция. Интерполяция на больших отрезках, т. е. с относительно большим количеством узловых точек, имеет дополнительные трудности. С одной стороны, при больших расстояниях между узловыми точками точность очень мала, а с другой стороны, интерполяционные многочлены высокого порядка на концах отрезка значительно колеблются, что существенно искажает поведение функции. Это становится особенно важным при последующем дифференцировании.

Отчасти при решении таких задач оказывает помощь *кусочная интерполяция* более низкого порядка: интерполяция осуществляется по небольшому количеству узловых точек отрезка и затем многочлены объединяют в общую интерполяционную функцию. При этом в точках стыковки обычно терпит разрыв уже первая производная.

Для получения интерполяционных формул с гладкими производными все возрастающее значение получает сплайн-интерполяция.

Пусть заданы $n + 1$ узловых точек. Функцию, интерполирующую $f(x)$ на $[a, b]$, будем искать теперь не среди многочленов $P_n(x)$, а среди так называемых *сплайн-функций* $S_k(x)$ степени k.

Пусть K_n — система узловых точек (*узлов*) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Функция $S_k(x)$ называется *сплайн-функцией* степени $k \geqslant 0$ на K_n, если

а) $S_k(x) \in C^{k-1}[a, b]$;

б) $S_k(x)$ — многочлен степени не больше k при $x \in [x_{j-1}, x_j]$.

Множество сплайн-функций на K_n обозначается $S_k(K_n)$.

Сплайн-функция $\hat{S}_k(x) \in S_k(K_n)$ называется *интерполирующей* сплайн-функцией, если

$$\hat{S}_k(x_j) = y_j = f(x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

В приложениях часто бывает достаточно выбрать $k = 3$ и применить так называемую *кубическую сплайн-интерполяцию*. Обозначим

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad \hat{S}_3(x) = s(x),$$
$$s_j^i = s^{(i)}(x_j) \quad (i = 0, 1, 2;\ j = 0, 1, \ldots, n).$$

Таблица 7.8

Ньютон (равноотстоящие опорные точки): $x = x_0 + th$,

$$f(x) = f_0 + C_t^1 \Delta f_0 + C_t^2 \Delta^2 f_0 + \ldots + C_t^n \Delta^n f_0 + C_t^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi);$$

$$x = x_n - sh,$$

$$f(x) = f_n - C_s^1 \nabla f_n + C_s^2 \nabla^2 f_n - \ldots + (-1)^n C_s^n \nabla^n f_n + (-1)^{n+1} C_s^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Гаусс, I: $x = x + th$,

$$f(x) = f_i + C_t^1 \delta f_{i+1/2} + C_t^2 \delta^2 f_i + C_{t+1}^3 \delta^3 f_{i+1/2} + C_{t+1}^4 \delta^4 f_i + \ldots + C_{t+A_n}^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi);$$

Гаусс, II:

$$f(x) = f_i + C_t^1 \delta f_{i-1/2} + C_{t+1}^2 \delta^2 f_i + C_{t+1}^3 \delta^3 f_{i-1/2} + C_{t+2}^4 \delta^4 f_i + \ldots + C_{t+B_n}^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

$A_n = B_n = n/2$, если n четно; $A_n = (n-1)/2$ и $B_n = (n+1)/2$, если n нечетно.

Бессель: $\left(\mu\delta^k f_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\delta^k f_i + \delta^k f_{i+1})\right)$, $x = x_i + th$, $n = 2r + 1$,

$$f(x) = f_i + \delta f_{i+1/2} + C_t^2 \left(\mu\delta^2 f_{i+1/2} + \frac{t - (1/2)}{3} \delta^3 f_{i+1/2}\right) + C_{t+1}^4 \left(\mu\delta^4 f_{i+1/2} + \frac{t - (1/2)}{5} \delta^5 f_{i+1/2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + C_{t+r-1}^{2r} \left(\mu\delta^{2r} f_{i+1/2} + \frac{t - (1/2)}{2r+1} \delta^{2r+1} f_{i+1/2}\right) + C_{t+r}^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Эверетт: $(n = 2r + 1,\ s = 1 - t)$, $x = x_i + th$,

$$f(s) = sf_i + C_{s+1}^3 \delta^2 f_i + C_{s+2}^5 \delta^4 f_i + \ldots + tf_{i+1} + C_{t+1}^3 \delta^2 f_{i+1} + C_{t+2}^5 \delta^4 f_{i+1} + \ldots + C_{t+r}^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Стирлинг: $\left(\mu\delta^k f_i = \frac{1}{2}(\delta^k f_{i-1/2} + \delta^k f_{i+1/2})\right)$, $x = x_i + th$,

$$f(x) = f_i + C_t^1 \left(\mu\delta f_i + \frac{t}{2} \delta^2 f_i\right) + C_{t+1}^3 \left(\mu\delta^3 f_i + \frac{t}{4} \delta^4 f_i\right) + \ldots + \text{остаточный член}.$$

(Эта формула получается как среднее арифметическое обеих формул Гаусса. Так же определяют остаточный член!)

Так как $s(x)$ на каждом частичном сегменте есть многочлен степени не выше третьей, то для $x \in [x_{j-1}, x_j]$

$$s''(x) = -s_{j-1}^2 \frac{x - x_j}{h_j} + s_j^2 \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

и, следовательно,

$$s(x) = -s_{j-1}^2 \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + s_j^2 \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + c_{j1} x + c_{j0}.$$

Здесь s_j^2, c_{j1}, c_{j0} неизвестны для $j = 1, 2, \ldots, n$. Последние исключаются в силу требования $s(x_j) = y_j$:

$$s(x) = -s_{j-1}^2 \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + s_j^2 \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(\frac{y_j}{h_j} - \frac{s_j^2 h_j}{6}\right)(x - x_{j-1}) - \left(\frac{y_{j-1}}{h_j} - \frac{s_{j-1}^2 h_j}{6}\right)(x - x_j). \quad (7.1)$$

Дифференцируя эту функцию и учитывая, что $s'(x)$ на всем отрезке и, в частности, в узлах должна быть непрерывна, окончательно получаем систему уравнений

$$s_{j-1}^2 \frac{h_j}{6} + s_j^2 \frac{h_j + h_{j+1}}{3} + s_{j+1}^2 \frac{h_{j+1}}{6} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (7.2)$$

относительно $n + 1$ неизвестных $s_0^2, s_1^2, \ldots, s_n^2$.

Для однозначного их определения в зависимости от решаемой задачи добавляются еще два уравнения.

Нормальный случай (N):

$$s_0^1 = y_0^1 = f'(x_0), \qquad s_n^1 = y_n^1 = f'(x_n).$$

Периодический случай (P) (т. е. $f(x + (x_n - x_0)) = f(x)$):

$$s_0^2 = s_n^2, \quad s_1^2 = s_{n+1}^2.$$

Заданное сглаживание на границах (R):

$$s_0^2 = \lambda s_1^2, \quad \mu s_{n-1}^2 = s_n^2.$$

Система уравнений (7.2) в названных случаях видоизменяется следующим образом.

Случай (N). Добавляются два уравнения:

$$s_0^2 \frac{h_1}{3} + s_1^2 \frac{h_1}{6} = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0',$$

$$s_{n-1}^2 \frac{h_n}{6} + s_n^2 \frac{h_n}{3} = -\frac{y_1 - y_{n-1}}{h_n} + y_n'.$$

Случай (P). Первое уравнение заменяется на

$$s_1^2 \frac{h_1 + h_2}{3} + s_2^2 \frac{h_2}{6} + s_n^2 \frac{h_1}{6} = \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1}$$

и добавляется новое уравнение:

$$s_1^2 \frac{h_1}{6} + s_{n-1}^2 \frac{h_n}{6} + s_n^2 \frac{h_n + h_1}{3} = \frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}.$$

Случай (R). Первое и последнее уравнения заменяются соответственно на

$$s_1^2\,\frac{(1+\lambda/2)\,h_1+h_2}{3}+s_2^2\,\frac{h_2}{6}=\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_0}{h_1},$$

$$s_{n-2}^2\,\frac{h_{n-1}}{6}+s_{n-1}^2\,\frac{h_{n-1}+(1+\mu/2)\,h_n}{3}=$$
$$=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}}.$$

Таким образом, система содержит только $n-1$ неизвестных: $s_1^2, \ldots, s_{n-1}^2$.

Пример 12. *Сплайн-интерполяция функции $f(x)=\sin x$, $n=4$.*

Речь идет о периодическом случае; мы используем (7.2) и случай (P).

j	x_j	y_j	h_j	$y_j - y_j - 1$
0	0	0		
			$\pi/2$	1
1	$\pi/2$	1		
			$\pi/2$	-1
2	π	0		
			$\pi/2$	-1
3	$3\pi/2$	-1		
			$\pi/2$	1
4	2π	0		

(P): $\quad s_1^2\,\pi/3+s_2^2\,\pi/12+s_4^2\,\pi/12=-4/\pi,$

$$(7.2):\ \begin{cases} s_1^2\,\pi/12+s_2^2\,\pi/3+s_3^2\,\pi/12=0,\\ s_2^2\,\pi/12+s_3^2\,\pi/3+s_4^2\,\pi/12=4/\pi,\end{cases}$$

(P): $\quad s_1^2\,\pi/12+s_3^2\,\pi/12+s_4^2\,\pi/3=0.$

Матрица системы симметрична. Легко получить, что

$$s_1^2=-12/\pi^2,\quad s_2^2=0,\quad s_3^2=12/\pi^2,\quad s_4^2=s_0^2=0.$$

Из формул (7.1) получается сплайн-функция

$$s(x)=\begin{cases}(-4/\pi^3)\,x^3+(3/\pi)\,x, & 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ (4/\pi^3)(x-\pi)^3-(3/\pi)(x-\pi), & \pi/2\leqslant x\leqslant\pi,\\ (4/\pi^3)(x-\pi)^3-(3/\pi)(x-\pi), & \pi\leqslant x\leqslant 3\pi/2,\\ (-4/\pi^3)(x-2\pi)^3+(3/\pi)(x-2\pi), & 3\pi/2\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Важно, что наряду с до сих пор известными свойствами интерполирующая сплайн-функция имеет еще два экстремальных свойства:

1) Среди всех интерполирующих, дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $\varphi(x)$ только интерполирующая сплайн-функция степени 3 доставляет функционалу $J(\varphi)=\int\limits_{x_0}^{x_n}(\varphi''(x))^2\,dx$ минимум, т. е.

$$\int\limits_a^b(s''(x))^2\,dx\leqslant\int\limits_a^b(\varphi''(x))^2\,dx$$

для всех функций $\varphi(x)$ таких, что $\varphi(x_j)=y_j$.

2) Для всех $S(x)\in S_3(K_n)$ и дважды непрерывно дифференцируемых функций f таких, что $f(x_j)=y_j$, справедливо соотношение

$$\int\limits_a^b(f(x)-s(x))^2\,dx\leqslant\int\limits_a^b(f(x)-S(x))^2\,dx,$$

причем равенство возможно *только* для интерполирующей сплайн-функции:

$$S(x)=s(x).$$

Свойство 1), по существу, означает, что кривизна интерполирующей кривой является минимальной — свойство, которое приближенно реализуется упругой линейкой (английское «spline»), закрепленной в узлах интерполяции. Такова механическая интерпретация сплайн-интерполяции.

7.1.2.7. Приближенное вычисление интегралов. Под этой задачей понимают (приближенное) вычисление значения определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при условии, что известны отдельные значения подынтегральной функции и некоторые ее общие свойства. Будем далее предполагать, что $f(x)$ — (кусочно) непрерывная функция.

Формулы среднего значения. По теореме о среднем значении интегрального исчисления (см. 3.1.7.2) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(\xi),\qquad a\leqslant\xi\leqslant b,\qquad m\leqslant f(\xi)\leqslant M,$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

На этой теореме базируется следующий общий принцип. Пусть на $[a, b]$ заданы $n+1$ узловых точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, в которых известны значения подынтегральной функции $y_k=f(x_k)$ ($k=0, 1, \ldots, n$). Если $M(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ есть какое-нибудь из средних значений, образованное из $y_0, y_1, \ldots, y_n$: $\min\limits_{k=0,\ldots,n} y_k\leqslant M(y_0,\ldots,y_n)\leqslant\max\limits_{k=0,\ldots,n} y_k$, то, полагая $f(\xi)\approx M(y_0, \ldots, y_n)$, получаем *формулу среднего значения*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,M(y_0, y_1, \ldots, y_n)+R_n[f]=$$
$$=J_n[f]+R_n[f],$$

где $R_n[f]$ — погрешность интегрирования.

Для практических целей целесообразно наложить некоторые дополнительные требования:

а) Функция $M(y_0,\ldots,y_n)$ должна быть линейной:

$$M(\alpha y_0+\beta z_0,\ \alpha y_1+\beta z_1,\ \ldots,\ \alpha y_n+\beta z_n)=$$
$$=\alpha M(y_0, y_1, \ldots, y_n)+\beta M(z_0, z_1, \ldots, z_n).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=$$
$$=\alpha J_n[f]+\beta J_n[g]+\alpha R_n[f]+\beta R_n[g]=$$
$$=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

б) Для надлежаще выбранного семейства функций $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ должны выполняться равенства $R_n[h_k]=0$, $k\leqslant n$, т. е. для этих функций формула среднего значения должна быть точной.

Оба требования могут быть одновременно выполнены, если использовать *взвешенное среднее арифметическое*:

$$M(y_0, y_1, \ldots, y_n)=\left(\sum_{i=0}^n p_i\right)^{-1}\sum_{i=0}^n p_iy_i,\quad p_i>0.$$

Таблица 7.9

n	P_n	p_{0n}	p_{1n}	p_{2n}	p_{3n}	p_{4n}	p_{5n}	p_{6n}	p_{7n}	R_n^*
1	2	1	1							$-\frac{h^3}{12}f^{(4)}(\xi)$
2	6	1	4	1						$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$
3	8	1	3	3	1					$-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$
4	90	7	32	12	32	7				$-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$
5	288	19	75	50	50	75	19			$-\frac{275h^7}{12096}f^{(6)}(\xi)$
6	840	41	216	27	272	27	216	41		$-\frac{9h^9}{1400}f^{(8)}(\xi)$
7	17280	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751	$-\frac{8183h^9}{518400}f^{(8)}(\xi)$

Названия: $n = 1$, формула трапеции,
$n = 2$, формула парабол (Симпсона), $x_0 < \xi < x_n$,
$n = 3$, формула Ньютона.

Согласно этому определению, в формуле остается еще свобода выбора, а именно: *число опорных точек, расположение опорных точек, выбор весов.* Погрешность интегрирования $R_n[f]$ существенно зависит от этого выбора.

Целое семейство формул среднего значения возникает при интегрировании вместо $f(x)$ интерполяционного многочлена Лагранжа $I_n(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b L_i(x)\,dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)\,dx.$$

При равноотстоящих узловых точках получаются формулы, называемые *формулами Ньютона – Котеса* (табл. 7.9):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{nh}{P_n}\sum_{j=0}^{n} f(a+jh)\,p_{jn} + R_n[f],$$

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} p_{jn}, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0,\ b = x_n.$$

Замечания. 1) Выигрыш точности, достигаемый при повышении порядка, частично уменьшается вследствие одновременного увеличения погрешности метода, так что для больших промежутков обычно выбирают $n \leqslant 7$. Чаще интегрирование осуществляется по формулам невысокого порядка для частичных отрезков. В качестве примера приведем *формулу Симпсона*:

$$x_j = a + jh,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2N,\ h = (b-a)/(2N),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{2N-1} + y_{2N}) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),\quad a < \xi < b.$$

2) Формулы для $n = 2k$ и $n = 2k+1$ имеют погрешности одного порядка. Поэтому при заданном числе точек эти формулы часто бывает удобным комбинировать.

Пример 13. Вычисление $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ (табл. 7.10).

Формулы Ньютона – Котеса характеризуются тем, что они точно интегрируют многочлен степени n. Можно показать, что этим требованием веса́ p_{jn} определяются однозначно.

Вообще формулы интегрирования, для которых $R_n[x^m] = 0$ для $0 \leqslant m \leqslant n$ и $R_n[x^{n+1}] \neq 0$, называются *формулами порядка n.*

Таблица 7.10

i	x_i	$y_i = \frac{1}{x_i}$	p_i	$\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} p_i y_i$	p_i	$\frac{4}{3}\sum p_i y_i$	p_i	$\frac{3}{8}h\sum p_i y_i$
0	1,0	1,000000	1					
1	1,1	0,909091	4		−1	0,095311	1	
2	1,2	0,833333	1 1	0,182321	−4		3	
3	1,3	0,769231	4		1 −1		3	
4	1,4	0,714286	1 1	0,336471	4		1	0,262363
5	1,5	0,666667	4		1 1	0,405462		
6	1,6	0,625000	1 1	0,470002	4			
7	1,7	0,588235	4		1 1	0,530624		
8	1,8	0,555556	1 1	0,587781	4			
9	1,9	0,526316	4		1	0,641847		
10	2,0	0,500000	1	0,693138				

Если узловые точки или, может быть, их число не заданы с самого начала, то можно попытаться определить веса и узловые точки таким образом, чтобы получалась формула как можно большего порядка. Это приводит к так называемой *квадратуре Гаусса.*

Квадратура Гаусса. Если $w(x)$ – положительная весовая функция, то всегда можно определить коэффициенты A_{in} и узловые точки x_{in} ($i = 1, 2, \ldots, n$) так, чтобы

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in}) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b (\pi_n(x))^2 \cdot w(x)\,dx,$$

$$\pi_n(x) = (x - x_{1n})(x - x_{2n})\ldots(x - x_{nn}),$$

$$a \leqslant x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn} \leqslant b, \qquad a < \xi < b.$$

Формула имеет порядок, равный $2n - 1$:

а) Узловые точки x_{in} являются корнями многочлена степени n из семейства $\{P_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ многочленов, получаемых ортогонализацией семейства $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ относительно $w(x)$ (см. 7.1.2.5.1):

$$\int_a^b P_i(x)\,P_j(x)\,w(x)\,dx = 0 \text{ при } i \neq j.$$

б) Веса A_{in} вычисляются интегрированием соответствующих многочленов Лагранжа:

$$A_{in} = \int_a^b L_{in}(x)\,w(x)\,dx.$$

Особые случаи (не ограничивая общности, полагаем $a = -1$, $b = 1$).

Формула Гаусса – Лежандра (табл. 7.11): $w(x) = 1$, $P_m(x)$ – *многочлены Лежандра* (см.

Таблица 7.11

n	i	x_{in}	A_{in}
1	1	0	2
2	1 2	0,5773503 −0,5773503	1 1
3	1 2 3	0,7745967 0 −0,7745967	0,5555556 0,8888889 0,5555556
4	1 2 3 4	0,8611363 0,3399810 −0,3399810 −0,8611363	0,3478548 0,6521452 0,6521452 0,3478548
5	1 2 3 4 5	0,9061798 0,5384693 0 −0,5384693 −0,9061798	0,2369269 0,4786287 0,5688889 0,4786287 0,2369269
6	1 2 3 4 5 6	0,9324700 0,6612094 0,2386192 −0,2386192 −0,6612094 −0,9324700	0,1713245 0,3607616 0,4679139 0,4679139 0,3607616 0,1713245

7.1.2.5.1, а также 3.3.1.3.4):

$$A_{in} = \frac{2(1-x_{in}^2)}{n^2 (P_{n-1}(x_{in}))^2},$$

$$\int_{-1}^{1} (\pi_n(x))^2\,dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2}.$$

Пример 14. Квадратура Гаусса – Лежандра:

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt, \qquad n = 2.$$

Преобразуем промежуток интегрирования к отрезку $[-1, 1]$:

$$t = \frac{\pi}{4}(x+1), \quad dt = \frac{\pi}{4}dx, \quad J = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\left[\frac{\pi}{4}(x+1)\right]dx,$$

$$x_{12} = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x_{22} = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad A_{12} = \frac{2(1-1/3)}{4\cdot 1/3} = A_{22} = 1,$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right] = 0{,}32589, \quad \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right] = 0{,}94541,$$

$$J = \frac{\pi}{4}(0{,}32589 + 0{,}94541) + \frac{2^5\cdot 2^4\cdot \pi^5}{5\cdot 24^3\cdot 4^5}\sin\left[\frac{\pi}{4}(\zeta+1)\right] =$$

$$= 0{,}99848 + \frac{\pi^5}{4^5\cdot 3^5\cdot 5}\sin\tau, \qquad 0 < \tau < \frac{\pi}{2}.$$

Фактическая ошибка составляет $-0{,}00152$. Это хороший результат для формулы с двумя узловыми точками, что подчеркивает значение таких методов интегрирования.

Формула Гаусса – Чебышева: $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $P_m(x)$ – многочлен Чебышева $T_m(x)$ (см. 7.1.2.5.1),

$A_{in} = \pi/n$ для всех i; $x_{in} = \cos((2i-1)\pi/(2n))$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\pi_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\pi}{2^{2n}}.$$

Пример 15. $\int_{-1}^{1} (x^4/\sqrt{1-x^2})\,dx.$

Если выбрать $n = 3$, то $2n - 1 = 5$ и результат должен быть точен:

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x,$$

$$x_{13} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad x_{23} = 0, \quad x_{33} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{3}\left(0 + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}\right) = \frac{3}{8}\pi$$

(известный точный результат!).

Квадратуру Гаусса целесообразно применять тогда, когда функция аналитична или достаточно плотно табулирована. В других случаях можно взять не такие точные, но более простые формулы Ньютона – Котеса.

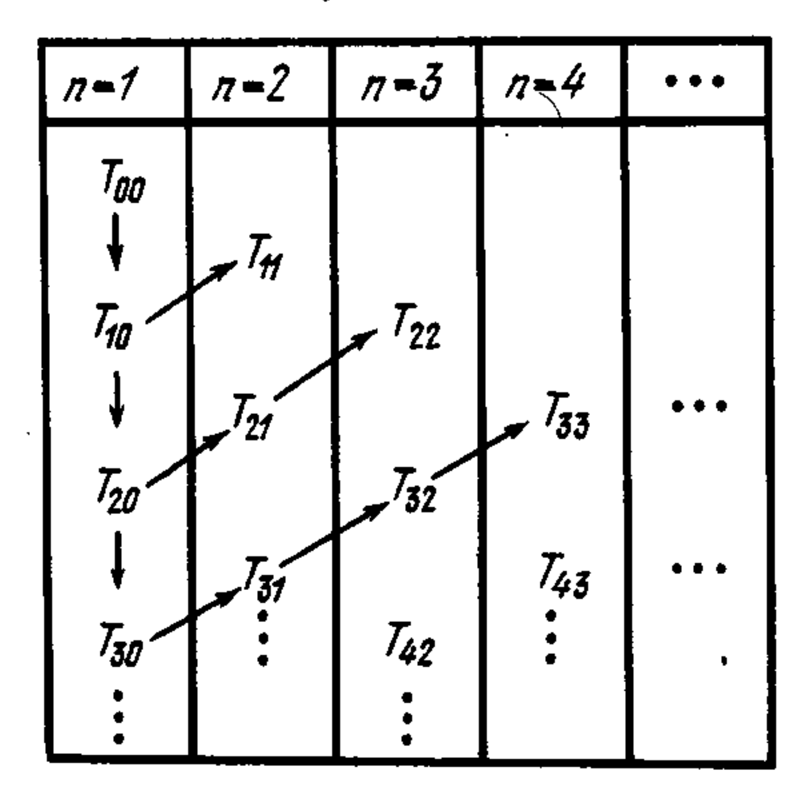
Метод экстраполяции. Линейность формул среднего значения делает возможным получение улучшенных значений интеграла при помощи линейных комбинаций.

Пусть $\int_0^l f(x)\,dx = J_0^l[f] + R_0^l[f]$ – линейная формула интегрирования порядка $(n-1)$, т. е. $R_0^l[x^k] = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, но $R_0^l[x^n] \neq 0$. Тогда

$$\int_0^l f(x)\,dx = pJ_0^l[f] + q(J_0^{l/2}[f] + J_{l/2}^l[f]) + \hat{R}[f],$$

где $p = -1/(2^n - 1)$ и $q = 2^n/(2^n-1)$, является формулой порядка n (т. е. $\hat{R}[x^n] = 0$). Идея доказательства для многих методов экстраполяции так важна, что ее имеет смысл привести. Пусть, например, $R_0^l[x^n] = cl^{n+1}$, где c – постоянная, не зависящая от длины l промежутка интегрирования. Тогда, очевидно, $\hat{R}[x^n] = pcl^{n+1} + q2c(l/2)^{n+1} = cl^{n+1}(p + q/2^n)$. Но при указанном выборе p и q выражение в скобках равно нулю.

При практическом использовании обычно не пользуются формулами, а оперируют с числовыми значениями по следующей схеме:



Простейший случай получаем при $n = 1$ из формулы трапеций:

$$T_{i0} = \frac{h_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{i} 2f(a + jh_i) + f(a) + f(b)\right),$$

$$h_i = \frac{b-a}{2^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Имеем

$$T_{00} = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)),$$

$$T_{10} = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + f(b)\right)$$

и т. д. Справедлива формула

$$T_{ik} = \frac{2^{2k}T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{2^{2k}-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

согласно которой мы можем по мере надобности вычислять значения T_{ik}, $k > 0$, в последовательности, указанной в схеме стрелками.

Можно показать, что и столбцы, и косые строки сходятся к значению интеграла. Схему можно легко программировать. Так как при этом методе погрешности также нарастают с увеличением порядка величины, то продвигаются самое большее до $k = 7$, давая i возможность возрастать до тех пор, пока «гнездо» равных чисел в схеме не покажет, что в пределах точности вычислений метод привел к получению результата.

Пример 16. $\int\limits_1^2 \frac{e^x dx}{x} \approx 3{,}059116.$

3,2

3,06

3,09 3,0591

3,059 3,05911

3,07 3,05911 3,059116

3,0591 3,059116

3,06 3,059116 «гнездо»

3,05911 3,059116

3,06 3,059117

3,059116

3,059

7.1.2.8. Приближенное дифференцирование. Приближенное определение производных функций должно всегда проводиться с особой осторожностью, так как известно, что дифференцирование в противоположность интегрированию сопровождается «разбалтыванием».

Пример 17. Функция $f(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon^2)$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, но $-1/\varepsilon \leqslant f'(x) \leqslant 1/\varepsilon$. Если выбрать ε очень маленьким, то у мало изменяющейся

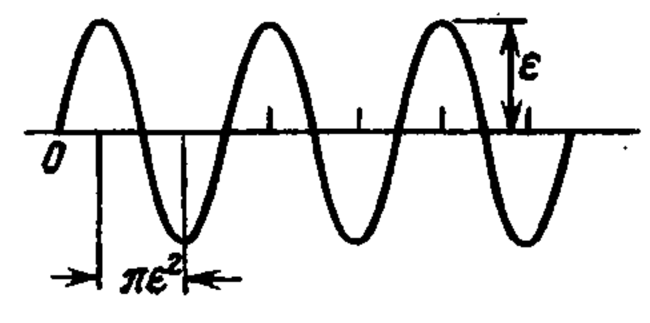


Рис. 7.2

функции $f(x)$ производная будет принимать очень большие значения (рис. 7.2).

Численное дифференцирование. Мы исходим из того, что функция $f(x)$ задана конечной последовательностью пар значений (x_i, f_i), и ищем приближенные значения f'_i, f''_i, f'''_i, ... величин $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, $f'''(x_i)$, ...

Если значения функции в точках сетки x_i считаются точными в пределах точности вычисления, то дифференцируют интерполяционные формулы (см. 7.1.2.6.1). Для выведения соответствующих формул часто пользуются формальным методом операторов (см. 7.1.2.6.1).

Введем оператор $Df_i = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_i}$.

Основная формула: $e^{hD} = E$,

$$hD = \ln E = \ln(I + \Delta) = 2\ln\left(\left(I + \frac{\delta^2}{4}\right)^{1/2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

Пример 18.

$$f''(x_i) = D^2 f_i =$$

$$= \frac{1}{h^2}(\ln(1+\Delta))^2 f_i = \frac{1}{h^2}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \ldots\right)^2 f_i =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \ldots\right) f_i.$$

В качестве формулы численного дифференцирования мы применяем конечную частичную сумму этого разложения:

$$f''_i = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{11}{12}\Delta^4 f_i\right).$$

Если значения функции заданы как результаты измерений и требуется исследование поведения производных, то необходимо численное сглаживание с последующим дифференцированием (см. 7.1.5).

Таблица 7.12

Некоторые важные формулы дифференцирования

Формула ($y_i = y(jh)$, $y'_j = y'(jh)$...)	Оценка погрешности
$y'_0 = \frac{1}{2h}(-y_{-1} + y_1)$	$-\frac{1}{6}h^2 y'''_0 - \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{12h}(y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2)$	$+\frac{1}{30}h^4 y_0^{(5)} + \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{h}(-y_0 + y_1)$	$-\frac{1}{2}hy''_0 - \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$	$+\frac{1}{3}h^2 y'''_0 + \ldots$
$y'_0 = \frac{1}{12h}(-3y_{-1} - 10y_0 + 18y_1 - 6y_2 + y_3)$	$-\frac{1}{20}h^4 f_0^{(5)} + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{h^2}(y_{-1} - 2y_0 + y_1)$	$-\frac{1}{12}h^2 y_0^{(4)} + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{12h^2}(-y_{-2} + 16y_{-1} - 30y_0 + 16y_1 - y_2)$	$+\frac{1}{90}h^4 y_0^{(6)} + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$	$+\frac{11}{12}h^2 y_0^{(4)} + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{12h^2}(11y_{-1} - 20y_0 + 6y_1 + 4y_2 - y_3)$	$+\frac{1}{12}h^3 y_0^{(5)} + \ldots$
$y''_0 = \frac{1}{180h^2}(-13y_{-2} + 228y_{-1} - 420y_0 + 200y_1 + 15y_2 - 12y_3 + 2y_4)$	$-\frac{1}{90}h^5 y_0^{(7)} + \ldots$
$y'''_0 = \frac{1}{2h^3}(-y_{-2} + 2y_{-1} - 2y_1 + y_2)$	$-\frac{1}{4}h^2 y_0^{(5)} + \ldots$
$y'''_0 = \frac{1}{2h^3}(-3y_{-1} + 10y_0 - 12y_1 + 6y_2 - y_3)$	$+\frac{1}{4}h^2 y_0^{(5)} + \ldots$

7.1.2.9. Дифференциальные уравнения.

7.1.2.9.1. Задача решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Имеется большое число частных случаев дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать в конечном виде; однако большинство задач с дифференциальными уравнениями может быть решено только численно. Простейшим методом является метод *ломаной Эйлера*, легко реализуемый графически.

Пример 19. $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = s$.

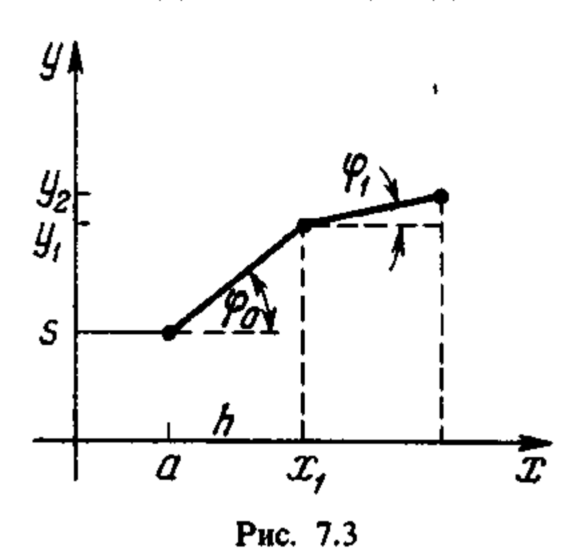


Рис. 7.3

Схема вычислений (рис. 7.3): $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$,

$y'(a) = f(a, s) = \operatorname{tg}\varphi_0$,

$y_1 = s + hy'(a) = s + hf(x_0, y(x_0))$,

$y'_1 = f(x_1, y_1) = \operatorname{tg}\varphi_1$,

$y_2 = y_1 + hy'_1 = y_1 + hf(x_1, y_1)$,

. . . .

$y'_i = f(x_i, y_i) = \operatorname{tg}\varphi_i$,

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Пример 20. $y' = xy^{1/3}$, $y(1) = 1$. Точное решение: $y(x) = ((x^2+2)/3)^{3/2}$. Результаты по методу Эйлера (см. табл. 7.13).

Таблица 7.13

Результаты вычислений по методу Эйлера

x_i	$h = 0{,}10$	$h = 0{,}01$	Точно
1	1,00	1,00	1,00
2	2,72	2,82	2,83
3	6,71	6,99	7,02
4	14,08	14,63	14,70
5	25,96	26,89	27,00

Общие понятия. *Локальной погрешностью обрыва* называется погрешность, которую делают при переходе от x_j к x_{j+1}, если заменяют дифференциальное уравнение конечным выражением.

Для точного решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$ в узлах x_j справедлива формула

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) + \frac{1}{2}y''(\xi_j)h^2, \quad x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}.$$

Конечное приближение по методу Эйлера имеет вид $y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j)$, так что $E_j = \frac{1}{2}h^2y''(\xi_j)$ является локальной погрешностью обрыва. *Погрешностью обрыва* называется погрешность $y(x_j) - y_j$, возникающая при сложении (аккумуляции) локальных погрешностей обрыва при некотором фиксированном j. (В смысле 7.1.1 она является погрешностью метода $\delta_M(x_j)$.) *Погрешностью округления* называется доля погрешности, возникающая при фактическом проведении вычислений, а также вызванная этими округлениями нарастающая неустранимая погрешность.

Одношаговые методы. Если в формуле ломаной Эйлера заменить $f(x_j, y_j)$ на более общее выражение $\hat{f}(x_j, y_j)$, то возникает общая формула одношагового метода:

$$y_{j+1} = y_j + h\hat{f}(x_j, y_j), \quad y_0 = s \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Вместо дифференциального уравнения решается нелинейное *разностное уравнение*.

Таблица 7.14

Формулы типа Рунге — Кутта

Порядок ошибки обрыва	Формула	Вспомогательные величины	Название
h^3	$\hat{f} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$	Улучшенная ломаная
	$\hat{f} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$	k_1 — как указано выше	
h^4	$\hat{f} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$	k_1 — как указано выше, $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3 = f(x_i + h, y_i + 2hk_2 - hk_1)$	Формулы Хойне
	$\hat{f} = \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3$	k_1 — как указано выше, $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3}k_2\right)$	
h^5	$\hat{f} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	k_1 — как указано выше, $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$, $k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$	Формула Рунге — Кутта

Важнейшими одношаговыми методами являются

Методы типа Рунге – Кутта. Здесь $\hat{f}(x_j, y_j)$ строится как весовое среднее значений функции $f(x, y)$ в определенным образом выбираемых точках $(x, y) = (\xi_k, \eta_k)$ так, что локальная погрешность обрыва имеет порядок выше h.

Знание порядка локальной погрешности не имеет практического значения для прямой оценки фактической погрешности обрыва или округления. Общие оценки погрешностей другого типа являются большей частью также слишком грубыми. Поэтому для оценки погрешностей, для управления ходом вычислений или в данном случае для управления *величиной шага* (под этим понимают зачастую очень выгодное изменение величины шага h в зависимости от достигнутой точности) в настоящее время широко применяют **принцип Рунге.** Пусть погрешность метода имеет порядок k. Приближенное значение $y(x)$, вычисленное в точке x с величиной шага h, обозначим через $Y(x, h)$. Тогда в точке $x = x_0 + 2nh$ имеем (по определению порядка погрешности метода)

$$y(x) - Y(x, h) \approx A2nh^{k+1} = A(x - x_0)h^k,$$

$$y(x) - Y(x, 2h) \approx An(2h)^{k+1} = A(x - x_0)2^k h^k,$$

т. е.

$$Y(x, 2h) - Y(x, h) \approx A(x - x_0)(1 - 2^k)h^k,$$

и, следовательно,

$$y(x) - Y(x, h) \approx \frac{Y(x, h) - Y(x, 2h)}{2^k - 1}.$$

Тем самым погрешность при шаге h выражается через приближенные значения при шагах h и $2h$.

Одношаговые методы используют для вычисления последующего значения y_{j+1} только информацию из полуинтервала $[y_j, y_{j+1})$ и поэтому всегда применяются в том случае, если вычисляются первые значения (начальная процедура) или если о свойствах непрерывности решения известно мало. Если кривые решения являются достаточно гладкими и известны некоторые начальные значения, то точность аппроксимации решения может быть увеличена благодаря учету $k > 1$ *предшествующих значений.*

Многошаговые методы основываются на замене дифференциального уравнения

$$y'(x) - f(x, y(x)) = 0, \quad y(a) = s$$

при постоянном шаге h *разностным уравнением k-го порядка*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j^{(k)} y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} b_j^{(k)} f(x_{n+j}, y_{n+j}) = 0,$$

$$a_k^{(k)} \neq 0, \ (a_0^{(k)})^2 + (b_0^{(k)})^2 \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

величины $y_0 = s, y_1, \ldots, y_{k-1}$ являются заданными значениями (требуется начальная процедура!).

Каждый способ этого вида однозначно определяется двумя многочленами:

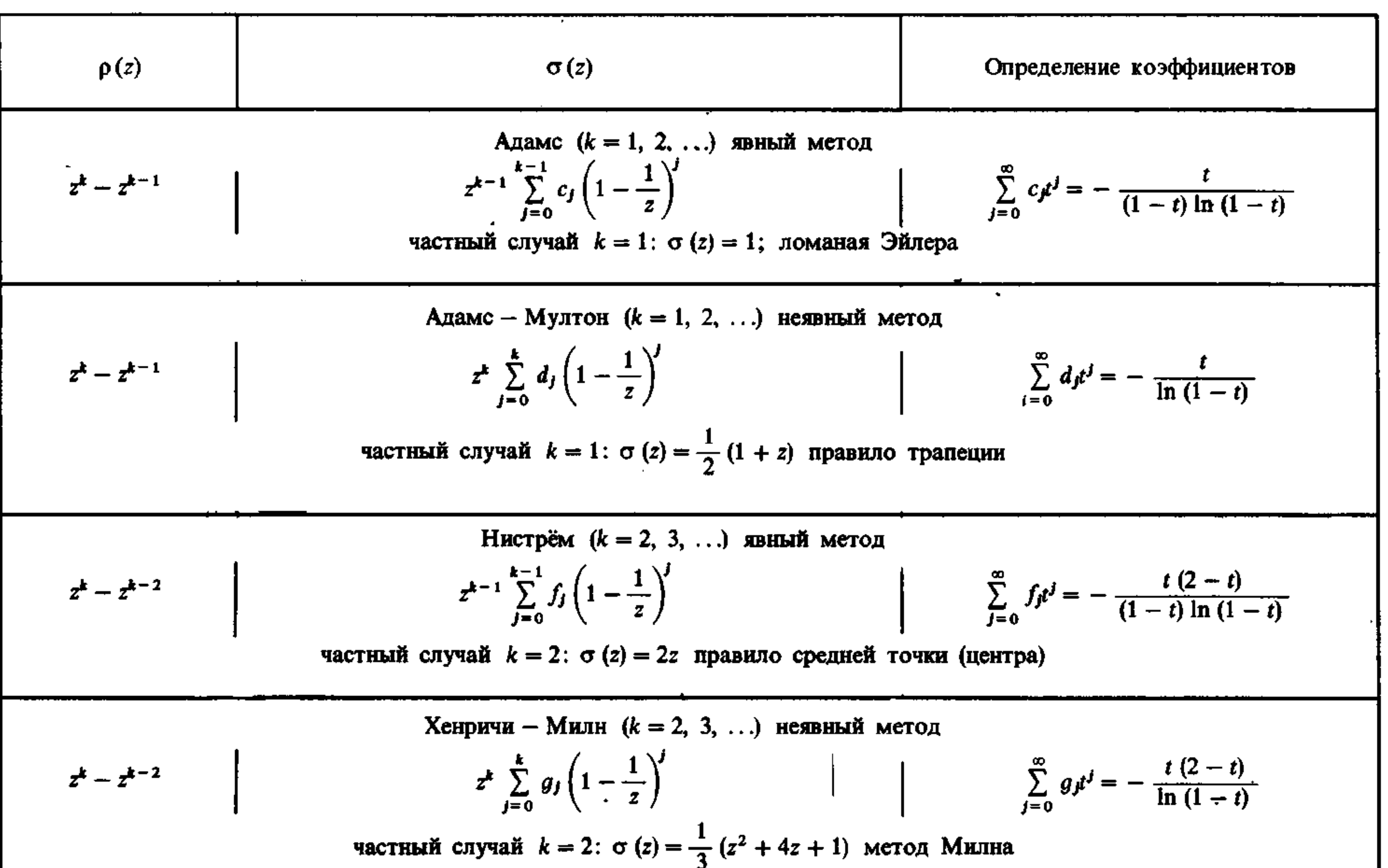
$$\rho_k(z) = a_k^{(k)} z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \ldots + a_0^{(k)},$$

$$\sigma_k(z) = b_k^{(k)} z^k + b_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \ldots + b_0^{(k)},$$

и поэтому говорят о (ρ, σ)-*методе* (см. табл. 7.15). Если степень многочлена σ_k меньше степени многочлена ρ_k, то говорят о *явном* (или *открытом*) методе, а если степени равны, то говорят о *неявном* (*закрытом*) методе.

Таблица 7.15

Важнейшие (ρ, σ)-*методы*



$\rho(z)$	$\sigma(z)$	Определение коэффициентов
	Адамс ($k = 1, 2, \ldots$) явный метод	
$z^k - z^{k-1}$	$z^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} c_j \left(1 - \frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j = -\frac{t}{(1-t)\ln(1-t)}$
	частный случай $k = 1$: $\sigma(z) = 1$; ломаная Эйлера	
	Адамс – Мултон ($k = 1, 2, \ldots$) неявный метод	
$z^k - z^{k-1}$	$z^k \sum_{j=0}^{k} d_j \left(1 - \frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{i=0}^{\infty} d_j t^j = -\frac{t}{\ln(1-t)}$
	частный случай $k = 1$: $\sigma(z) = \frac{1}{2}(1 + z)$ правило трапеции	
	Нистрём ($k = 2, 3, \ldots$) явный метод	
$z^k - z^{k-2}$	$z^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} f_j \left(1 - \frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j = -\frac{t(2-t)}{(1-t)\ln(1-t)}$
	частный случай $k = 2$: $\sigma(z) = 2z$ правило средней точки (центра)	
	Хенричи – Милн ($k = 2, 3, \ldots$) неявный метод	
$z^k - z^{k-2}$	$z^k \sum_{j=0}^{k} g_j \left(1 - \frac{1}{z}\right)^j$	$\sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j = -\frac{t(2-t)}{\ln(1-t)}$
	частный случай $k = 2$: $\sigma(z) = \frac{1}{3}(z^2 + 4z + 1)$ метод Милна	

Замечание. Формулы часто записываются при помощи разностей. Пересчет легко осуществляется по операторным формулам (ср. 7.1.2.6.1):

$$y_{n+j} = E^j y_n, \quad E^j = \sum_{i=0}^{j} C_j^r \Delta^r, \quad \Delta^r = \Delta(\Delta^{r-1}).$$

При помощи явных формул $(n+k)$-е значение вычисляется непосредственно по k предшествующим значениям $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, \ldots, y_n$.

Неявные формулы содержат подлежащее вычислению значение y_{n+k} как в линейной, так и в нелинейной частях формулы, т. е.

$$a_k^{(k)} y_{n+k} = F(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n; h).$$

Часто y_{n+k} находят при помощи итерационного процесса:

$$y_{n+k} = \lim_{j\to\infty} y_{n+k}^{(j)},$$

$$y_{n+k}^{(j)} = \frac{1}{a_k^{(k)}} F(y_{n+k}^{(j-1)}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n; h), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$y_{n+k}^{(0)}$ задаются как начальные приближения.

Две формулы с одинаковым порядком ошибки можно связать в так называемый *метод предсказания – уточнения*, который действует по следующей схеме: по *явной формуле «предсказания»* вычисляется приближение и подставляется в правую сторону неявной формулы «*уточнения*», которая дает улучшенное значение.

Пример 21. *Адамс* ($k = 4$):

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + \frac{h}{24}(55f(x_{n+k-1}, y_{n+k-1}) - 59f(x_{n+k-2}, y_{n+k-2}) + 37f(x_{n+k-3}, y_{n+k-3}) - 9f(x_{n+k-4}, y_{n+k-4})).$$

Адамс – Мултон ($k = 3$):

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + \frac{h}{24}(9f(x_{n+k}, y_{n+k}) + 19f(x_{n+k-1}, y_{n+k-1}) - 5f(x_{n+k-2}, y_{n+k-2}) + f(x_{n+k-3}, y_{n+k-3})).$$

Обе формулы имеют одинаковый порядок ошибки.

Сходимость. Приближенный метод называют *сходящимся порядка* $p > 0$, если для всех $x_n \in [a, b]$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p}\left| y_n - y(x_n) \right| = A < \infty.$$

Одношаговый метод является *сходящимся*, если выполнены следующие условия:

а) величина $\hat{f}(x, y, h)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_N$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \leqslant h \leqslant h_0$ как функция трех переменных является непрерывной;

б) $\hat{f}(x, y, 0) = f(x, y)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_N$, $-\infty < y < +\infty$;

в) $|\hat{f}(x, y, h) - \hat{f}(x, z, h)| \leqslant L|y - z|$, $L = \text{const}$, при $x_0 \leqslant x \leqslant x_N$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \leqslant h \leqslant h_0$.

Из этих трех условий наиболее существенными являются условия а) и б), так как в) выполняется для рассмотренных методов большей частью автоматически, когда дифференциальное уравнение имеет однозначное решение.

(ρ, σ)*-метод сходится на* $[a, b]$ *равномерно*

$$(\lim_{h\to 0} \max_{x_n\in[a,b]} |y_n - y(x_n)| = 0)$$

тогда и только тогда, когда

а) *сходится* используемая *начальная процедура*;

б) все корни многочлена $\rho(z)$ лежат в замкнутом единичном круге ($|z| \leqslant 1$), причем корни z_k, $|z_k| = 1$, являются простыми корнями (*корневое условие*);

в) выполнено *условие аппроксимации* $\rho(1) = 0$ и $\rho'(1) = \sigma(1)$.

7.1.2.9.2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. 3.3.1.7). Мы ограничимся линейными краевыми задачами вида

$$L[y] = r(x), \quad R_i[y] = c_i \quad (i = 1, \ldots; n),$$

где

$$L[y] = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^{(i)}(x),$$

$$R_i[y] = \sum_{j=0}^{n} (a_{ij} y^{(j)}(a) + b_{ij} y^{(j)}(b)) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$f_i(x)$, $r(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, $f_n(x) \neq 0$.

Каждое решение можно представить в виде линейной комбинации:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i(x),$$

где функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения $L[y] = 0$ (*фундаментальная система*), а $y_0(x)$ – частное решение неоднородного уравнения $L[y] = r$. Если эти функции заданы, то коэффициенты d_i вычисляются из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} d_i R_i[y_j] = c_i - R_i[y_0] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

на этом основывается часто употребляемый *метод сведения к задаче с начальными значениями*. Путем подходящего задания начальных значений A_{ij} из $L[y_i] = 0$ и $y_j^{(i)}(a) = A_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$; $j = 1, 2, \ldots, n$) определяют фундаментальную систему. Если система краевых (граничных) условий содержит по крайней мере одно *отдельное граничное условие* $R_1[y] = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(a) = c_i$, то y_0 также легко может быть вычислено как решение задачи с начальными значениями.

Пример 22. Сведение к задаче с начальными значениями:

$$L[y] = y'' + (1 + x^2) y, \quad r(x) = -1;$$

граничные условия: $y(-1) = y(1) = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Полагаем $y(x) = y_1(x) + \alpha y_2(x)$, где y_1 удовлетворяет первому граничному условию и неоднородному дифференциальному уравнению:

$$L[y_1] = -1, \; y_1(-1) = 0, \; y_1'(-1) = 0,$$

$$L[y_2] = 0, \; y_2(-1) = 0, \; y_2'(-1) = 1.$$

Так как $y(1) = y_1(1) + \alpha y_2(1) = 0$, то $\alpha = -y_1(1)/y_2(1)$.

Вторым важным классом методов являются *эвристические методы*. Пусть M – множество решений дифференциального уравнения на постоянной основной области G функций, т. е.

$$M = \{y(x) \mid y \in G \text{ и } L[y] = r\},$$

и пусть $N = \{y(x) \mid y \in G \text{ и } R_i[y] = c_i\}$ есть множество решений граничных уравнений; тогда множество решений L краевой задачи есть пересечение этих двух множеств: $L = M \cap N$.

Пусть $M_p \subset M$ – множество функций из M, которое определяется p параметрами $C_1, C_2, \ldots, C_p$:

$$M_p = \{y \mid y \in M,\ y(x) = \Psi(x, C_1, \ldots, C_p)\},$$

и аналогично

$$N_p = \{y \mid y \in N,\ y(x) = \Phi(x, C_1, \ldots, C_p)\};$$

тогда

$$\text{для } y \in N_p \quad L[y] = r + \varepsilon(x, C_1, \ldots, C_p),$$

$$\text{для } y \in M_p \quad R_i[y] = c_i + \delta_i(x, C_1, \ldots, C_p).$$

Если теперь потребовать, чтобы в качестве приближения для решения краевой задачи была бы взята та функция, при которой

1) значение $\varepsilon(x, C_1, \ldots, C_p)$ становится как можно меньше, то речь идет о *методе областей*;

2) значение $\delta_i(x, C_1, \ldots, C_p)$ становится в известном смысле минимальным на M_p, то говорят о *краевом методе*.

Такие методы можно применять для решения как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и дифференциальных уравнений с частными производными. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений почти исключительно применяется метод областей.

Особенно важным является *линейный случай*, когда в качестве параметрического множества N_p берется множество всех линейных комбинаций вида $\Phi(x, C_1, \ldots, C_p) = w_0 + \sum_{j=1}^{p} C_j w_j(x)$. При этом w_0 удовлетворяет неоднородным граничным условиям $R_i[w_0] = c_i$, в то время как линейно независимые $w_j(x)$ удовлетворяют однородным уравнениям $R_i[w_j] = 0$.

Таблица 7.16

Важнейшие методы областей

Название	Требование минимальности $\varepsilon(x;\ C_1, C_2, \ldots, C_p)$
Метод квадратичной ошибки: непрерывный	$\int_a^b \varepsilon^2\,dx \to \min$
дискретный	$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2(x_i) \to \min;\ x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, $n > p$
Метод Галёркина (метод ортогонализации)	$\int_a^b \varepsilon v_j(x)\,dx = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, p$; $[v_j(x)]_1^p$ – линейно независимая система непрерывных функций
Метод частичных областей	$t_1 < t_2 < \ldots < t_{p+1} \in [a, b]$, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(x, C_1, \ldots, C_p)\,dx = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, p$
Метод коллокаций	$t_1 < t_2 < \ldots < t_p \in [a, b]$ (точки коллокации) $\varepsilon(t_i;\ C_1, C_2, \ldots, C_p) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, p$

7.1.2.9.3. Разностные методы решения краевой задачи для уравнения Пуассона (на плоскости). Изложение теории и практического применения разностных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными в рамках этого справочника невозможно. Поэтому задачи и основные идеи рассматриваются на ряде конкретных примеров.

Задача. Пусть Ω есть область на плоскости x, y с границей Γ. Ищется функция $u(x, y)$, которая в Ω удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = g(x, y).$$

Важнейшие краевые задачи:

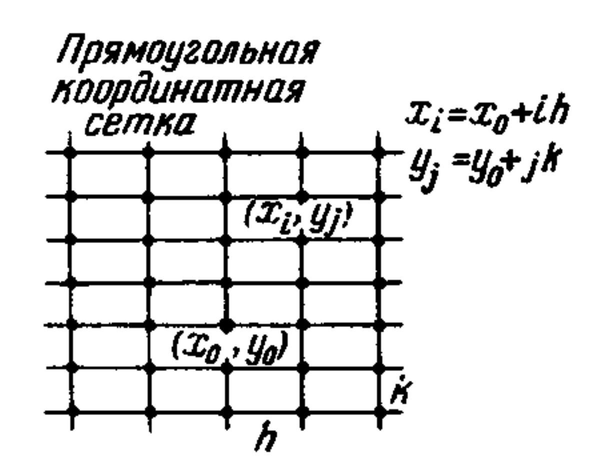
1) $u(x, y)|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi(x, y)$ – 1-я краевая задача, задача Дирихле.

2) $\left.\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = \psi(x, y)$ – 2-я краевая задача, задача Неймана.

3) $au(x, y) + b\,\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \chi(x, y)$ для (x, y) на Γ – 3-я краевая задача.

Разностные методы. Рассматривается не континуум точек плоскости x, y, а счетное множество дискретных точек $P_{ij} = (x_i, y_j)$.

Примеры форм сеток см. на рис. 7.4.



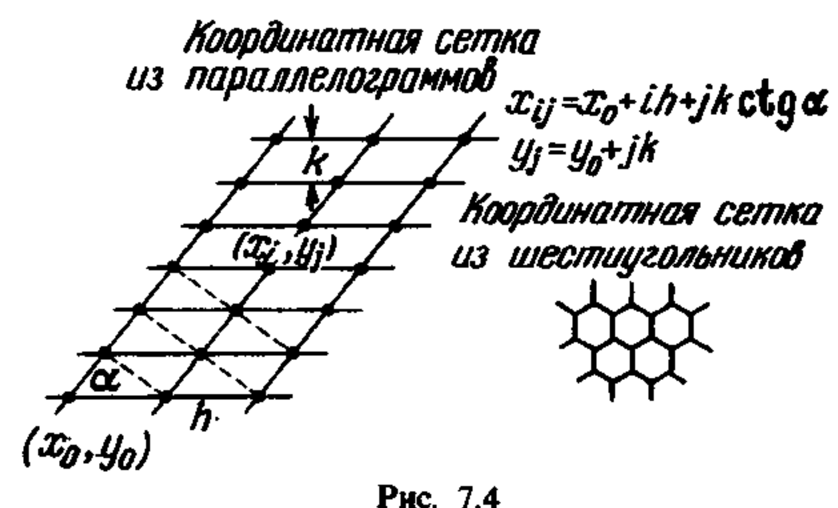


Рис. 7.4

Γ

Γ*

а)

б)

Рис. 7.5

Дискретизация задачи.

1) *Область.* Если область Ω разместить на сетке, то одни точки сетки попадут внутрь области, а другие окажутся снаружи ее. Дискретная «область» Ω^* состоит из точек сетки, лежащих внутри

области Ω; точки сетки, ближайшие к границе и лежащие либо внутри, либо снаружи (это зависит от постановки задачи!), рассматривают как точки дискретной границы Γ^*. В этом случае дискретная область $\bar{\Omega}^* = \Omega^* \bigcup \Gamma^*$ состоит только из точек сетки (рис. 7.5, *а*). Вторая возможность заключается в том, что добавляют точки пересечения Γ с прямыми сетки как нерегулярные граничные точки (рис. 7.5, *б*).

2) *Уравнение.* Производные, встречающиеся в рассматриваемом дифференциальном уравнении, заменяются в каждой точке сетки $P_{ij} = (x_i, y_j)$ на соответствующие *разностные отношения*, причем локальная погрешность обрыва может быть оценена (см. 7.1.2.8). Так, например,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{2h}(-u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2).$$

Такие конечные выражения называют также *молекулами* и пишут их в виде наглядных структурных формул.

Пятиточечные молекулы для оператора Лапласа:

$$\Delta u\Big|_{i,j} = \frac{1}{2h^2}\left[\begin{matrix} & (1) & \\ (1) & (-4) & (1) \\ & (1) & \end{matrix}\right] + O(h^2),$$

$$\Delta u\Big|_{i,j} = \frac{1}{2h^2}\left[\begin{matrix} (1) & & (1) \\ & (-4) & \\ (1) & & (1) \end{matrix}\right] + O(h^2)$$

(квадратная сетка).

3) *Граничные условия.* Если область Ω такова, что для достаточно простой сетки при соответственно выбранном расположении граница Γ состоит только из сеточных прямых, то краевые значения задаются в граничных сеточных точках и вводятся в соответствующие молекулы, если они включают такие точки.

Пример 23. Прямоугольники в прямоугольной или квадратной сетках.

Задача Дирихле. В зависимости от того, содержит ли область Ω^* только *регулярные* или также *нерегулярные* точки сетки (см. выше), заданные граничные данные перерабатываются двумя способами:

а) Определяются краевые значения в регулярных граничных точках путем *интерполяции* из заданных значений на границе Γ. Тогда имеет место представленный выше простой случай (рис. 7.6, *а*).

б) Непосредственно включаются заданные краевые значения в нерегулярных точках и применяются *асимметричные молекулы* вблизи границы (рис. 7.6, *б*).

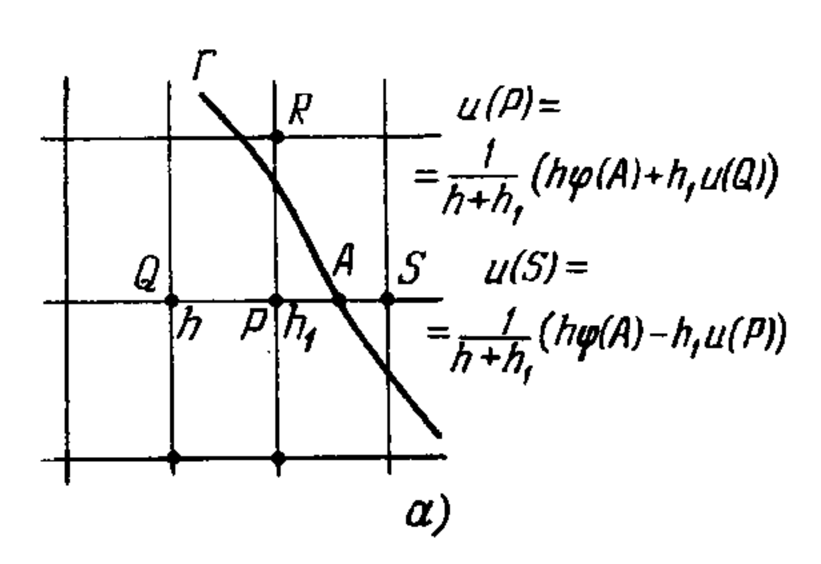
Пример 24. Уравнение Пуассона в прямоугольнике:

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4h;\ 0 \leqslant y \leqslant 3h\}.$$

Сетка: $(x_i, y_j) = (ih, jh)$,

$\Omega^* = \{(ih; jh) \mid 0 \leqslant i \leqslant 4,\ 0 \leqslant j \leqslant 3\}$ — регулярная граница.

$\Delta u(x, y) = f(x, y),\ u|_\Gamma = \varphi$ (1-я краевая задача).



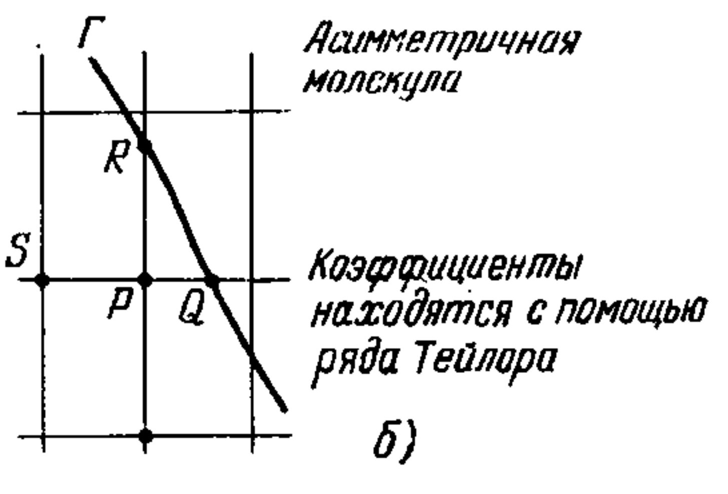


Рис. 7.6

При применении первой из двух указанных молекул для Δ имеем

$$U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{ij} = h^2 f_{ij}$$

как *дискретный аналог уравнения Пуассона.* (Через U_{ij} здесь обозначено приближение для $u(x_i, y_j) = u_{ij}$.)

Если записать все уравнения, для которых «центральный элемент» u_{ij} является *внутренней* точкой (т. е. $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 2$), то получим

$$\underline{U_{01}} + U_{21} + \underline{U_{10}} + U_{12} - 4U_{11} = h^2 f_{11},$$
$$U_{11} + U_{31} + \underline{U_{20}} + U_{22} - 4U_{21} = h^2 f_{21},$$
$$U_{21} + \underline{U_{41}} + \underline{U_{30}} + U_{32} - 4U_{31} = h^2 f_{31},$$
$$\underline{U_{02}} + U_{22} + U_{11} + \underline{U_{13}} - 4U_{12} = h^2 f_{12},$$
$$U_{12} + U_{32} + U_{21} + \underline{U_{23}} - 4U_{22} = h^2 f_{22},$$
$$U_{22} + \underline{U_{42}} + U_{31} + \underline{U_{33}} - 4U_{32} = h^2 f_{32}.$$

Подчеркнутые значения являются заданными краевыми значениями и могут быть перенесены в правую сторону. Тогда в качестве *дискретного аналога поставленной задачи* получается следующая система линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \\ U_{12} \\ U_{22} \\ U_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_{11} - U_{01} - U_{10} \\ h^2 f_{21} - U_{20} \\ h^2 f_{31} - U_{41} - U_{30} \\ h^2 f_{12} - U_{02} - U_{13} \\ h^2 f_{22} - U_{23} \\ h^2 f_{32} - U_{42} - U_{33} \end{bmatrix}$$

Матрица этой системы демонстрирует все характерные признаки матриц, которые возникают при применении разностных методов:

— матрицы, как правило, большие;

— матрицы симметричны и имеют блочную структуру;

— матрицы являются *разреженными*, т. е. они содержат много нулей.

Для решения систем линейных уравнений с такими матрицами применяют обычно итерационные методы, хотя в последнее время разработан ряд прямых методов, использующих блочную структуру. Численно эти методы часто оказываются выгодными, однако их недостатком является отсутствие универсальности.

Порядок, в котором пробегаются точки сетки при проведении итераций, влияет на вид матрицы уравнений и имеет тем самым решающее влияние на условия и сходимость итерационного процесса.

7.1.3. РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ В ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Численный метод еще не является программируемым *алгоритмом*, который состоит из *отдельных операций, протекающих в однозначной последовательности*, обладает *определенным началом*, а также *достижимым после конечного числа шагов концом* и, следовательно, в принципе может быть реализован машиной.

7.1.3.1. Критерии для выбора метода. Для решения поставленной задачи имеется, как правило, целый ряд методов.

Выбор *определенного метода численного решения* задачи и его окончательное преобразование в программируемый алгоритм всегда представляют попытку оптимизации, причем известные исходные положения V_i и добавочные требования F_i выступают как дополнительные условия, важнейшими из которых являются следующие:

Исходная информация:

V_1 – постановка задачи и общие предположения о решении;

V_2 – дополнительная информация об исходных данных (например, числовая область, специальный тип матрицы, вид числового материала и др.);

V_3 – общая структура машины (например, емкость памяти, время обращения, арифметическое устройство, стандартные функции, язык программирования и др.);

V_4 – представление чисел, арифметика, округление, точность специальных операций;

и т. д.

Требования:

F_1 – специальное требование к выходным данным (*выводу*) (например, целочисленные решения, требование точности, выдача промежуточных результатов, графическое изображение и др.);

F_2 – степень универсальности (должна ли решаться единичная задача, или требуется универсальное программное обеспечение относительно допустимого набора входных данных);

F_3 – минимизация стоимости (времени счета);

F_4 – ограничения памяти.

Эти условия частично противоречат друг другу, и поэтому при попытке их удовлетворения стараются добиваться определенного оптимума. Для этого используют *эмпирические правила.*

Основной принцип выбора метода состоит в следующем *принципе непосредственного приложения*: нужно выбирать по возможности метод, который решает именно *поставленную задачу*, а не ведет к решению побочно через некоторые подзадачи. Классический пример: собственные значения не вычисляются как корни характеристического многочлена (см. 7.1.2.2).

«Математически элегантные» решения зачастую являются непросматриваемыми относительно распространения погрешностей и устойчивости и неблагоприятными численно.

– Теоретическая сходимость при численной реализации не является гарантией вычислительной сходимости. С другой стороны, теоретически расходящиеся методы могут быть численно пригодны.

– Дополнительная информация о вводе, промежуточных результатах или выводе должна быть по возможности использована полностью, чтобы способствовать уменьшению погрешностей (например, симметрия, порядок величин, знаки, нули и т. д.).

Важнейшими причинами чрезмерного накопления погрешностей являются частое использование разностей (что приводит к потере значащих цифр) и деления на числа неизвестного порядка величины (что ведет к переполнению разрядной сетки); этого следует избегать искусной организацией программы.

7.1.3.2. Методы управления. Каждый практически использующийся алгоритм не устанавливает однозначно последовательность выполняемых операций заранее для любого набора исходных данных. Фактический ход процесса определяется параметрами управления X_n, значения которых вычисляются в ходе реализации. В качестве параметров управления выступают и промежуточные результаты, и некоторые специальные величины (например, нормы векторов или матриц, порядки величин, число шагов, адреса ячеек памяти, объем памяти и т. п.). Результат анализа величин X_n и управляет процессом.

Таблица 7.17

Таблица важнейших контрольных вопросов при анализе X_n

Контрольные вопросы	Замечания
$X_n < a$? (a – заданное число)	нуждается в априорной оценке для определения a. Если $a = \varepsilon$ при управлении обрывом итераций, то ε не может быть выбрано произвольно малым, иначе ошибка округления может исказить обрыв или совсем ему помешать
$\lvert X_n - X_{n-1}\rvert < \varepsilon$?	осторожно! При образовании разности существует опасность потери точности
$X_n = a$?	контроль применять только при целочисленных переменных!
$X_n < A_n$? (A_n – вычисленная константа)	A_n определяется апостериорно
$X_n < X_{n-1}$?	применяется для проверки теоретической монотонности параметра
Вычислительное время > T (T задано)	Обеспечивает аварийный останов при ненаступлении конца циклического процесса (например, при отсутствии сходимости итерации)

7.1.3.3. Вычисление функций. Арифметическое устройство цифровой вычислительной машины, как правило, в состоянии выполнить лишь четыре основных арифметических действия и элементарные логические операции, а в особых случаях также и определенные специальные операции, как, например, вычисление скалярного произведения или квадратного корня. Значения элементарных функций, максимум или минимум n чисел, сумма, целая часть или знак числа и т. п. определяются при помощи универсальных подпрограмм (стандартные функции).

Главные методы вычисления функций.

1) Многочлен — схема Горнера. Действительный многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

характеризуется в ЭВМ вектором $(a_0, a_1, \ldots, a_n; n)$. *Полная схема Горнера* содержит все операции, выполняемые при вычислении значения многочлена и его производных при заданном значении аргумента $x = x_0$:

$$\begin{array}{l|llllll}
 & a_n^{(0)} & a_{n-1}^{(0)} & a_{n-2}^{(0)} & \ldots & a_1^{(0)} & a_0^{(0)} \\
x = x_0 & - & x_0 a_n^{(1)} & x_0 a_{n-1}^{(1)} & \ldots & x_0 a_2^{(1)} & x_0 a_1^{(1)} \\ \hline
 & a_n^{(1)} & a_{n-1}^{(1)} & a_{n-2}^{(1)} & \ldots & a_1^{(1)} & \boxed{a_0^{(1)}} \\
x = x_0 & - & x_0 a_n^{(2)} & x_0 a_{n-1}^{(2)} & \ldots & x_0 a_2^{(2)} & \\ \hline
 & a_n^{(2)} & a_{n-1}^{(2)} & a_{n-2}^{(2)} & \ldots & \boxed{a_1^{(2)}} & \\
x = x_0 & - & x_0 a_n^{(3)} & \ldots & & & \\ \hline
 & a_n^{(3)} & \ldots & \boxed{a_2^{(3)}} & & & \\
x = x_0 & \ldots & & & & & \\ \hline
 & a_n^{(n+1)} & & & & &
\end{array}$$

> Общее правило: $a_k^{(j)} = a_k^{(j-1)} + x_0 a_{k+1}^{(j)}$,
> $j = 1, 2, \ldots, n+1;\ k = n, n-1, \ldots, j-1$.

$$a_{n+1}^{(j)} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n+1;$$
$$a_k^{(0)} = a_k, \qquad k = n, n-1, \ldots, 0.$$

Пример 25. $x_0 = -1$,

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - x + 1.$$

$$\begin{array}{l|rrrrr}
 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
x = -1 & & -2 & 1 & -1 & 2 \\ \hline
 & 2 & -1 & 1 & -2 & \boxed{3} \\
x = -1 & & -2 & 3 & -4 & \\ \hline
 & 2 & -3 & 4 & \boxed{-6} & \\
x = -1 & & -2 & 5 & & \\ \hline
 & 2 & -5 & \boxed{9} & & \\
x = -1 & & -2 & & & \\ \hline
 & 2 & \boxed{-7} & & & \\
x = -1 & & & & & \\ \hline
 & \boxed{2} & & & &
\end{array}$$

Частные случаи.

а) *Выделение линейного множителя*:

$$P_n(x)\colon (x - x_0) = a_n^{(1)} x^{n-1} + a_{n-1}^{(1)} x^{n-2} + \ldots + a_1^{(1)} + \frac{a_0^{(1)}}{x - x_0}.$$

Пример 26.

$$(2x^4 + x^3 - x + 1)\colon (x+1) = 2x^3 - x^2 + x - 2 + \frac{3}{x+1}.$$

б) *Значение функции в точке* $x = x_0$:

$$P_n(x_0) = a_0^{(1)};\ 2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1) + 1 = 3.$$

в) *Значения производных в точке* $x = x_0$:

$$P_n'(x_0) = a_1^{(2)},$$
$$P_n''(x_0) = 2!a_2^{(3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n!a_n^{(n+1)} = n!a_n.$$

г) *Разложение Тейлора в точке* $x = x_0$:

$$P_n(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x - x_0) + \ldots + a_n^{(n+1)}(x - x_0)^n.$$

Пример 27.

$$2x^4 + x^3 - x + 1 = 3 - 6(x+1) + 9(x+1)^2 - 7(x+1)^3 + 2(x+1)^4.$$

2) Разложение в ряд. Разложения в ряд для представления констант или функций являются общеизвестными (см. 3.1.14.2 и 3.1.14.5). Вопрос о сходимости рядов с числовой точки зрения имеет второстепенное значение. Разложение в ряд является *численно пригодным*, если ошибка обрыва при достаточно малом числе членов является настолько малой, что численный результат в машинном представлении оказывается точным (при этом сам ряд может даже расходиться!). Требуемая здесь универсальность представления означает, что для всей области определения представляемой функции значения функции должны быть представлены с машинной точностью. Этого достигают при помощи разложения в единичных случаях.

К *быстро сходящимся рядам* относятся разложения Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ и др. Рассмотрим, например, разложение для $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j+1}/(2j+1)!.$$

В этом случае ряд знакопеременный, и поэтому ошибка обрыва $R_n(x)$ по величине не больше, чем первое отброшенное слагаемое. Для того чтобы вычислить $y = \sin x$ для всех x с требуемой точностью, достаточно в силу периодичности и монотонности функции на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ оценить ошибку обрыва только при $x = \pi/2$: $|R_{2j}(\pi/2)| \leqslant (\pi/2)^{2j+1}/(2j+1)!$; если требуется вычислить $\sin x$ с точностью до восьмого знака, то нужно взять $j = 7$, так как $(\pi/2)^{15}/15! < 8 \cdot 10^{-10}$.

Внимание! Оценка ошибки, согласно теореме о знакопеременных рядах, может оказаться численно неправильной, так как ошибки округления ведут себя не знакопеременно!

Ускорение сходимости (примеры).

1) Преобразование Эйлера. Используя операторную формулу (см. 7.1.2.6.1)

$$(1 + E)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Delta^i}{2^{i+1}},$$

получим

$$y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + \dots$$
$$\dots = \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{4} \Delta y_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 y_0^2 - \dots$$

Рассмотрим в качестве примера один из способов вычисления π. Из разложения $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \dots$ следует $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ Этот ряд сходится очень медленно (для точности до четвертого знака требуется теоретически около 10000 членов; практически ошибки округления при этом уже испортят результат!). При применении вышеупомянутого преобразования (после отделения ведущих членов) нужный результат получают значительно быстрей:

$$1 - 1/3 + 1/5 - \dots - 1/19 = 0{,}76046.$$

y_k		Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1/21	0,04762				
		−414			
1/23	0,04348		66		
		−348		−14	
1/25	0,04000		52		2
		−296		−12	
1/27	0,03704		40		
		−256			
1//29	0,03448				

$$1/21 - 1/23 + 1/25 - 1/27 + 1/29 =$$
$$= 0{,}02381 + 0{,}00104 + 0{,}00008 + 0{,}00001 = 0{,}02494,$$
$$\pi/4 = 0{,}76046 + 0{,}02494 = 0{,}7854.$$

2) Использование специальных свойств.

а) Теоремы сложения: $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

б) Специальные преобразования: посредством соотношения $(1 + x)/(1 - x) = p^2/(p^2 - 1)$ из формулы

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots$$

получаем, что

$$\ln p = \frac{1}{2} \left[\ln(p-1) + \ln(p+1) \right] + \left[\frac{1}{2p^2 - 1} + \frac{1}{3(2p^2 - 1)^3} + \dots \right].$$

Если $p > 2$ — простое число, то $(p + 1)$ четно и $\ln p$ является суммой логарифмов целых чисел, меньших p, и быстро сходящегося ряда.

Пример 28. $\ln 3 = \frac{3}{2} \ln 2 + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \dots \right)$.

3) Метод выделения. Находим разложение данного, медленно сходящегося ряда по схеме:

$$\begin{pmatrix} \text{медленно сходящийся} \\ \text{ряд} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ряд с известной} \\ \text{суммой} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{быстро сходящийся} \\ \text{ряд} \end{pmatrix}.$$

Пример 29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)}.$$

7.1.4. НОМОГРАФИЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

Повсюду там, где физико-технические параметры выступают в многообразных связях и зависимостях и где из числовых значений некоторых величин должны быть быстро определены одна или несколько других величин без предъявления слишком высоких требований к точности, используются номографические вспомогательные средства, к которым в первую очередь можно отнести широко используемое вычислительное устройство — счетную линейку.

7.1.4.1. Соотношения между двумя переменными — функциональные шкалы. Пусть на отрезке $\overline{MN}$ установлена *начальная точка* A, из которой вдоль $\overline{MN}$ в определенном направлении откладывается единичный отрезок $\overline{AE} = e_x$. Пусть $y = f(x)$ для $a \leqslant x \leqslant b$ является монотонной функцией. Если из точки A откладывают ориентированный отрезок $m_x = e_x f(x)$ с конечной точкой P_x (индекс должен напоминать обозначение независимого переменного), то получают *взаимно однозначное* и определенное данной функцией $f(x)$ соответствие между числами x и точками P_x *носителя шкалы* $\overline{MN}$.

Если у точки P_{x_i} для подходящим образом выбранной равноотстоящей последовательности аргументов

$$x = x_i = a + ih$$

помещают отметку *аргумента* x_i, то получают

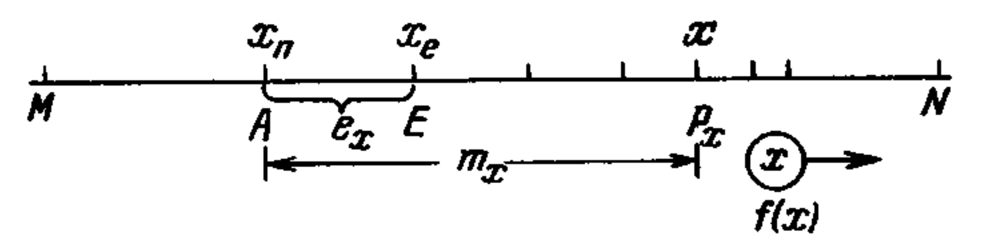


Рис. 7.7

шкалу функции, или *функциональную шкалу* (рис. 7.7).

По определению к A и E соответственно относят значения аргумента x_n и x_e, для которых $f(x_n) = 0$ и $f(x_e) = 1$. Можно разбить шкалу на части, вдоль которых выбираются по мере надобности различные значения шага аргумента.

Пример 30. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 6$ (рис. 7.8).

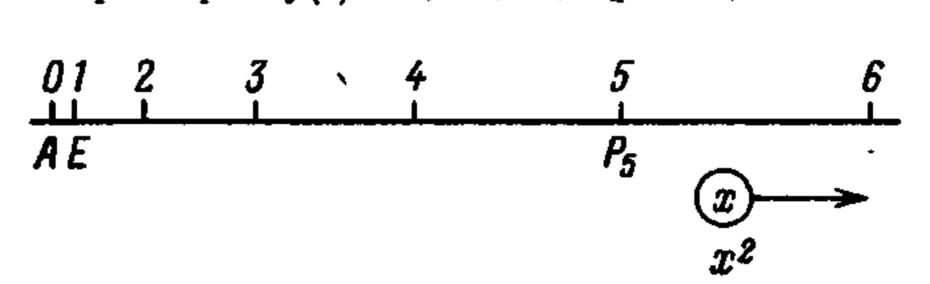


Рис. 7.8

При применении функциональных шкал для оси x кривые, являющиеся графиками данных функций, спрямляются (рис. 7.9).

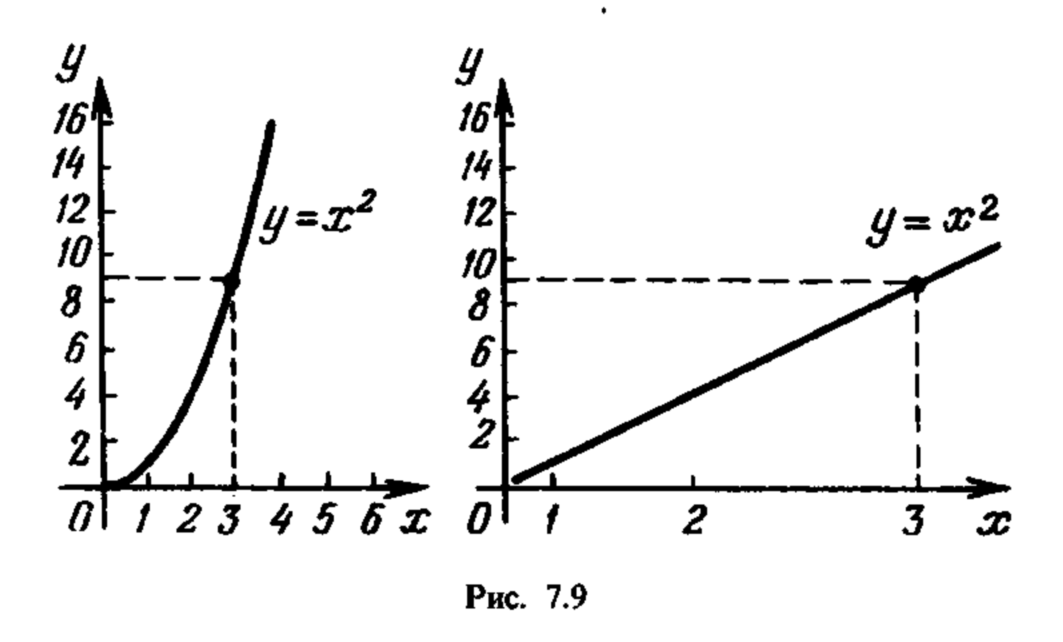


Рис. 7.9

7.1.4.2. Логарифмическая (счетная) линейка. Если расположить три шкалы функций относительно друг друга так, чтобы одна из них была смещена относительно двух других, то сложение

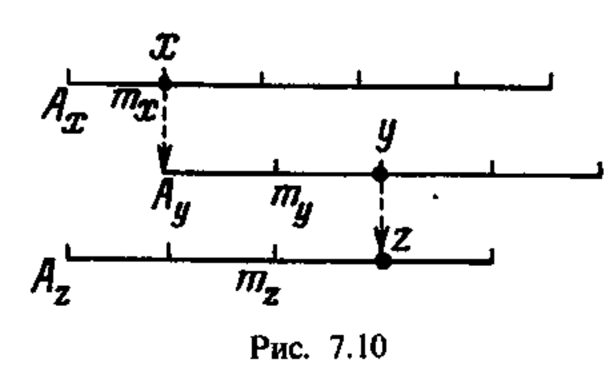


Рис. 7.10

отрезков будет реализовывать определенное функциональное соотношение *между тремя переменными* (рис. 7.10):

$$m_z = m_x + m_y,\ e_z h(z) = e_x f(x) + e_y g(y),$$

$$h(z) = \frac{e_x}{e_z} f(x) + \frac{e_y}{e_z} g(y),\quad h(z) = af(x) + bg(y).$$

Последнее соотношение называется *ключевым уравнением.*

Каждое уравнение $F(x, y, z) = 0$, которое может быть приведено к такому виду (a, b – действительные числа; $f(x)$ и $g(y)$ – функции от x, соответственно y), реализуется на соответствующей счетной линейке.

Пример 31. Счетная линейка для расчета полного сопротивления двух параллельно расположенных проводников (рис. 7.11).

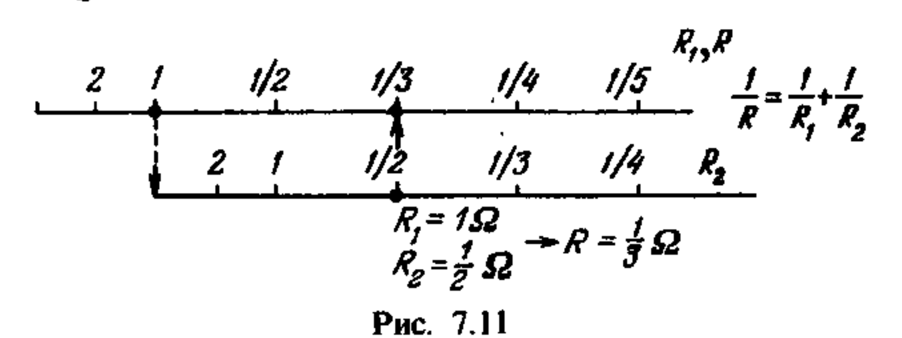


Рис. 7.11

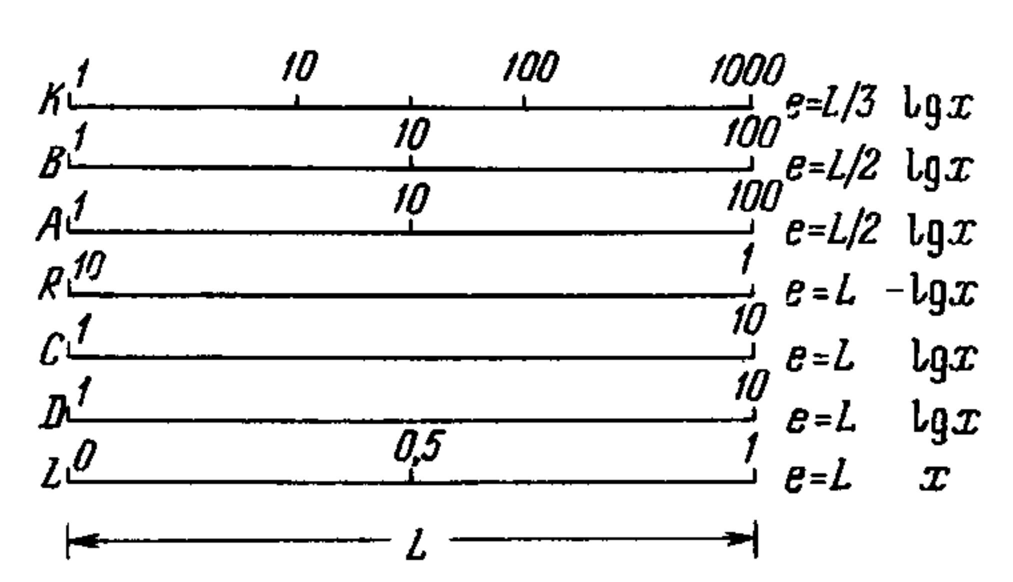


Рис. 7.12

Логарифмическая (счетная) линейка (рис. 7.12). Шкалы A, R, C размещены на движке и, таким образом, подвижны относительно других шкал. Установление соответствия между делениями различных шкал становится возможным, даже когда применяемые шкалы не лежат в непосредственной близости, благодаря бегунку, расположенному подвижно относительно всех шкал.

Пример 32. Что можно вычислить с тремя заданными шкалами установкой движка?

$(D)-(C)-(B)$ $\quad L\lg x + L\lg y = \frac{L}{2}\lg z,$

$$\lg x + \lg v = \frac{1}{2}\lg z,$$

$$\lg(xy) = \lg\sqrt{z} \to z = x^2y^2;$$

$(B)-(R)-(K)$ $\quad \frac{L}{2}\lg x - L\lg y = \frac{L}{3}\lg z,$

$$\lg y^{-1}\sqrt{x} = \lg\sqrt[3]{z} \to z = \sqrt{x^3}\cdot y^{-3};$$

$(A)-(L)-(R)$ $\quad \frac{L}{2}\lg x + Ly = L\lg\frac{1}{z},$

$$\lg\sqrt{x} + y = -\lg z \to z = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot 10^y}$$

и т. д.

И без того большое многообразие возможностей может быть еще значительно увеличено, если учитывать многократные перемещения. Это обстоятельство и простота употребления объясняют большое распространение счетной линейки.

7.1.4.3. Номограммы точек на прямых и сетчатые номограммы. Для представления функции $z = f(x, y)$ номографическим способом в плоскости без вспомогательных технических средств имеются две возможности.

1) Номограммы из выравненных точек. Точкам трех *несущих кривых* ставят в соответствие три переменные x, y и z. Значения переменных x, y и z считаются соответствующими, если отвечающие им точки на носителях P_x, P_y и P_z *расположены на прямой* (рис. 7.13).

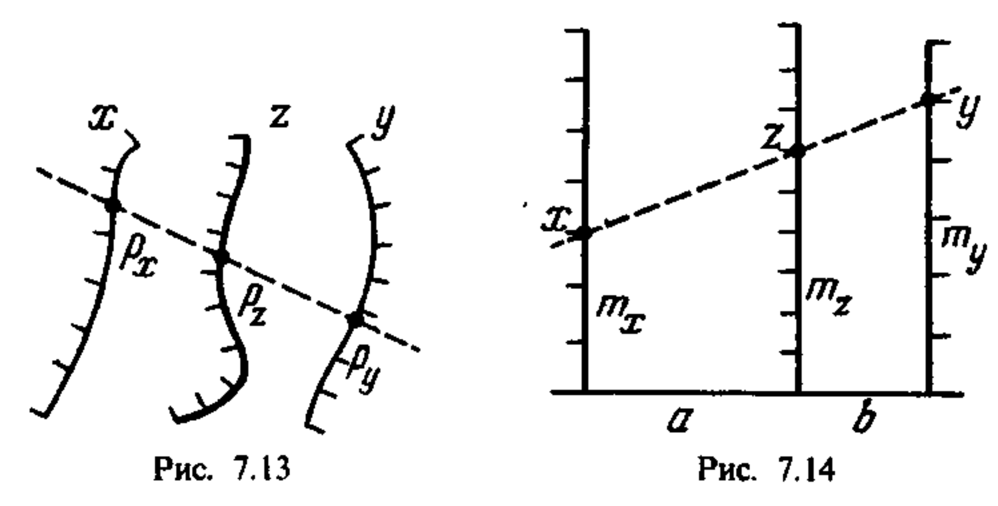


Рис. 7.13 Рис. 7.14

Специальному расположению носителей всегда отвечает соответствующая форма соотношения $F(x, y, z) = 0$, представляемая номограммой. Это соотношение называется *ключевым уравнением.*

Главные формы номограмм из выравненных точек с прямолинейными носителями:

а) $(m_z - m_x):a = (m_y - m_z):b$ (рис. 7.14),

$$bm_z - bm_x = am_y - am_z,\quad m_z = \frac{am_y + bm_x}{a+b},$$

$$e_z h(z) = \frac{a}{a+b} e_y g(y) + \frac{b}{a+b} e_x f(x),$$

$$\boxed{h(z) = \frac{a}{a+b} g(y) + \frac{b}{a+b} f(x).}$$

(Эта номограмма является, таким образом, практически эквивалентой логарифмической линейке.)

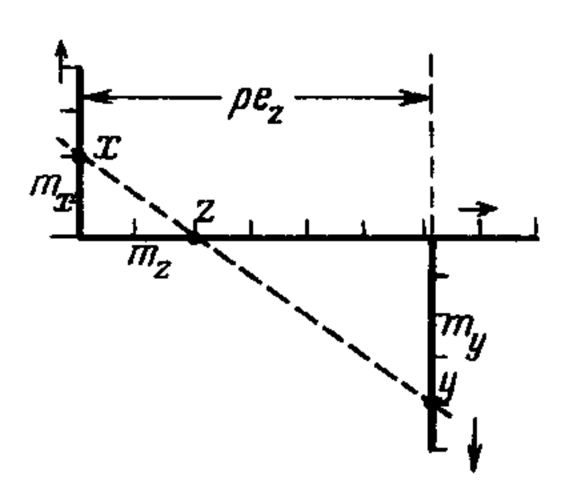


Рис. 7.15

б) $m_y : m_x = (pe_z - m_z) : m_z$ (рис. 7.15),

$$\frac{pe_z - h(z)\,e_z}{e_z h(z)} = \frac{e_y g(y)}{e_x f(x)}, \quad \frac{p}{h(z)} - 1 = \frac{e_y g(y)}{e_x f(x)},$$

$$\boxed{h(z) = \frac{p f(x)}{f(x) + \frac{e_y}{e_x} g(y)}.}$$

в) $\frac{1}{2} m_x m_y = \frac{1}{2} m_x m_z \sin\alpha + \frac{1}{2} m_y m_z \sin\beta$ (рис. 7.16),

$$\frac{1}{m_z} = \frac{\sin\alpha}{m_y} + \frac{\sin\beta}{m_x},$$

$$\boxed{\frac{1}{h(z)} = \frac{c\sin\alpha}{g(y)} + \frac{d\sin\beta}{f(x)}.}$$

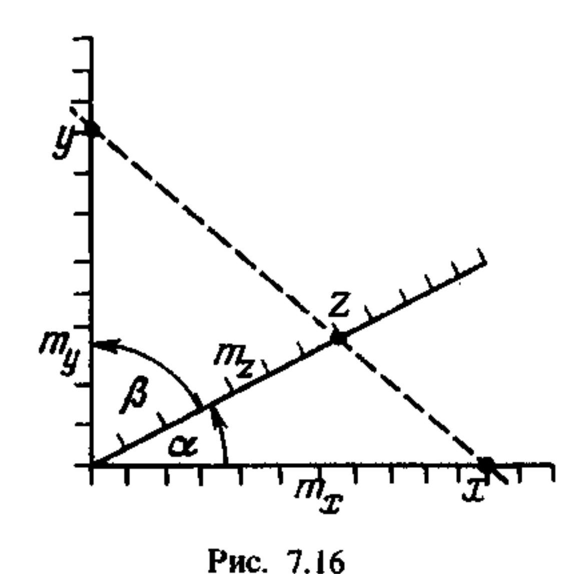


Рис. 7.16

2) Сетчатые номограммы. Пусть на плоскости в декартовой системе координат (u, v) заданы три *семейства кривых* с *параметрами семейств* x, y, z. Если кривые семейств, соответствующие значениям x, y и z, *пересекаются в одной точке*, то эти значения параметров в силу соотношения $F(x, y, z) = 0$ рассматриваются как соответствующие друг другу.

Здесь каждой форме — сетчатой номограмме — соответствует определенное ключевое уравнение.

Примеры с двумя осепараллельными семействами:

а) $m_y : m_z + m_x : m_z \operatorname{ctg}\alpha = 1$ (рис. 7.17),

$$m_y + m_x \operatorname{tg}\alpha = m_z,$$

$$\boxed{h(z) = cg(y) + df(x)\operatorname{tg}\alpha.}$$

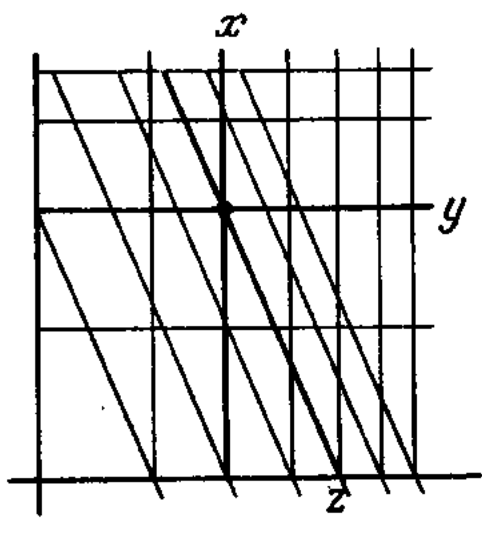


Рис. 7.17

(Таким образом, этот вид номограммы также эквивалентен счетной линейке.)

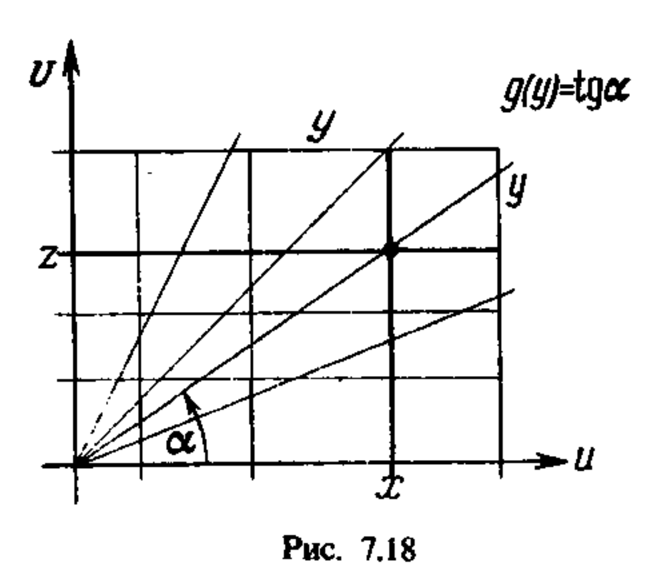


Рис. 7.18

б) $m_z : m_x = g(y)$ (рис. 7.18),

$$\boxed{h(z) = f(x)\,g(y).}$$

7.1.5. ОБРАБОТКА ЭМПИРИЧЕСКОГО ЧИСЛОВОГО МАТЕРИАЛА

Пример 33. При постоянном напряжении 1 В в зависимости от повышения сопротивления ΔR от $R_0 = 1$ Ом измеряется сила тока I:

ΔR	0	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
I	1	0,833	0,667	0,540	0,400	0,333	0,286	0,250	0,222

Какой вид имеет по возможности простая функция $I = I(\Delta R)$, наилучшим образом описывающая эту зависимость?

Так как числа как измеренные значения всегда содержат случайные погрешности, то нельзя ожидать, что интерполирующая функция (см. 7.1.2.6.1) решает задачу наилучшим образом! Более того, желательно провести по измеренным точкам такую кривую, чтобы некоторая заданная мера для отклонений оказалась минимальной.

Последняя задача является основной задачей *выравнивания (сглаживания) результатов измерений — вывода эмпирических формул.*

Пусть задано множество $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ функций $f(x;\, a_1, \ldots, a_n)$ и множество пар действительных чисел $(x_i, y_i)_{i=1}^N$, $N > n$. Ищется такая функция $\hat{f}(x;\, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) \in F$, для которой

$$\rho(\hat{f}(x_i) - y_i) \leqslant \rho(f(x_i) - y_i)$$

для всех $f \in F$. Здесь ρ является некоторой известной мерой отклонений

$$e_i = f(x_i) - y_i$$

и тем самым описывает *принцип (критерий) выравнивания*.

Внимание! Мы занимаемся только решением *этой* задачи. Обоснование применения того или иного критерия выравнивания дается статистикой (см. 5.2.2.2).

7.1.5.1. Метод наименьших квадратов. Этот принцип выравнивания был разработан Гауссом и применялся с большим успехом в обыденных и астрономических измерениях. Критерий выравнивания имеет вид

$$\rho_{\min}(f(x_i) - y_i) = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Если погрешности e_i подчиняются нормальному распределению, то этот критерий может рассматриваться как статистический (принцип максимального правдоподобия; см. 5.2.2).

Для простоты будем считать, что параметры a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ входят в f линейно, т. е.

$$f(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x).$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x_i) - y_i \right) f_j(x_i);$$

необходимым условием экстремума ρ являются равенства

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{N} f_k(x_i) f_j(x_i) = \sum_{i=1}^{N} y_i f_j(x_i) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

При использовании способа Гаусса записи суммирования

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = [f(x)]$$

эти *нормальные уравнения* принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [f_k(x) f_j(x)] = [y f_j(x)] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Частный случай $f_k(x) = x^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ приводит к *сглаживающему многочлену*, и нормальные уравнения принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} a_n [x^{k+j-2}] = [y x^{j-1}] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

На практике используют минимальное, насколько возможно, число параметров.

Для этого сначала визуально проверяют, лежат ли точки измерения, например, вблизи функции — константы, прямой $y = ax + b$, параболы и т. д., и в соответствии с этим используют то или иное предположение.

7.1.5.1.1. Выравнивание непосредственных наблюдений. Если известно, что при измерении y_i, $i = 1, \ldots, N$, речь идет о значениях теоретически постоянной величины; или из графического изображения вытекает соответствующее предположение, то значение этой константы может быть приблизительно определено путем выравнивания значений измерений. Эта постоянная $\bar{y}$ называется *средним значением* измерений. Согласно 7.1.5.1 получаем единственное нормальное уравнение

$$N\bar{y} = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{1}{N}[y].$$

Видно, что *среднее арифметическое наблюдений какой-либо величины выравнивает эту величину согласно методу наименьших квадратов.*

Если $v_i = \bar{y} - y_i$ обозначает случайную погрешность, то $[vv]$ принимает минимальное значение для $\bar{y} = \frac{1}{N}[y]$ и $[v] = 0$.

Величину $m = \sqrt{\frac{[vv]}{N-1}}$ называют *средней погрешностью* отдельного y_i; отношение $m_y = m/\sqrt{N}$ называется *средней погрешностью среднего* и применяется в записи результата измерений в виде $y = \bar{y} \pm m_y$.

7.1.5.1.2. Выравнивание прямыми $y = a + bx$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы точки измерения $M_i(x_i, y_i)$ лежали на прямой, является пропорциональность первых разностей x и y, т. е. $\Delta y_i / \Delta x_i = \mathrm{const}$.

Если это соотношение приближенно выполняется, то прямую $y = a + bx$ можно рассматривать как кривую выравнивания.

Коэффициенты прямой удовлетворяют, согласно 7.1.5.1, двум нормальным уравнениям:

$$aN + b[x] = [y], \qquad a[x] + b[x^2] = [xy],$$

откуда

$$a = \frac{[y][x^2] - [xy][x]}{N[x^2] - ([x])^2}, \quad b = \frac{N[xy] - [y][x]}{N[x^2] - ([x])^2}.$$

(Правило Крамера, см. 2.4.4.3.3.)

Пример 34.

x	y	Δy	$\Delta y/\Delta x$
0,5	0,62		
		1,02	2,04
1,0	1,64		
		2,06	2,06
2,0	3,70		
		1,32	2,64
2,5	5,02		
		0,72	1,44
3,0	5,74		

Четвертое значение измерения явно выделяется из рамок кажущейся линейной зависимости, что указывает либо на закономерное дополнительное влияние, либо на побочную ошибку измерения. Если с уверенностью можно сказать, что имеет место последнее, то это значение опускают, в противном случае оно должно учитываться. Выравнивание при помощи прямой дает следующий результат: $a = -0{,}409$, $b = 2{,}053$; следовательно, $\hat{y} = 2{,}053x - 0{,}409$.

Линеаризация. Если данные измерения *приблизительно* удовлетворяют уравнению вида

$$a_1 f(x) + b_1 g(y) = 0,$$

то может быть построена линейная связь путем преобразования $X = f(x)$, $Y = g(y)$ и, следовательно, может иметь место выравнивание (следует сравнить также с процессом спрямления, см. 7.1.4.1).

Пример 35 (см. пример 33). Если точки измерения нанести на график, то получают гиперболическую кривую, и можно предположить, что верно соотношение $y = 1/(a + bx)$. Положив $X = x$ и $Y = 1/y$, получим линеаризованную форму $Y = a + bX$.

7.1.5.1.3. Параболическое выравнивание

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Характеристическая величина:

$$\frac{\Delta(\Delta y_i/\Delta x_i)}{x_{i+2} - x_i} = \text{const},$$

т. е. вторые разделенные разности должны быть постоянными.

Нормальные уравнения:

$$cN + b[x] + a[x^2] = [y],$$
$$c[x] + b[x^2] + a[x^3] = [xy],$$
$$c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] = [x^2y].$$

Пример 36. $Y = y - 68$.

x	y	Y	ΔY	$\Delta Y/\Delta x$	$\Delta(\Delta Y/\Delta x):(x_{i+2} - x_i)$
−2	35	−33			
			15	7,5	
0	50	−18			−0,3
			18	6	
3	68	0			−1
			2	2	
4	70	2			−0,3
			6	3	
6	76	8			−0,06
			8	8/3	
9	84	16			

При таком поведении вторых разностей параболическое выравнивание еще может быть обосновано. Система имеет вид

$$6c + 20b + 146a = -25,$$
$$20c + 146b + 1028a = 266,$$
$$146c + 1028b + 8210a = 1484.$$

Решение. $\hat{Y} = -18{,}4 + 6{,}5x - 0{,}30x^2$,
$\hat{y} = 49{,}6 + 6{,}5x - 0{,}30x^2$.

7.1.5.2. **Другие способы выравнивания.**

1) Метод выбранных точек. Сначала точки измерения изображаются графически и визуально определяется подходящая эмпирическая формула:

$$y = f(x_i;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) \in F(a_1,\ \ldots,\ a_n).$$

Для вычисления параметров проводится гладкая кривая Г, которая «хорошо» подходит к точкам M_i, причем так, чтобы проявлялись качественные признаки графического представления функции из F.

Тогда на Г выбирается n точек N_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и из системы уравнений

$$\hat{f}(x_j;\ \hat{a}_1,\ \hat{a}_2,\ \ldots,\ \hat{a}_n) = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

вычисляются параметры $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, ..., $\hat{a}_n$ функции $\hat{y} = f(x)$.

Хотя метод и нагляден, но он очень груб и никоим образом не учитывает статистического распределения погрешностей (т. е. не может быть статистически обоснован).

2) При приближении по методу средних точки измерения M_i $(i = 1,\ \ldots,\ N)$ разбиваются на n равных или почти равных групп

$$\mathcal{M}_j = \{M_{i_1},\ M_{i_2},\ \ldots,\ M_{i_j}\} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для определения параметров требуют, чтобы

$$E_j = \sum_{k=1}^{i} e_{i_k} = \sum_{k=1}^{j} (f(x_{i_k},\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) - y_{i_k}) = 0$$

для $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Пример 37 (ср. пример 36). Параболическое выравнивание:

$$f(x,\ a,\ b,\ c) = ax^2 + bx + c.$$

x	y	x^2	e	
−2	35	4	$4a - 2b + c - 35$	M_1
0	50	0	$c - 50$	M_2
3	68	9	$9a + 3b + c - 68$	M_3
4	70	16	$16a + 4b + c - 70$	M_4
6	76	36	$36a + 6b + c - 76$	M_5
9	84	81	$81a + 9b + c - 84$	M_6

Группы: $\mathcal{M}_1 = \{M_1,\ M_2,\ M_3\}$; $\mathcal{M}_2 = \{M_4\}$; $\mathcal{M}_3 = \{M_5,\ M_6\}$.

Система уравнений:

$$13a + b + c = 153,$$
$$16a + 4b + c = 70,$$
$$117a + 15b + 2c = 160.$$

Решение:

$$\hat{f} = 50{,}1 + 6{,}0x - 0{,}25x^2$$

(см. 7.1.5.1.3).

Эмпирические формулы, конечно, еще не являются законами, но их получение может быть важной предварительной ступенью для открытия теоретически обоснованных функциональных соотношений между физическими величинами. Почти классическим примером этого является открытие закона излучения Планка на основе построения трех эмпирических формул.

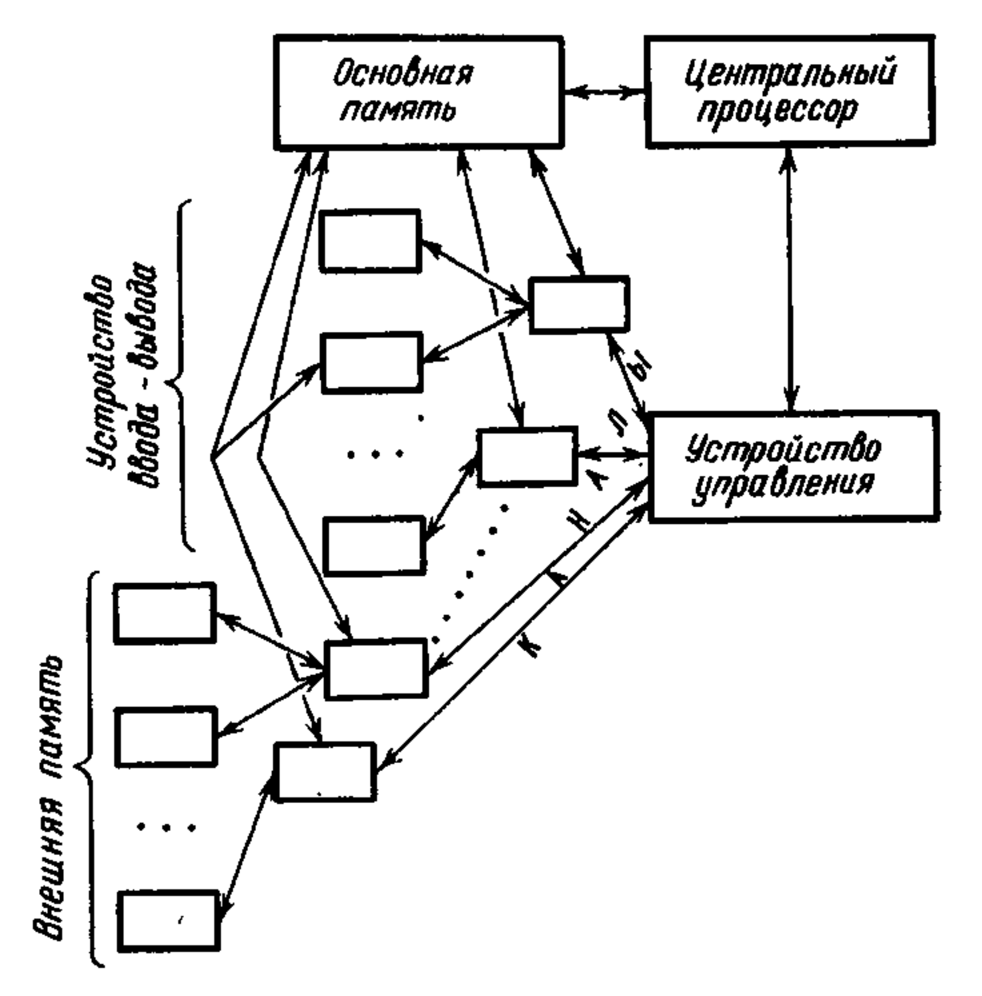
7.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

7.2.1. ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ (ЭВМ)

7.2.1.1. Вводные замечания. Созданные за несколько последних десятилетий электронные вычислительные машины получили в настоящее время широкое распространение и используются в самых различных областях для обработки информации. Сюда относятся: разнообразные вычислительные работы, как научно-технического, так и экономического характера; информационно-поисковые работы, связанные с организацией хранения больших объемов информации и поиска в них; наконец, работы по автоматическому управлению, позволяющие принимать управляющие решения по постоянно поступающим потокам информации.

В данном разделе даются вкратце некоторые общие сведения о работе ЭВМ и связанные с этим понятия.

Всякая ЭВМ имеет в своем составе следующие основные части (см. схему):



1) *устройства ввода и вывода* (внешние устройства), обеспечивающие связь ЭВМ с внешней средой;

2) запоминающие устройства (*накопители*, или *память*), позволяющие хранить исходную информацию, промежуточные и окончательные результаты;

3) *процессоры*, осуществляющие элементарные операции переработки информации;

4) *устройства управления*, контролирующие процесс обработки информации;

5) *операционную систему* – совокупность программ, обеспечивающих взаимодействие отдельных частей ЭВМ в процессе ее работы.

7.2.1.2. Представление информации и память ЭВМ. Любая информация в ЭВМ представляется в закодированном виде и изображается совокупностью *битов* – элементов, могущих принимать только одно из двух значений – 0 или 1. Наиболее употребительные виды информации – символьная и числовая. Символьная состоит из *символов*, набор которых образует алфавит данной ЭВМ. Каждый символ кодируется определенной комбинацией фиксированного числа битов, образующих *байт*. Наиболее употребительная длина байта – 8 или 6 битов.

Числа, вводимые в ЭВМ (или выводимые из ЭВМ), обычно записываются в десятичной системе счисления со знаком «+» или «–» и с использованием точки для отделения целой части от дробной. Кроме того, для расширения диапазона допустимых чисел и удобства записи разрешается добавление множителя вида $10^{\pm n}$, где n – натуральное число. Такой множитель записывается определенным условным образом, чаще всего в виде $\mathrm{E} \pm n$. Так, например, 0,000045 можно записать в виде 45E – 6 или 4.5E – 5. Записанные таким образом числа могут быть закодированы, так же как и другая символьная информация. Необходимые для этого символы всегда входят в алфавит.

Однако внутри ЭВМ для выполнения операций, а также большею частью и для хранения в памяти числа записываются в двоичной системе счисления, причем на каждое число отводится одинаковое количество битов, образующих *машинное слово* *). Употребительны две внутренние формы записи числа – с фиксированной или плавающей точкой. При фиксированной точке каждый бит в машинном слове соответствует определенному двоичному разряду, т. е. его значение (0 или 1) умножается на определенную степень числа 2. Чаще всего применяется система записи, в которой старший разряд соответствует (–1)-й степени числа 2, т. е. все изображаемые числа меньше 1, или такая, в которой младший разряд соответствует 0-й степени числа 2, т. е. все изображаемые числа – целые.

При плавающей точке числа представляются в виде ma^p, где m – мантисса (число, записываемое с фиксированной точкой), a – основание счисления (2, 10, 16**)), p – целое число со знаком – порядок числа. В машинном слове содержатся, занимая определенные биты, мантисса и порядок со своими знаками.

Машинное слово содержит целое число байтов.

Вводимая в ЭВМ информация размещается в памяти ЭВМ. Память состоит из элементов, которые могут иметь два физических состояния и способны поэтому запоминать значения битов (0 или 1), изображающих информацию. Совокупность элементов, предназначенных для хранения одного машинного слова, образует одну ячейку памяти. Все ячейки памяти перенумерованы последовательно; номер ячейки называется ее *адресом* ***).

При работе ЭВМ происходит постоянный обмен информацией между различными устройствами, постоянная засылка и выборка содержимого

---

*) В некоторых ЭВМ используется двоично-десятичная система, когда число представляется в десятичной системе, а каждая десятичная цифра – в двоичной, занимая по 4 бита в машинном слове.

**) Изображение числа в двоичной системе можно рассматривать как запись в шестнадцатеричной системе, объединяя каждые 4 бита в одну шестнадцатеричную цифру, и наоборот.

***) В некоторых ЭВМ перенумерованы подряд (*адресуемы*) все байты. В этом случае адресом ячейки является адрес ее первого байта.

той или иной ячейки памяти. Время, затрачиваемое на одно обращение к памяти, и объем памяти являются основными факторами, определяющими производительность ЭВМ. Повышение быстродействия памяти вызывает, как правило, удорожание ЭВМ. При необходимости иметь большой объем памяти и для уменьшения стоимости часто памяти ЭВМ придают иерархическую структуру, при которой она состоит из нескольких уровней, обладающих разным быстродействием. В процессе работы информация по мере надобности может пересылаться с одного уровня на другой. При этом различают внутреннюю и внешнюю память. Устройство управления имеет непосредственный доступ (по адресу) к любой ячейке только внутренней памяти. Информация, хранящаяся во внешней памяти, может быть использована только после ее пересылки во внутреннюю память. Обмен между внутренней и внешней памятью осуществляется только для группы ячеек, расположенных подряд и образующих блок. Таким образом, во внешней памяти адресуемыми элементами являются блоки.

Наиболее употребительна внешняя память на магнитном слое, нанесенном на ленты, диски или цилиндры (барабаны).

7.2.1.3. Каналы обмена. Ввод информации в ЭВМ и вывод результатов ее обработки осуществляются при помощи *внешних устройств.*

Предназначенная для ввода информация должна быть предварительно записана в закодированной форме на каком-либо *носителе*, доступном для восприятия внешними устройствами ЭВМ. Такими носителями могут быть бумажные перфоленты или перфокарты, магнитные ленты или диски. Для обмена информацией между внешними устройствами и ЭВМ, а также для обмена между внутренней и внешней памятью служат каналы обмена. В процессе обмена через канал может осуществляться простейшая переработка информации, например ее перекодирование. Обмен с внешними устройствами и внешней памятью происходит более медленно, чем работает процессор ЭВМ, поэтому обычно такой обмен совмещают с работой процессора следующим образом. При возникновении потребности в обмене у решаемой задачи работа процессора *прерывается* и включается соответствующий канал. Процессор может выполнять в это время работу для какой-либо другой задачи. Необходимо только, чтобы задачи использовали различные области памяти и эти области были *защищены*, т. е. никакая задача не могла бы испортить данные или программы, находящиеся в области, отведенной для другой задачи. По окончании обмена вновь возникает прерывание, и процессор может вернуться к первоначальной задаче. Такой режим работы называется *мультипрограммным.*

7.2.1.4. Программа. Для выполнения любой задачи обработки информации вычислительного, логического или другого характера должен быть задан *алгоритм* обработки. Описание такого алгоритма, предназначенное для восприятия его машиной, называется *программой.*

Работа *центрального процессора* ЭВМ состоит из последовательного выполнения различных элементарных операций. Для каждой операции исходными данными являются один или два *операнда.* Для хранения операндов, их адресов и другой вспомогательной информации используются *регистры* – простейшие запоминающие устройства объемом в одно машинное слово. Устройство, в котором получается результат элементарной операции, называется *сумматором.*

Для решения задачи на ЭВМ алгоритм решения должен быть в конечном счете разбит на элементарные операции. Описание одной элементарной операции называется *командой.* Команда должна содержать сведения о том, откуда взять операнды, какие выполнить действия, куда послать результат. Набор элементарных операций и способ их описания образуют *систему команд.* В настоящее время наиболее распространенной системой команд является *одноадресная*, при которой команда состоит из *адресной части* и *кода операции.* Одним из операндов является содержимое сумматора, адресная часть позволяет найти второй операнд и (или) указывает, куда направить результат. Код операции характеризует выполняемую операцию и способ использования адресной части.

Адресная часть команды может иметь различную структуру. Часто приходится выполнять одни и те же команды, в которых адреса операндов (или результатов) могут быть переменными. В таких случаях выделяют постоянную и переменную составляющие адреса; последнюю размещают в каком-либо вспомогательном регистре. В команде указываются постоянная составляющая и адрес (номер) вспомогательного регистра. Иногда применяется *косвенная адресация*, когда адрес операнда образуется в какой-либо ячейке памяти, определяемой адресной частью команды.

Наряду с простыми командами зачастую используются команды более сложной структуры, позволяющие описывать укрупненные операции, например операции обмена. Такие команды обычно называют *макрокомандами.* По существу, макрокоманды заменяют некоторые определенные последовательности элементарных команд.

Совокупность команд, описывающая весь процесс решения задачи, образует *объектную* (машинную) *программу.* Программа сама является одним из видов исходной информации задачи и размещается в памяти ЭВМ. В одном машинном слове обычно размещается одна-две команды, макрокоманды могут занимать более одного слова.

7.2.1.5. Программирование. Написание алгоритма задачи в виде объектной программы является сложной и трудоемкой работой, которую обычно поручают самой ЭВМ. Исходными данными для этой задачи является содержательное описание алгоритма, называемое *исходной программой.* Для того чтобы такое описание могло быть понято машиной, оно должно быть написано на каком-либо *алгоритмическом языке.* Существует большое число алгоритмических языков, наиболее распространенным из которых являются фортран, алгол-60, кобол, PL-1.

Текст исходной программы на алгоритмическом языке состоит из отдельных предложений, называемых *операторами.* Операторы делятся на исполняемые, которые описывают какие-либо действия, выполняемые над данными, и неисполняемые, которые содержат некоторую необходимую информацию о данных и о выполнении программы.

Конструкции каждого языка должны удовлетворять определенным формальным требованиям, совокупность которых определяет *синтаксис* языка. Смысловое содержание языковых форм описывает семантика языка. Совокупность языковых средств, допустимых на данной ЭВМ, образует ее *систему программирования*. Каждый алгоритмический язык должен позволять описывать соответствующие алгоритмы точно, полно и так, чтобы это описание понималось однозначно.

Процесс написания исходной программы (*программирование*) обычно состоит из нескольких этапов. На первом этапе рассматривается общая структура алгоритма, он разбивается на составные части и составляется грубое, неформальное описание последовательности этих частей. Основными структурами, при помощи которых может быть построен любой алгоритм, являются:

1) последовательное выполнение (рис. 7.19);

2) повторение (цикл) (рис. 7.20 и 7.21);

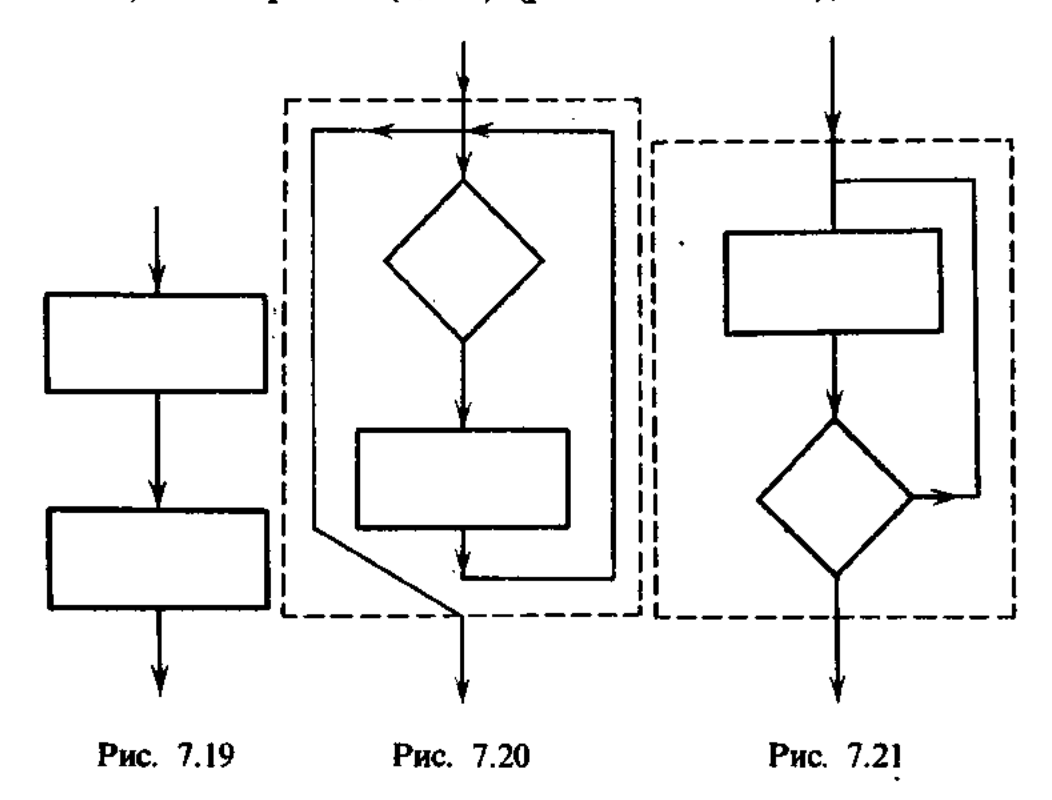


Рис. 7.19 Рис. 7.20 Рис. 7.21

3) альтернатива (условное выполнение) (рис. 7.22 и 7.23);

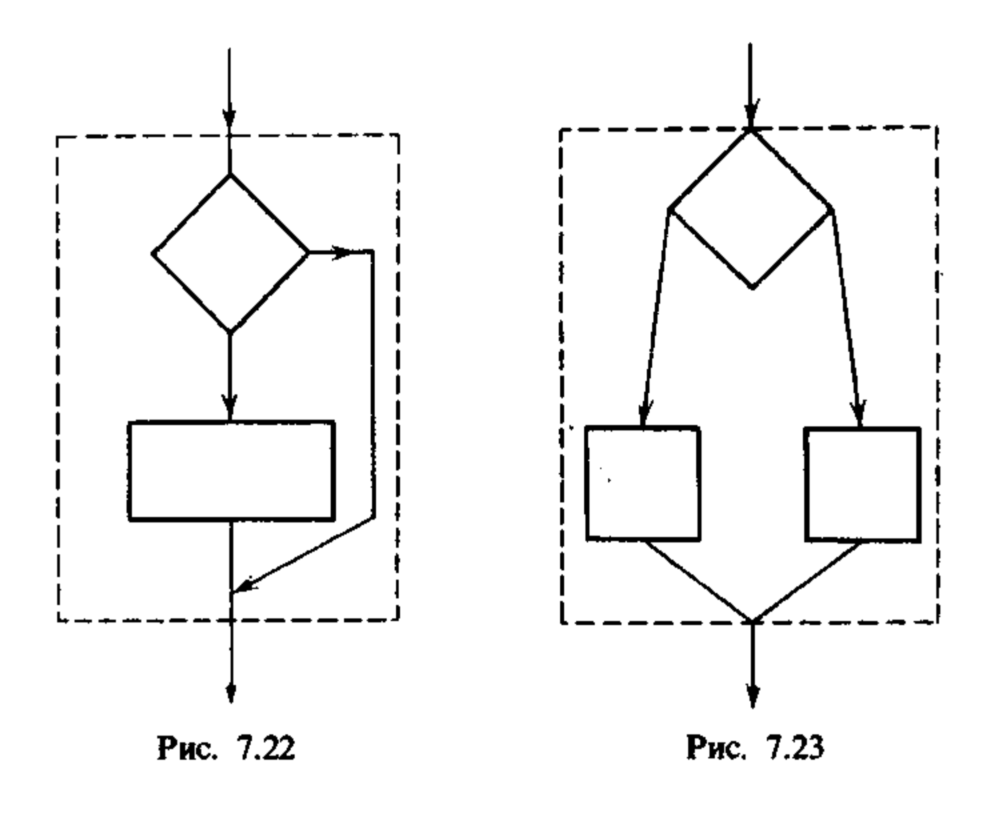


Рис. 7.22 Рис. 7.23

4) ветвление *) (рис. 7.24).

На рис. 7.19 – 7.24 ромбики означают проверку какого-либо условия (два выхода – «выполняется» или «нет»), прямоугольники – элемент алгоритма. Эти структуры могут использоваться рекурсивно.

*) Ветвление можно описать как последовательность альтернатив, однако использование структуры ветвления может заметно упростить программу.

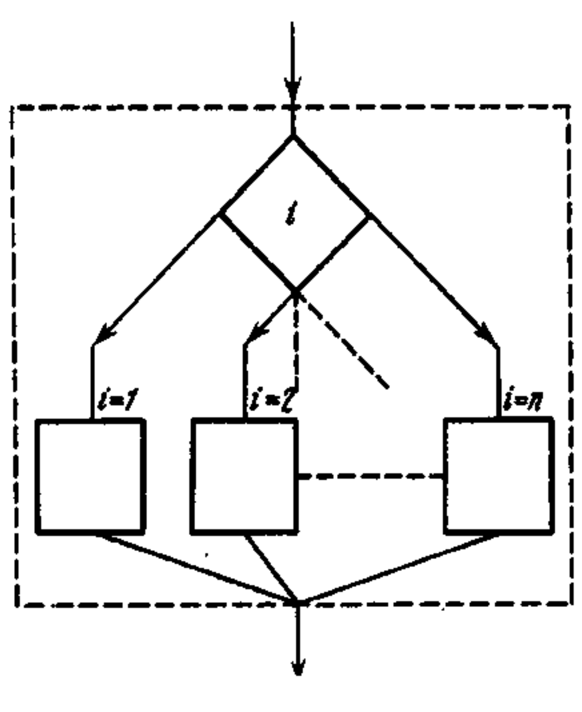


Рис. 7.24

Следующим этапом является детализация элемента, выделенного на предыдущем этапе, и рассмотрение его внутренней структуры и т. д. При этом используются те же основные структуры. Конечное описание (исходная программа) состоит уже из элементарных операторов языка, полностью формализовано и должно быть синтаксически правильным.

В процессе программирования разрабатываются и структуры данных, как исходных, так и промежуточных и окончательных. При этом может оказаться необходимым учитывать особенности используемой ЭВМ, в первую очередь объем и структуру памяти. За этим исключением, исходная программа в основном не зависит от типа ЭВМ, на которой реализован данный алгоритмический язык.

На начальных этапах выявляется целесообразность разбиения программы на *модули*, т. е. на отдельные части, которые могут программироваться независимо. Модульное программирование особенно эффективно, когда приходится иметь дело с несколькими тематически близкими программами, имеющими общие части. Запрограммированные заранее модули могут затем включаться в различные программы. Передача информации от одного модуля к другому выполняется обычно через внешнюю память, хотя в различных языках имеются и другие способы такой передачи.

Некоторые части программ, повторяющие один и тот же алгоритм, удобно выделять в *подпрограммы*. Подпрограммы программируются независимо от основной программы и хранятся в ЭВМ отдельно от нее. При возникновении в основной программе потребности в алгоритме, выполняемом подпрограммой, происходит *вызов* подпрограммы и ее выполнение, после чего вновь продолжается работа основной программы. При вызове необходимая информация из основной программы может передаваться в подпрограмму в виде параметров, от которых зависит подпрограмма.

Процесс получения объектной программы из исходной является одним из видов работ, выполняемых ЭВМ. Программы, выполняющие такие работы, называются *компиляторами* или *трансляторами* и являются составной частью общего математического обеспечения ЭВМ.

Фактически трансляторы переводят исходную программу не сразу в объектную программу, а в некоторую промежуточную форму, написанную или

на языке *ассемблера*, или в виде *объекта загрузки*. Оба этих языка близки к машинному языку команд, однако в них вместо истинных адресов фигурируют относительные, или символические, адреса, а также содержится некоторая управляющая информация. Окончательная объектная программа получается после работы специальных программ – *ассемблера* и *загрузчика*, составляющих часть монитора.

7.2.1.6. Управление ЭВМ. Работа ЭВМ происходит в основном полностью автоматически. Функции человека-оператора сводятся к начальному пуску ЭВМ, к смене переменных внешних источников информации – пакетов перфокарт, магнитных лент и дисков – и к реакции на запросы ЭВМ (главным образом о подготовке тех или иных устройств) через пульт управления.

Наиболее употребительными системами организации работы ЭВМ являются *пакетная обработка* и *разделение времени* *). При пакетной обработке в ЭВМ загружается несколько задач (пакет), которые и выполняются последовательно или параллельно в зависимости от наличия ресурсов. При операциях обмена возникают прерывания, позволяющие на время прекращения решения одной задачи включать в решение другую.

При разделении времени несколько пользователей связаны с ЭВМ через устройства ввода-вывода (*терминалы*), поочередно подключаемые автоматически к ЭВМ. Вводя информацию (данные и программу) через терминал, пользователь имеет возможность давать машине задания и реагировать на ее ответы, осуществляя так называемый диалоговый режим. Время работы программы в среднем мало по сравнению со временем обмена и временем реакции, поэтому ЭВМ успевает обслужить несколько пользователей.

Помимо взаимодействия с внешней средой и организации выполнения работ устройство управления обеспечивает работу центрального процессора, расшифровывая коды операции и адреса в очередной команде и выбирая эту команду в зависимости от сигналов, получаемых от процессора. Все эти функции осуществляются как соответствующими аппаратными средствами, так и специальными программами, входящими в так называемую *операционную систему*, составляющую неотъемлемую часть ЭВМ.

7.2.1.7. Математическое (программное) обеспечение. Совокупность программ, используемых при работе ЭВМ, составляет ее *математическое обеспечение*. Его обычно разделяют на специальное математическое обеспечение, складывающееся из программ пользователей, предназначенных для решения тех или иных конкретных задач, и общее математическое, в которое входят операционная система, библиотека подпрограмм общего назначения и ряд других программ, обеспечивающих функционирование ЭВМ.

Операционную систему обычно делят на *супервизор* и *монитор* **). Главной функцией супервизора является управление задачами, состоящее в основном в распределении ресурсов ЭВМ (куда относятся прежде всего память и время центрального процессора) между задачами в процессе их выполнения – динамически. Монитор осуществляет управляющие функции в пределах одной задачи, обеспечивая компиляцию частей программы, написанных на разных языках, их загрузку и связь, взаимодействие задачи с внешней памятью и т. п.

Составляя задание для ЭВМ, пользователь, кроме программы решения своей задачи, должен давать ряд указаний операционной системе относительно требуемых ресурсов, используемых языков программирования и т. п. Такие указания пишутся на *языке управления заданиями*.

Важной частью общего математического обеспечения является *система управления данными*, рассматриваемая обычно как часть операционной системы. При работе ЭВМ во внутренней и внешней памяти хранится большое число наборов данных, относящихся к различным задачам. В их число входят и программы, по которым задачи решаются. На языках программирования и языке управления заданиями эти наборы делятся на смысловые единицы (*записи*, *файлы*), идентифицированные своими именами. В памяти ЭВМ наборы данных размещаются на физических единицах (блоках), характеризуемых адресами. Система управления данными должна обеспечивать размещение возникающих записей и файлов в свободных блоках памяти и возможность их выборки по мере надобности.

7.2.1.8. Выполнение работ на ЭВМ. Для выполнения каких-либо работ на ЭВМ необходимо прежде всего ознакомиться с возможностями используемой ЭВМ. Определив общую схему выполнения задачи и выходных данных, можно составлять программу на каком-либо алгоритмическом языке с учетом особенностей реализации языка на данной машине.

Далее необходимо программу *отладить*, т. е. устранить возможные ошибки, для чего задачу решают на каких-либо вспомогательных данных (*тестах*), таких, чтобы правильность результатов можно было легко проверить.

Процесс отладки обычно распадается на две стадии. Первая – выявление технических и синтаксических ошибок (типа опечаток), вторая – методическая отладка, когда ищутся ошибки алгоритма, а также возможности его улучшения. Необходимо иметь в виду, что в больших программах весьма трудно обеспечить устранение в процессе отладки всех ошибок, в связи с чем следует проводить отладку небольших частей программы отдельно, постепенно связывая их между собой.

После завершения отладки окончательный текст фиксируется путем записи его во внешней памяти. Если предстоит решать большое число вариантов с различными данными по неизменной программе, то для того, чтобы избежать повторной трансляции, записывается объектная программа.

Если решение задачи занимает много времени, необходимо в программе предусмотреть *опорные точки*, т. е. запись во внешнюю память промежуточных результатов. Такая запись должна позволять возобновить решение задачи с момента последней записи в случае сбоя в работе ЭВМ.

---

*) Работа ЭВМ, входящих в АСУ (автоматические системы управления), здесь не рассматривается.

**) Эти термины не всегда одинаково используются.

7.2.2. АНАЛОГОВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

7.2.2.1. Принцип устройства аналоговой вычислительной техники. Принцип устройства аналоговой вычислительной техники основывается на реализации математических моделей техническими средствами, причем математические объекты представляются в качестве измеряемых физических величин, а математические операции реализуются в виде соответствующих физических законов.

Существуют механические, пневматические, гидравлические и электронные аналоговые вычислительные машины.

Проводятся опыты с оптическими аналоговыми вычислительными машинами (АВМ). Мы ограничимся здесь электронными АВМ. В табл. 7.18 перечислены характерные отличия АВМ от цифровых вычислительных машин.

Таблица 7.18

Признаки	Цифровая	Аналоговая	Электронная аналоговая
Представление информации	Последовательность цифр	Значения физических величин	Электрические потенциалы
Действия над информацией	алгоритмы	выбранные соответствующим образом физические законы	законы теории электричества
Точность	теоретически не ограничена	ограничена принципиально	0,2–2% на вычислительный элемент
Возможность применения	универсальна	специальные задачи	системы обыкновенных дифференциальных уравнений
Программирование	алгоритмы решения и обработки	уравнения задачи	дифференциальные уравнения
Числовая область	очень велика	мала	для зависимых переменных $-1 \leqslant y \leqslant 1$
Выдача результатов	цифровая таблица (таблица знаков, текст) или кривые	кривые, отдельные результаты измерений, таблицы	начерченные кривые, кривые на осциллограммах, отдельные результаты измерений, таблицы

7.2.2.2. Вычислительные элементы аналоговой вычислительной машины. АВМ построены по блочному принципу и содержат операционные усилители, которые чаще всего конструируются как сменные вставные блоки. Подключение операционных усилителей в поле программирования осуществляется посредством штеккеров и шнуров. В вычислительных машинах, к которым предъявляются более высокие требования, поле программирования является сменным. После соединения с входными цепями и цепями обратной связи вычислительные усилители (усилитель постоянного напряжения:

$$U_a = -sU_e,$$

U_e – входное напряжение, U_a – выходное напряжение, $s > 10^5$) становятся *вычислительными элементами*, которые выполняют определенные операции.

Важнейший вычислительный элемент *интегратор* содержит, кроме того, еще два выключателя (реле), которые приводятся в действие двумя управляющими напряжениями p_r, p_s. Благодаря этому вычислительный элемент может иметь три положения:

1) «сброс», $p_r = L$ (т. е. приложено p_r); в этом положении выход y вычислительного элемента равен входу y_0 на клемме начального значения со знаком «–»;

2) «вычисление», $p_r = p_s = 0$; интегратор производит интегрирование;

3) «прерывание», $p_s = L$; интегратор запоминает значение напряжения на выходе, т. е. оно остается в этом положении постоянным независимо от того, что подается на вход.

В случае $p_r = p_s = L$ интегратор находится в положении «сброс» (преимущественное включение).

Обычно интеграторы управляются централизованно, т. е. в вычислительной машине управляющие напряжения p_r и p_s включаются для этих интеграторов одновременно. Отсчет времени начинается ($t = 0$) в момент перехода из положения «сброс» в положение «вычисление» и заканчивается ($t = t_e$) в момент перехода из положения «вычисление» в положение «прерывание» или «сброс».

Переключение положений может осуществляться с пульта управления при помощи часов или другого датчика времени, а также по программе.

Различают два рода работы:

1. Однократное вычисление: «сброс» – «вычисление» – «прерывание».

2. Повторяющееся вычисление: постоянная смена положений «сброс» и «вычисление», начинающаяся по стартовому сигналу, происходит до сигнала остановки.

Кроме интеграторов, управляемых централизованно, в больших вычислительных машинах имеются *свободно управляемые интеграторы*, в которых управляющие напряжения p_r и p_s могут быть запрограммированы по отдельности. Таблица 7.19 дает обзор вычислительных элементов аналоговой вычислительной машины.

Таблица 7.19.

Название	Символ	Функция	Замечания
Потенциометр: заземлен открыт		$y = ax$ $y = x_2 + a(x_1 - x_2)$	a – действительное число, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Регулировка потенциометра зависит от последующего сопротивления нагрузки
Сумматор Инвертор		$y = -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ $y = -x$	a_i (чаще всего целочисленны, например, $a_i \in \{1, 10\}$) – постоянные входные сопротивления
Центрально управляемый интегратор		$y = -y_0 - b\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, d\tau$ или $y' = -b\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ $y(0) = -y_0$ $y' = -x$ $y(0) = -y_0$	a_i, b (чаще всего целочисленны, например a_i, $b \in \{1, 10\}$) – постоянные входные сопротивления; y_0 постоянно. Часто встречающийся случай: $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_e$
Свободно управляемый интегратор		$y = -y_0 - b\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, d\tau$	$p_r = \begin{cases} L \text{ при } t < t_1, \\ 0 \text{ при } t \geqslant t_1; \end{cases}$ $p_s = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_2, \\ L \text{ при } t \geqslant t_2 \end{cases}$
Мультипликатор (параболический умножитель)		$y = x_1 x_2$	С правильным знаком всегда умножаются функции, которые подаются на входы, обозначенные «+»
Генератор функции		$y = f(x)$	f – непрерывная действительная функция, кусочно линейная или постоянная (аппроксимация с помощью ломаной)
Компаратор (реле с разностным усилителем)		$z_1 > z_2$: $y = x_1$ $z_1 < z_2$: $y = x_2$ $z_1 = z_2$: неустойчиво	x_1 и x_2 могут быть также управляющими напряжениями
Открытый усилитель		$y = -sx$	$s > 10^5$; применение для особых целей
Постоянные функции		$y = 1$ $y = -1$ $y = 0$ $p = 0$ $p = L$	Постоянные функции представлены в виде клемм на поле программирования. Следует различать напряжение вычисления $+1$ и управляющее напряжение L

7.2.2.3. Принцип программирования при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В аналоговой вычислительной машине кусочно непрерывные действительные функции переменного t на сегменте $0 \leqslant t \leqslant t_e$ могут представляться (и быть получены) в виде потенциалов, зависящих от времени. При этом функции являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши). Дифференциальные уравнения программируются, а начальные значения задаются как постоянные функции. Мы пренебрегаем в этом разделе технически обусловленными ограничениями (ограничение сегментом $[-1, 1]$, ограничение показаний потенциометров $0 \leqslant a \leqslant 1$) и рассматриваем *качественное программирование* (составление *плана согласования*).

План согласования для обыкновенного дифференциального уравнения в явной форме (см. 3.3.1.1). Рассмотрим в качестве примера $y''' = f(y, y', y'', t)$, $y(0) = a_1$, $y'(0) = a_2$, $y''(0) = a_3$, где a_1, a_2, a_3 — положительные действительные числа.

Первый шаг. Составление цепочки из трех интегралов (соответственно порядку дифференциального уравнения) (рис. 7.25); следует обратить внимание на перемену знака при интегрировании и перемену знака у задаваемых начальных значений.

Второй шаг. Получение функции $z = t$ в качестве решения задачи $z' = 1$, $z(0) = 0$.

Третий шаг. Получение $f(y, y', y'', t)$ при помощи вычислительных элементов вычислительной машины. Запись результата $y = y(f)$.

Пример 38. $y'' = -\omega^2 y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\omega$, $\omega > 0$. План согласования – рис. 7.26. (Выходы на записывающее устройство и t не указаны. См. также пример 40.)

Пример 39. $y_1'' = -ty_1' + y_2$, $y_2'' = -y_1y_2 + a_1e^{-a_2t}$, $y_1'(0) = y_1(0) = 0$, $y_2'(0) = -a_3$, $y_3(0) = a_4$, $a_i > 0$; найти решение при $0 \leqslant t \leqslant t_e$.

План согласования – рис. 7.27. Вспомогательную функцию $z_2 = e^{-a_2t}$ получим как решение задачи о начальных значениях $z_2' = -a_2z$, $z_2(0) = 1$. В случае многоканального записывающего устройства y_1 и y_2 могут записываться одновременно; в противном случае вычисления проводятся дважды и y_1 и y_2 записываются одно за другим.

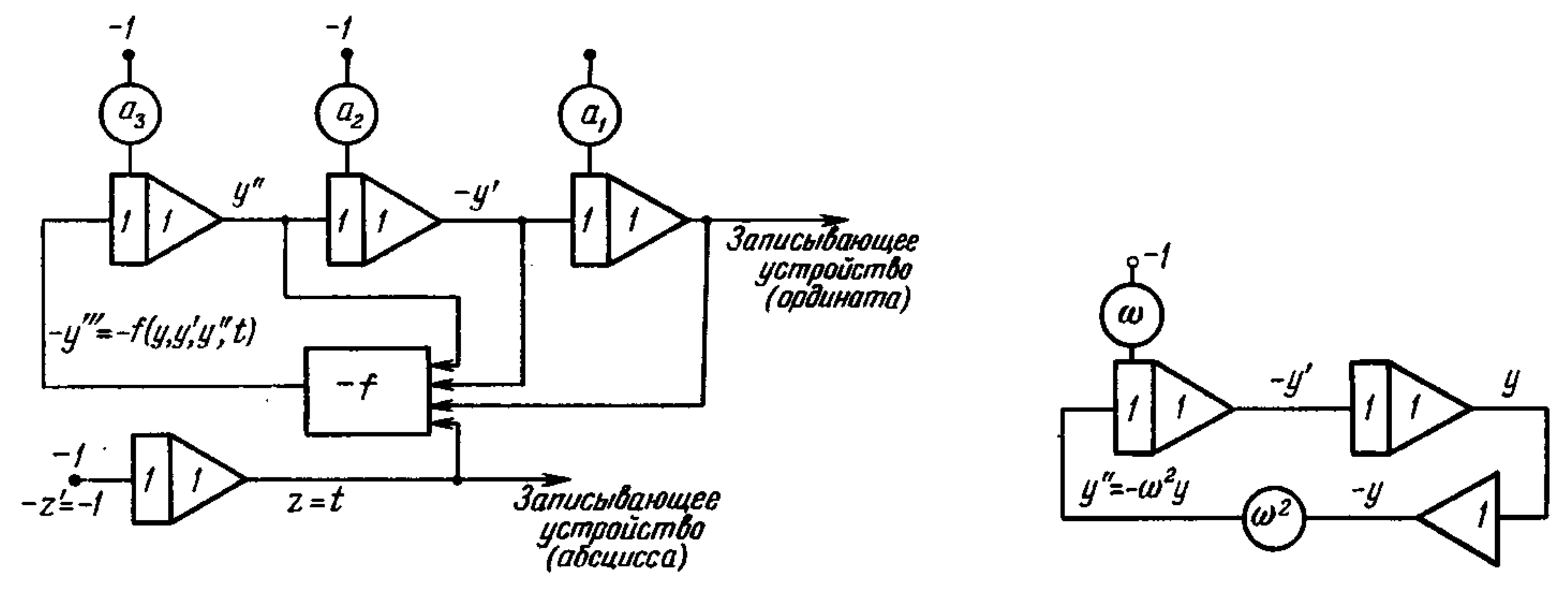


Рис. 7.25 Рис. 7.26

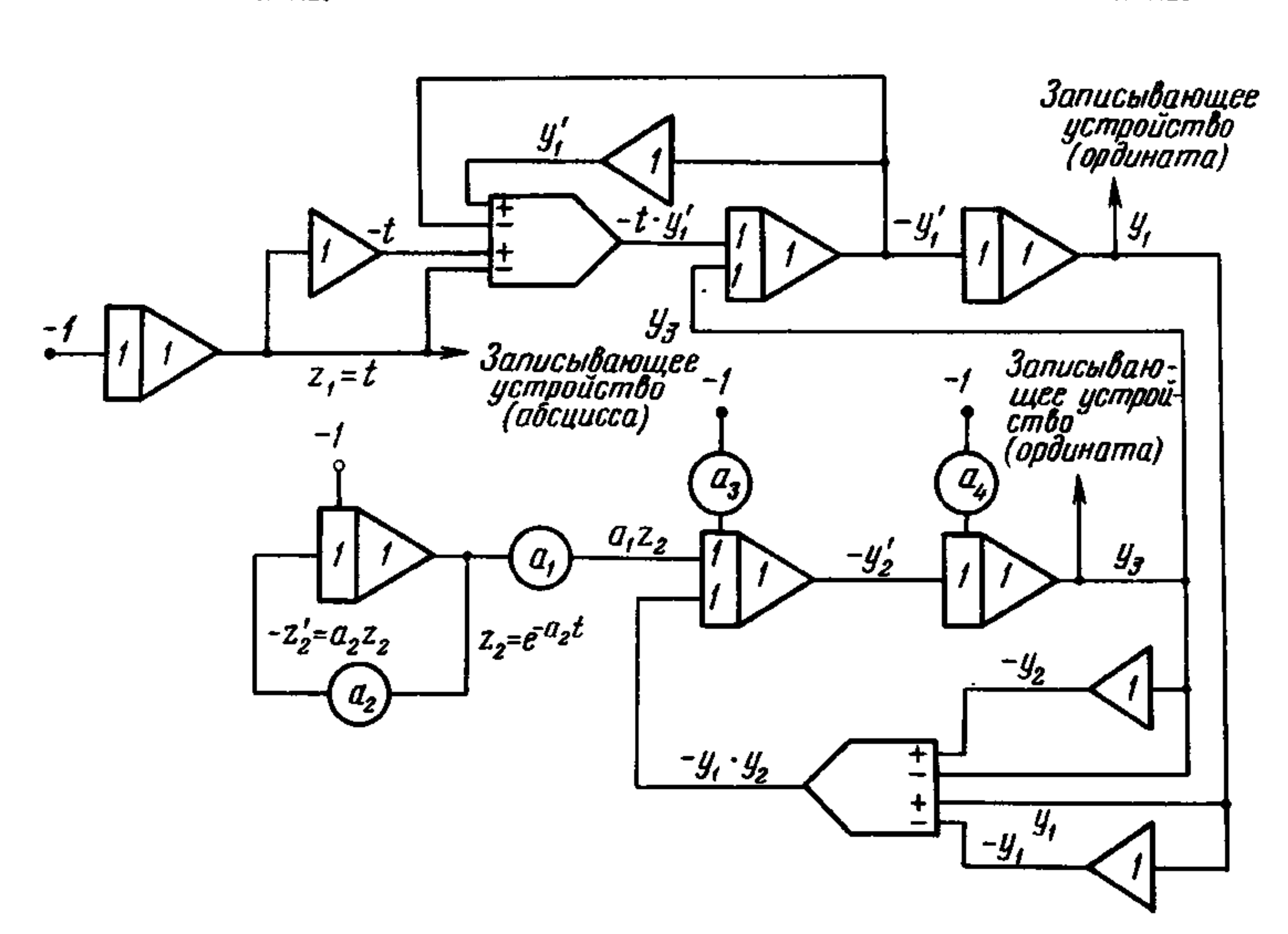


Рис. 7.27

7.2.2.4. Качественное программирование. На выходах операционного усилителя могут получаться только такие функции, значения которых лежат между -1 и 1. Кроме того, в большинстве случаев требуется отобразить отрезок $0 \leqslant t \leqslant t_e$ независимой переменной задачи на временной промежуток $0 \leqslant T \leqslant T_e$, реализуемый в вычислительной машине (и соответствующих устройствах вывода). Это делается при помощи однородных линейных преобразований.

1) *Нормировка функций.* Так как все рассматриваемые функции кусочно непрерывны на сегменте, то они ограничены. Поэтому для каждой функции $x(t)$, представимой в вычислительной машине, существует верхняя граница ее значений; обозначим ее через x^*:

$$\forall t \qquad (t \in [0, t_e] \rightarrow \rceil\, x(t) \,| \leqslant x^*).$$

При этом $-1 \leqslant x(t)/x^* \leqslant 1$ и $x(t)/x^*$ представима. Выходы инверторов и мультипликаторов не нуждаются в нормировке, так как их нормировка вытекает из нормировки на входах. Если в качестве пределов выбрать верхние границы, то получим оптимальное преобразование, при котором усилители (возможно, за исключением мультипликаторов) полностью пронормированы.

2) *Преобразование независимого переменного.* При помощи преобразования $T = \lambda t$ отрезок $0 \leqslant t \leqslant t_e$ отображается на отрезок $0 \leqslant T \leqslant T_e$, где $T_e = \lambda t_e$. При этом нормированные функции задачи (нормированные переменные задачи) становятся машинными переменными:

$$\bar{x}(t) = x(T/\lambda)/x^*.$$

Так как интегрирование в вычислительной машине может происходить только по переменному T (действительное текущее время), то для интегрирования получается следующее преобразование:

$$\sigma = \lambda\tau:\ \tau = 0 \rightarrow \sigma = 0,$$

$$\tau = t \rightarrow \sigma = \lambda t = T;$$

$$d\tau = \frac{1}{\lambda}d\sigma:\ \int_0^t \frac{x(\tau)}{x^*}d\tau = \int_0^T \frac{x(\sigma/\lambda)}{x^*}\frac{1}{\lambda}d\sigma = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \frac{x(\sigma/\lambda)}{x^*}d\sigma.$$

При $\lambda > 1$, $\lambda < 1$ и $\lambda = 1$ говорят соответственно о растягивании отрезка времени, сжатии и программировании в истинном времени. При помощи этих преобразований из плана согласования получается *нормированный план согласования,* или *схема вычислений.* Рис. 7.28 изображает переход от плана согласования к нормированному плану согласова-

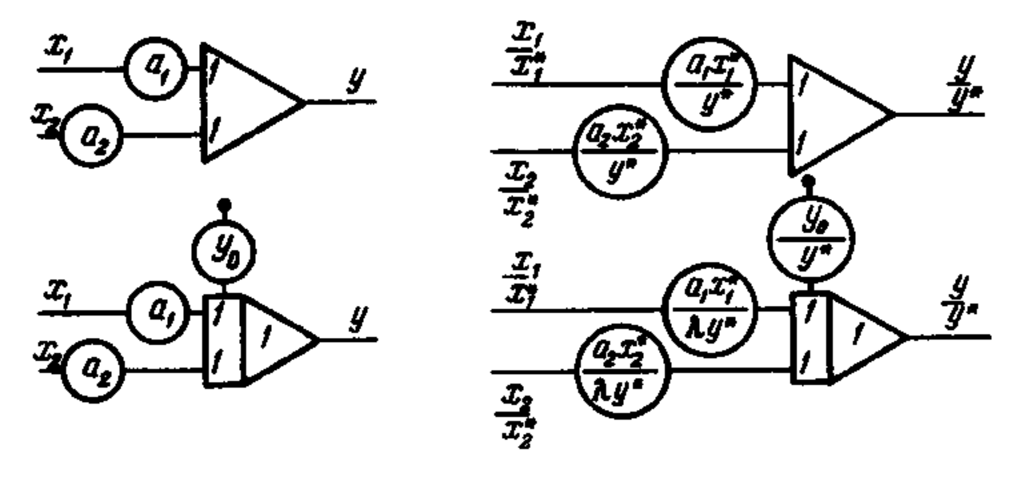


Рис. 7.28

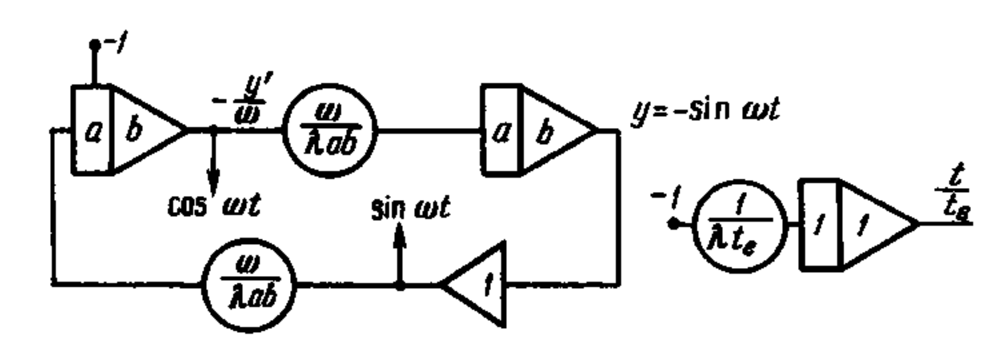


Рис. 7.29

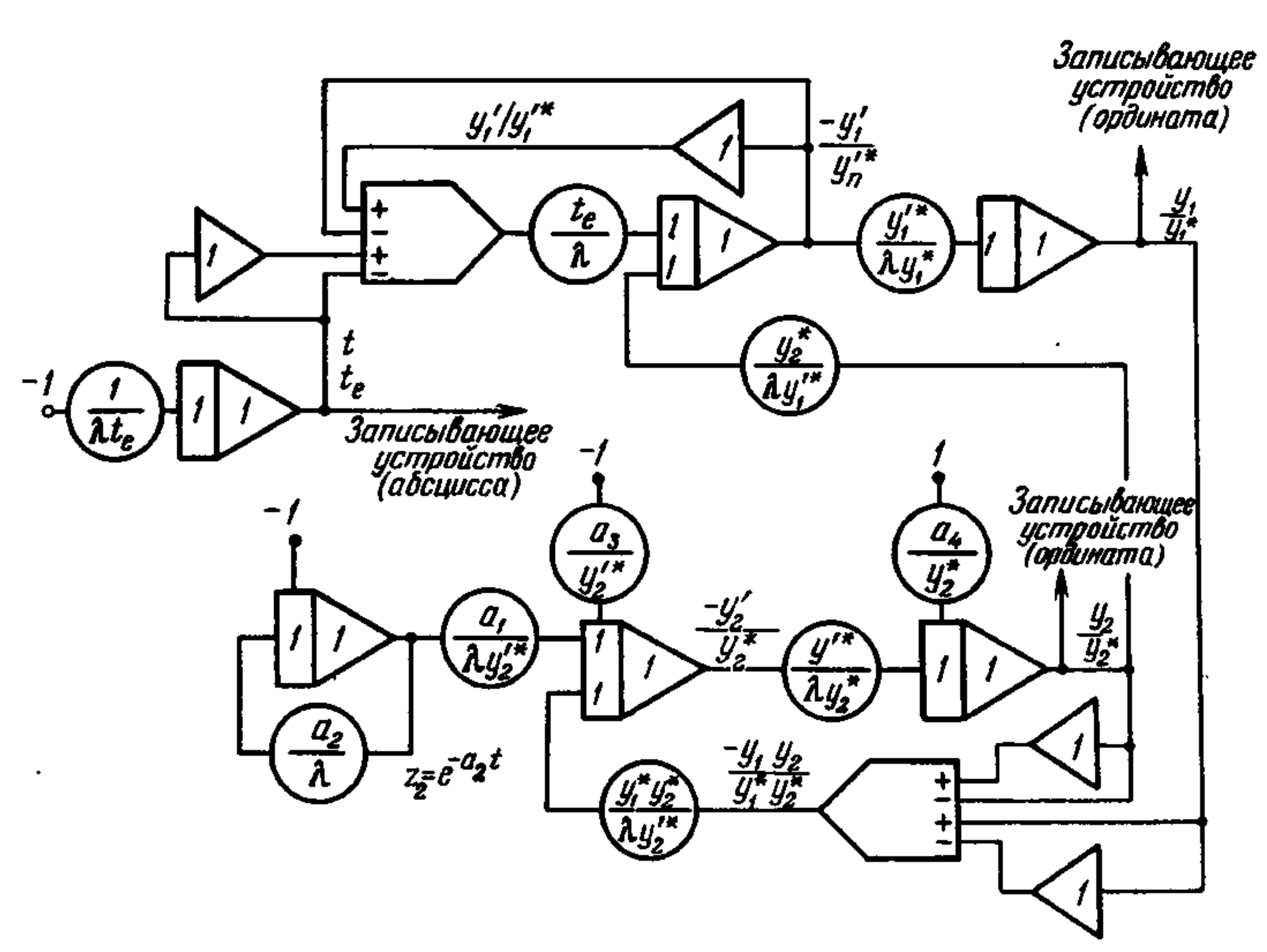


Рис. 7.30

ния в случае сумматора и интегратора согласно уравнениям:

план согласования:

$$y' = -a_1x_1 - a_2x_2,$$

$$y = -y_0 - \int_0^t (a_1x_1 + a_2x_2)\,d\tau;$$

нормированный план согласования:

$$\frac{y'}{y^*} = -\left(\frac{a_1x_1^*}{y^*}\right)\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right) - \left(\frac{a_2x_2^*}{y^*}\right)\left(\frac{x_2}{x_2^*}\right),$$

$$\frac{y}{y^*} = -\frac{y_0}{y^*} - \int_0^T \left(\frac{a_1x_1^*}{\lambda y^*}\frac{x_1}{x_1} + \frac{a_2x_2^*}{\lambda y^*}\frac{x_2}{x_2^*}\right)d\sigma.$$

Пример 40. Нормировка плана согласования примера 38. В этом простом примере решение получается сразу: $y = -\sin\omega t$ и $y' = -\omega\cos\omega t$, т. е. $y^* = 1$ и $y^* = \omega$. Начальные значения нормированных функций: $y(0) = 0$, $y'(0)/y'^* = -1$.

Если принять во внимание, что не обязательно обе постоянные интеграторов a и b выбирать равными 1, то в качестве плана согласования получается рис. 7.29. Мы видим, что схема на рис. 7.26 применима только при $0 < \omega \leqslant 1$ (из-за потенциометра начальных значений), в то время как нормированный план согласования без больших затрат при $0 < \omega/(\lambda_{ab}) \leqslant 1$ и при соответствующем выборе a, b и λ делает доступным гораздо бо́льшую область по ω. На выходе инвертора получают функцию $\sin\omega t$, а на выходе первого интегратора — функцию $\cos\omega t$ (схема генератора синусоидальных колебаний). Схема оптимальна, все усилители полностью промодулированы.

Пример 41. *Нормировка плана согласования примера* 39. Нетрудно найти $t^* = t_e$ и $z_1^* = 1$. Остальные пределы оцениваются. Подставляя оценочные значения, проводят проверку. Если усилитель перемодулирует, то предел для выхода усилителя выбран слишком малым; если модуляция недостаточна, то предел выбран слишком большим. На рис. 7.30 показан нормированный план согласования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Общие руководства, справочники и таблицы

1.1. Математическая энциклопедия.— М.: Советская энциклопедия, т. 1—5, 1977—1985.
1.2. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике.— М.: Наука, 1986.
1.3. *Цыпкин А. Г.* Справочник по математике для средней школы.— М.: Наука, 1983.
1.4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для работников и инженеров.— М.: Наука, 1984.
1.5. Таблицы Барлоу.— М.: Наука, 1975.
1.6. *Хохлов А. И.* Математические таблицы.— М.: Наука, 1980.
1.7. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы.— М.: Наука, 1983.
1.8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
1.9. Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.
1.10. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции.— М.: Наука, 1977.
1.11. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований в двух томах. СМБ.— М.: Наука, 1969, 1970.
1.12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции в трех томах. СМБ.— М.: Наука, 1969, 1973, 1974.
1.13. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики.— М.: Наука, 1983.
1.14. *Савелов А. А.* Плоские кривые.— М.: Физматгиз, 1960.

2.2. Комбинаторика

2.1. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ.— М.: Изд-во МГУ, 1972.
2.2. *Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Элементы комбинаторики.— М.: Наука, 1977.
2.3. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику.— М.: Наука, 1975.
2.4. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.

2.4. Алгебра

2.5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1983.
2.6. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.
2.7. *Ван дер Варден Б.* Алгебра.— М.: Наука, 1979.
2.8. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1975.
2.9. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1981.
2.10. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1977.
2.11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1978.
2.12. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, 1971.

2.6. Геометрия

2.13. *Погорелов А. В.* Элементарная геометрия.— М.: Наука, 1977.
2.14. *Понтрягин Л. С.* Знакомство с высшей математикой. Метод координат.— М.: Наука, 1977.
2.15. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии.— М.: Наука, 1975.
2.16. *Погорелов А. В.* Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1978.
2.17. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, 1979.
2.18. *Волынский Б. А.* Сферическая тригонометрия.— М.: Наука, 1977.

3.1. Дифференциальное и интегральное исчисления

3.1. *Понтрягин Л. С.* Знакомство с высшей математикой. Анализ бесконечно малых.— М.: Наука, 1980.
3.2. *Никольский С. М.* Курс математического анализа в двух томах.— М.: Наука, 1975.
3.3. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ в двух томах.— М.: Высшая школа, 1980.
3.4. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа в двух томах.— М.: Наука, 1971, 1980.
3.5. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды.— М.: Наука, 1967.
3.6. *Воробьев Н. Н.* Теория рядов.— М.: Наука, 1979.
3.7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.
3.8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.

3.2. Вариационное исчисление и оптимальное управление

3.9. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление.— М.: Физматгиз, 1962.
3.10. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1983.
3.11. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.
3.12. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. СМБ.— М.: Наука, 1978.

3.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.13. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1982.
3.14. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.
3.15. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1966.
3.16. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.— М.: Наука, 1980.
3.17. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
3.18. *Тихонов Н. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.

3.3.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

3.19. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Физматгиз, 1961.
3.20. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.
3.21. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.
3.22. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.
3.23. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.

3.24. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1983.

3.25. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М.: Наука, 1966.

3.4. Комплексные числа. Функции комплексного переменного

3.26. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.

3.27. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций.— М.: Наука, 1978.

3.28. *Тихонов А. Н., Свешников А. Г.* Теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1979.

3.29. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций.— М.: Наука, 1969.

3.30. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.

3.31. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. I, II.— М.: Наука, 1985.

3.32. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1982.

4.1. Множества, отношения, отображения

4.1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука, 1977.

4.2. *Новиков П. С.* Элементы математической логики.— М.: Наука, 1973.

4.3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.

4.4. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1984.

4.5. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика.— М.: Наука, 1979.

4.2. Векторное исчисление

4.6. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.

4.7. *Лаптев Г. Ф.* Элементы векторного исчисления.— М.: Наука, 1975.

4.3. Дифференциальная геометрия

4.8. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1974.

4.9. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.

4.4. Ряды Фурье, интегралы Фурье и преобразование Лапласа

4.10. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.— М.: Наука, 1980.

4.11. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. СМБ.— М.: Наука, 1974.

4.12. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций.— М.: Наука, 1977.

4.13. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1979.

4.14. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики.— М.: Наука, 1984.

4.15. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции.— М.: Наука, 1984.

4.16. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.— М.: Наука, 1974.

5. Теория вероятностей и математическая статистика

5.1. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.

5.2. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. СМБ.— М.: Наука, 1973.

5.3. *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей.— М.: Наука, 1976.

5.4. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1976.

5.5. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Наука, 1979.

5.6. *Ивашев-Мусатов О. С.* Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Наука, 1979.

6.1. Линейное программирование

6.1. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1976.

6.2. *Карманов В. Г.* Математическое программирование.— М.: Наука, 1986.

6.3. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации.— М.: Наука, 1978.

6.4. *Иванилов Ю. П., Лотов А. В.* Математические модели в экономике.— М.: Наука, 1979.

7.1. Элементы численных методов

7.1. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Физматгиз, 1963.

7.2. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.

7.3. *Бахвалов Н. С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения).— М.: Наука, 1975.

7.4. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.

7.5. *Дьяченко В. Ф.* Основные понятия вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.

7.6. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И.* Вычислительные методы в двух томах.— М.: Наука, 1976, 1977.

7.7. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М.: Наука, 1979.

7.8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.

7.9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.

7.10. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.

7.11. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы.— М.: Наука, 1977.

7.12. *Хованский Г. С.* Основы номографии.— М.: Наука, 1976.

7.13. *Панов Д. Ю.* Счетная линейка.— М.: Наука, 1982.

7.2. Вычислительная техника

7.14. *Королев Л. Н.* Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение.— М.: Наука, 1978.

7.15. *Карцев М. А.* Архитектуры цифровых вычислительных машин.— М.: Наука, 1978.

7.16. *Урмаев А. С.* Основы моделирования на АВМ.— М.: Наука, 1978.

7.17. *Ершов А. П.* Введение в теоретическое программирование.— М.: Наука, 1975.

7.18. *Любимский Э. З., Мартынюк В. В., Трифонов Н. П.* Программирование.— М.: Наука, 1980.

7.19. *Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д.* Программирование и алгоритмические языки.— СКБ.— М.: Наука, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ